

# 控制与决策

Control and Decision

## 多无人机仿射编队的抗扰控制设计

鲜斌, 刘佳妮, 姜鹏志

引用本文:

鲜斌, 刘佳妮, 姜鹏志. 多无人机仿射编队的抗扰控制设计[J]. *控制与决策*, 2024, 39(12): 4055–4063.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1574>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### [大规模固定翼无人机集群编队控制方法](#)

Formation control of large-scale fixed-wing unmanned aerial vehicle swarms

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2063–2073 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0076>

#### [四旋翼无人机抗干扰轨迹跟踪控制](#)

Anti-interference trajectory tracking control of quadrotor UAV

*控制与决策*. 2021, 36(2): 379–386 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0875>

#### [基于深度学习的四旋翼无人机地面效应补偿降落控制设计](#)

Robust landing controller design for quadrotor unmanned aerial vehicle ground effects compensation via deep learning

*控制与决策*. 2021, 36(11): 2637–2646 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0184>

#### [分布式无人机的时变编队非线性控制设计](#)

Time-varying formation nonlinear control of distributed multiple UAVs

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2490–2496 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0136>

#### [基于领航-跟随的有人/无人机编队队形保持控制](#)

Formation keeping control for manned/unmanned aerial vehicle formation based on leader-follower strategy

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2435–2441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0453>

# 多无人机仿射编队的抗扰控制设计

鲜斌<sup>1†</sup>, 刘佳妮<sup>1</sup>, 姜鹏志<sup>1,2</sup>

(1. 天津大学 电气自动化与信息工程学院, 天津 300072; 2. 航天神舟飞行器有限公司, 天津 300301)

**摘要:** 多无人机仿射编队控制能够根据编队需求实现灵活的编队机动. 针对存在外界未知扰动情况下的多无人机编队形成及变换问题, 研究多无人机仿射编队抗扰控制及编队形成与变换过程中的避碰问题. 首先, 针对在外界干扰情况下仿射编队形成及变换问题, 设计一种基于误差符号函数积分 (RISE) 的鲁棒控制算法. 该控制算法能够对未知外界扰动造成的影响进行有效的补偿, 提高多无人机仿射编队控制的鲁棒性. 然后, 基于 Lyapunov 分析法证明了编队控制系统的稳定性. 针对多无人机机间避碰问题, 利用缓冲维诺单元对无人机飞行区域进行分离, 在仿射编队形成及变换过程中保证无人机间的碰撞避免. 针对避碰过程中可能出现的死锁问题, 提出一种启发式算法使无人机能够顺利从死锁中恢复. 最后, 使用室内实验平台验证所提出算法的有效性.

**关键词:** 多无人机; 仿射编队控制; 分布式控制; 抗扰控制; 机间避碰; 实验验证

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1574

引用格式: 鲜斌, 刘佳妮, 姜鹏志. 多无人机仿射编队的抗扰控制设计 [J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 4055-4063.

## Robust control design of affine formation control for multiple unmanned aerial vehicles

XIAN Bin<sup>1†</sup>, LIU Jia-ni<sup>1</sup>, JIANG Peng-zhi<sup>1,2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. Spaceflight Shenzhou Craft Co., Ltd, Tianjin 300301, China)

**Abstract:** Multi-UAV affine formation control enables flexible formation maneuvering according to formation needs. This paper proposes a robust affine formation control strategy for a group of UAVs which is subjected to unknown external disturbances. Collision avoidance is also achieved with the proposed control strategy. A robust control algorithm based on the robust integral of the signum of error (RISE) is developed to deal with issues associated with the formation and transformation problem of affine formation under external disturbances. This control algorithm can effectively compensate for the effects of unknown external disturbances and enhance the robustness of the multi-UAV affine formation. The stability of the formation control system is proved via Lyapunov based stability analysis. To address the issue of collision avoidance among multiple UAVs, the space occupied by each UAV is partitioned using a buffered voronoi cell (BVC) method. Then the collision avoidance during both the affine formation and transformation can be achieved. To deal with the possible deadlock problem that may arise during the collision avoidance process, a heuristic algorithm is designed to facilitate the smooth recovery of UAVs from deadlock. Finally, the proposed algorithm's effectiveness is validated through the experimental platform.

**Keywords:** multiple UAVs; affine formation control; distributed control; disturbance rejection control; collision avoidance; experimental verification

## 0 引言

近年来, 无人机技术已进入高速发展阶段, 逐渐应用于民用及军用的各个领域, 如农业种植、环境监测、空中运输及协同侦察等方面<sup>[1-3]</sup>. 为了提升完成任务的效率以及扩大技术的应用范围, 无人机在大部分

任务场景中以集群的形式出现, 与单个无人机相比, 一组同构或异构无人机通过共享信息协同执行任务来提高工作效率. 多无人机编队已是无人机研究领域中的一个重要方向. 多无人机编队执行任务效率高、覆盖任务区域广、容错性能更好且可执行多目

收稿日期: 2023-11-10; 录用日期: 2024-02-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (9174812).

责任编辑: 关新平.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: xbin@tju.edu.cn.

\*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

标任务<sup>[4]</sup>.但在多无人机编队控制问题中,无人机机间干扰、通信时延以及任务环境复杂等问题给自主控制带来了很大挑战<sup>[5-6]</sup>.

目前,针对多无人机编队的研究较多,经典编队控制方法可以分成领导者-跟随者法(leader-follower)<sup>[7]</sup>、基于行为法(behavior-based)<sup>[8]</sup>以及虚拟结构法(virtual rigid body)<sup>[9]</sup>等.文献[10]在马尔科夫切换拓扑条件下,提出改进积分滑模控制律解决虚拟领导者情况下的多无人机编队控制问题,最终通过仿真验证了理论结果的有效性.文献[11]提出了一种基于行为法的协同控制算法实现矩形区域内多无人机监视巡查,并通过仿真验证了该算法对广播消息丢失、定位误差及智能体失效等因素具有鲁棒性,此外在室内平台使用小型四旋翼无人机进行了实验验证.文献[12]在未知不确定性和干扰条件下研究了多固定翼无人机基于虚拟领导结构的编队控制问题,提出了一种全分布式模型参考鲁棒自适应控制方法,能够快速构建复杂情况下的编队,较大程度上减少对无人机模型和全局信息的依赖,并使用基于ROS的仿真平台验证了控制方法的有效性.

仿射编队控制方法不同于现有的一些编队控制方法,当满足仿射定位的相关条件后,仿射编队控制能够实现灵活的编队变换.近年来基于符号拉普拉斯矩阵的仿射编队概念被应用于多智能体控制问题,将拉普拉斯矩阵的交互权重由正实数拓展到实数进行编队控制,可以实现仿射编队控制(affine formation control)<sup>[13]</sup>.由于仿射变换能够表示平移、缩放、斜切、共线及共面等多种组合,且能够保证共线性和比例性,利用仿射变换进行编队队形的变换受到了研究人员的关注.文献[14]提出一种基于领导者-跟随者法的仿射编队机动控制方法.该方法仅需领导者获得环境信息,通过应力矩阵为跟随者设计控制律,可实现编队到达期望位置且能够进行期望的编队机动控制.文献[15]研究了多智能体系统的分布式仿射编队机动控制问题,给出并证明了实现有向图仿射可定位的充要条件,并针对高阶积分器模型提出一种跟踪时变目标编队的控制算法,证明了跟踪误差的全局收敛.

目前,多无人机仿射编队形成控制问题已有相关研究,但多数研究并未考虑编队形成及变换过程中的避碰问题.近年来,一种基于维诺图的区域划分方法被应用在多智能体避障领域,该方法只需获得其他智能体或障碍物的相对位置即可将智能体限制在安全无碰撞的工作区域内<sup>[6]</sup>.文献[16]提出了一种适用

于任意维度上运动的多智能体的分布式防撞撞算法,该算法中机器人在每个时间步计算其缓冲维诺单元(buffered voronoi cell, BVC),并以滚动优化算法规划其在BVC内的路径,该算法只需机器人间的相对位置,可应用于无通信网络的在线实现规划算法.文献[17]提出了一种基于维诺图划分和人工势场法的分布式编队控制与避碰方法.该算法基于维诺划分理论将空间划分为非重叠区域,以此作为任务区域限制每架无人机的运动,从而实现了无人机的避碰.同时,基于人工势场法设计了广义控制律,并通过编队实验验证了所提出编队控制算法的有效性.

在以上研究成果的基础上,本文针对多无人机仿射编队队形生成及变换问题,提出一种非线性鲁棒编队控制算法,实现存在未知外界扰动情况下的多无人机仿射编队飞行.同时,考虑编队队形生成及变换过程中无人机间的碰撞风险,使用缓冲维诺单元实现无人机区域的划分,实现无人机编队的机间避碰,与人工势场类避碰方法相比不存在局部极值问题.将本文提出的仿射编队控制算法应用于室内实验平台,验证算法的有效性及其实际场景下的可行性.本文的主要工作如下:1)结合仿射编队控制方法与分布式控制方法,提出一种自主编队控制策略,可实现编队的灵活变换;2)针对存在外部扰动时仿射编队机动控制问题,设计基于误差函数积分的鲁棒控制方法,有效抑制了机间及外界扰动,并验证编队控制的稳定性;3)多数已有仿射编队控制算法未考虑编队生成及变换过程中可能出现的碰撞问题,本文设计了基于缓冲维诺单元的避碰算法,并提出启发式算法以解决潜在的死锁问题.

## 1 问题描述

### 1.1 图论与应力矩阵

在 $d$ 维空间中,考虑由 $n$ 架无人机组成的多无人机系统.定义 $p = [p_1^T, p_2^T, \dots, p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn}$ ,表示所有无人机的位置向量. $p_i \in \mathbb{R}^d$ 为无人机 $i$ 的位置.多无人机编队交互拓扑图由无向图 $G = (Q, E)$ 描述<sup>[18]</sup>,其中包含顶点集 $Q = \{1, 2, \dots, n\}$ 以及边集 $E \subseteq Q \times Q$ .若边 $(i, j) \in E$ ,则表明第 $i$ 架无人机可以获得第 $j$ 架无人机的信息.第 $i$ 架无人机的邻居集合定义为 $N_i = \{j \in Q, (i, j) \in E\}$ .为了以分布式方法实现编队控制,本文采取领导者-跟随者编队方法,定义编队中前 $n_l$ 架无人机为领导者,其余 $n_f = n - n_l$ 架无人机为跟随者.集合 $Q_l = \{1, 2, \dots, n_l\}$ 以及集合 $Q_f = Q \setminus Q_l$ 分别表示领导者及跟随者的集合.领导者及跟随者的位置分别表示为 $p_l = [p_1^T, p_2^T, \dots, p_{n_l}^T]^T$

及  $p_f = [p_{n_1+1}^T, p_{n_1+2}^T, \dots, p_n^T]^T$ .  $p_i^*$  及  $p_f^*$  分别表示领导者及跟随者的期望位置.

本文中,编队  $(G, p)$  表示无向图第  $i$  个顶点到第  $i$  架无人机位置  $p_i$  的一一映射. 对于编队  $(G, p)$ , 应力矩阵系数  $\{\omega_{ij}\}_{(i,j) \in E}$  是一组标量, 且  $\omega_{ij} = \omega_{ji} \in \mathbb{R}$ . 当  $\omega_{ij} > 0$  时, 表示边  $(i, j)$  上存在吸引力; 当  $\omega_{ij} < 0$  时, 表示边  $(i, j)$  上存在排斥力.  $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为应力矩阵, 其满足

$$[\Omega]_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, (i, j) \notin E; \\ -\omega_{ij}, & i \neq j, (i, j) \in E; \\ \sum_{k \in N_i} \omega_{ik}, & i = j. \end{cases} \quad (1)$$

应力矩阵具有与图拉普拉斯矩阵相似的结构, 不同之处在于, 应力矩阵中边的权重可能为正、负或零, 而拉普拉斯图中边的权重通常为正. 在后文中, 令  $\bar{\Omega} = \Omega \otimes I_d$ , 根据领导者和跟随者将  $\bar{\Omega}$  划分为

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{ll} & \bar{\Omega}_{lf} \\ \bar{\Omega}_{fl} & \bar{\Omega}_{ff} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中:  $\bar{\Omega}_{ff} \in \mathbb{R}^{(dn_f) \times (dn_f)}$ ,  $\bar{\Omega}_{fl} \in \mathbb{R}^{(dn_f) \times (dn_l)}$ .

对于编队  $(G, p)$ , 若应力矩阵系数满足

$$\sum_{j \in N_i} \omega_{ij}(p_j - p_i) = 0, \quad i \in Q, \quad (3)$$

则称之为平衡应力<sup>[19]</sup>, 意味着  $j \in N_i$  施加在  $i$  上的力是平衡的. 式(3)可以用矩阵形式表示为

$$(\Omega \otimes I_d)p = 0. \quad (4)$$

### 1.2 无人机模型

考虑到外部干扰, 四旋翼无人机的动力学模型<sup>[20]</sup>描述为

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v_i, \\ m_i \dot{v}_i = -T_{\tau_i} R_i e_3 + m_i g e_3 + d_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $p_i(t) = [x_i(t), y_i(t), z_i(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  表示无人机位置向量,  $v_i(t) = [v_{ix}(t), v_{iy}(t), v_{iz}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  表示无人机速度向量,  $R_i(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  表示无人机从机体坐标系到惯性坐标系的正交旋转矩阵,  $e_3 = [0, 0, 1]^T$ ,  $T_{\tau_i}(t) \in \mathbb{R}_+$  表示无人机旋翼总升力,  $m_i$  为无人机质量,  $g$  为重力加速度,  $d_i(t) \in \mathbb{R}^3$  为外界扰动. 考虑多无人机编队飞行过程中姿态变化平稳, 可对动力学模型做如下变换. 定义辅助控制信号  $u_i(t) = [u_{ix}(t), u_{iy}(t), u_{iz}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  为

$$u_i = -\frac{T_{\tau_i}}{m_i} R_i e_3 + g e_3. \quad (6)$$

无人机动力学模型可改写为

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = u_i + d_i. \end{cases} \quad (7)$$

**注1** 由于目前仿射编队控制领域的研究主要集中于编队控制算法研究<sup>[14-15]</sup>, 本文忽略了无人机的姿态控制.

**假设1** 未知扰动函数连续可导, 且  $d_i(t) \in L_\infty, \dot{d}_i(t) \in L_\infty, \ddot{d}_i(t) \in L_\infty$ .

### 1.3 仿射编队理论

仿射变换是一种一般的线性变换, 可以实现平移、旋转、缩放、剪切以及它们的组合. 仿射编队机动控制的目标是引导一组智能体跟踪定义如下的时变目标编队.

**定义1** 目标编队的时变形式为<sup>[21]</sup>

$$p^*(t) = [I_n \otimes A(t)]r + 1_n \otimes b(t). \quad (8)$$

其中:  $r = [r_1^T, \dots, r_n^T]^T = [r_l^T, r_f^T]^T \in \mathbb{R}^{dn}$  为标称队形,  $1_n \triangleq [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为单位矩阵,  $A(t)$  及  $b(t)$  为时变矩阵,  $\otimes$  为克罗内克积.

在仿射编队控制中,  $(G, r)$  称为标称编队. 目标编队是标称编队的时变仿射变换. 可以看出, 本文要解决的问题是控制无人机编队跟踪时变目标编队, 使得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $p(t) \rightarrow p^*(t)$ . 为了实现分布式编队控制, 采用领导者-跟随者法, 编队期望信息仅存储于少数领导者中. 本文假设领导者可以得到准确的控制, 位置收敛于目标编队中的期望值. 因此, 控制目标变为控制跟随者收敛至期望编队位置, 即当  $t \rightarrow \infty$  时,  $p_f(t) \rightarrow p_f^*(t)$ .

为了实现控制目标, 引入如下概念. 标称配置的仿射图像定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(r) &= \{p \in \mathbb{R}^{dn} : p = (I_n \otimes A)r + 1_n \otimes b, \\ &A \in \mathbb{R}^{d \times d}, b \in \mathbb{R}^d\} = \\ &\{p = [p_1^T, \dots, p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn} : p_i = Ar_i + b, \\ &A \in \mathbb{R}^{d \times d}, b \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (9)$$

仿射图像是由标称队形  $r$  的所有仿射变换组成的集合. 时变目标编队  $p^*(t)$  始终包含在  $\mathcal{A}(r)$  中. 给定  $d$  维空间中的点集  $\{p\}_{i=1}^n$ , 其仿射空间  $S$  定义为

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i p_i : a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}. \quad (10)$$

给定任何仿射空间, 总是可以将其平移至包含原点以获得线性空间, 得到的线性空间的维数定义为仿射空间的维数. 如果仿射空间的维度是  $d$ , 则点集仿射张成空间  $\mathbb{R}^d$ .

**定义2** 若对于任何  $p = [p_l^T, p_f^T]^T \in \mathcal{A}(r)$ ,  $p_f$  可由  $p_l$  唯一确定, 则编队  $(G, r)$  能够实现仿射定位.

**假设2**<sup>[14]</sup> 对于标称编队  $(G, r)$ , 假设  $\{r_i\}_{i=1}^n$  仿射空间为  $\mathbb{R}^d$ .

**引理1** 根据假设1, 编队  $(G, r)$  实现仿射可定位的充要条件为  $\{r_i\}_{i \in Q_l}$  的仿射空间为  $\mathbb{R}^d$ .

引理1表明, 若在标称编队中选取仿射张成  $d$  维空间的智能体作为编队领导者, 则编队满足仿射可定位. 由于张成  $d$  维空间至少需要  $d + 1$  个点, 领导者最少有  $d + 1$  个.

**假设3**<sup>[14]</sup> 假设标称编队  $(G, r)$ , 有半正定应力矩阵  $\Omega$ , 满足  $\text{rank}(\Omega) = n - d - 1$ .

**引理2** 根据假设1和假设2, 标称编队  $(G, r)$  实现仿射可定位的充要条件为  $\bar{\Omega}_{ff}$  非奇异.

**假设4**<sup>[14]</sup> 假设标称编队  $(G, r)$  可由领导者仿射定位.

**引理3** 如果假设2~假设4成立, 则有<sup>[14]</sup>:

1)  $\bar{\Omega}_{ff}$  正定;

2) 对于任何  $p = [p_l^T, p_f^T]^T \in \mathcal{A}(r)$ ,  $p_f$  可由  $p_l$  唯一确定, 编队  $(G, r)$  能够实现仿射定位.

#### 1.4 缓冲维诺单元

对于  $d$  维空间中  $n$  架无人机, 每架无人机的标准维诺单元(voronoi cell, VC)<sup>[16]</sup> 为

$$\mathcal{V}_i = \{p \in \mathbb{R}^d : \|p - p_i\| \leq \|p - p_j\|, \forall j \neq i\}. \quad (11)$$

式(11)也可写为

$$\mathcal{V}_i = \left\{ p \in \mathbb{R}^d : p_{ij}^T p \leq p_{ij}^T \frac{p_i + p_j}{2}, \forall j \neq i \right\}, \quad (12)$$

其中  $p_{ij} = p_j - p_i$ . 可以看出  $\mathcal{V}_i$  是一组超平面的交集, 这些超平面将点  $i$  与集合中的其他点  $j$  分开, 因此, 可以通过计算每对点之间的分离超平面来获得  $\mathcal{V}_i$ .

**定义3** 安全半径为  $r_s$  的  $n$  架无人机的无碰撞配置指无人机  $i$  与无人机  $j$  间的距离满足

$$\|p_i - p_j\| \geq 2r_s, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j. \quad (13)$$

考虑到安全半径为  $r_s$  的无人机自身大小, 将维诺单元的边缘缩回安全距离  $r_s$ , 获得无人机  $i$  的缓冲维诺单元如下:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}}_i = \\ \left\{ p \in \mathbb{R}^d : p_{ij}^T p \leq p_{ij}^T \frac{p_i + p_j}{2} - r_s \|p_{ij}\|, \forall j \neq i \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

考虑无人机动力学模型, 当其以一定加速度移动到BVC的边界附近时, 它可能无法继续停留在其BVC内. 因此, 为了提高安全性, 引入一个额外的安全停止缓冲区, 使无人机有足够的空间减速. 定义

$$\chi_i = \begin{cases} \frac{\|p_{ij}^T v_i\|^2}{2\text{acc}_{i,\max}}, & p_{ij}^T v_i > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

其中  $\text{acc}_{i,\max}$  为无人机  $i$  的最大加速度.

该安全停止缓冲区能够使得无人机在触碰原始BVC边界前减速. 因此, 带有安全停止缓冲的更新BVC可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}}_i = \\ \left\{ p \in \mathbb{R}^d : p_{ij}^T p \leq p_{ij}^T \frac{p_i + p_j}{2} - r_s \|p_{ij}\| - \chi_i, \forall j \neq i \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

**引理4** 如果安全半径为  $r_s$  的  $n$  架无人机处于无碰撞配置下, 则对于  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 都有<sup>[16]</sup>:

1)  $\bar{\mathcal{V}}_i \neq \emptyset$ ;

2)  $\bar{\mathcal{V}}_i \subset \mathcal{V}_i$ ;

3)  $\forall p'_j \in \bar{\mathcal{V}}_j, i \neq j, \|p'_i - p'_j\| \geq 2r_s$ ;

4)  $\bar{\mathcal{V}}_i \cap \bar{\mathcal{V}}_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

## 2 控制算法设计

### 2.1 编队误差系统

本文通过控制领导者位置来实现编队仿射变换, 假设其能够收敛至编队期望位置, 即对任意  $t$  时刻,  $p_l(t) = p_l^*(t)$ . 定义跟随者跟踪误差  $\delta_{p_f} = [\delta_{n_i+1}^T, \dots, \delta_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn_f}$  为

$$\delta_{p_f}(t) = p_f(t) - p_f^*(t) = p_f(t) + (\bar{\Omega}_{ff}^{-1} \bar{\Omega}_{fl}) p_l^*(t). \quad (17)$$

因此, 本文控制目标是为跟随者设计控制律, 使得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\delta_{p_f}(t) \rightarrow 0$ .

定义跟踪误差向量  $\varepsilon_{p_f} = [\varepsilon_{n_i+1}^T, \dots, \varepsilon_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn_f}$  为

$$\varepsilon_{p_f} = \bar{\Omega}_{ff} p_f + \bar{\Omega}_{fl} p_l^*. \quad (18)$$

从上述定义可以看出,  $\delta_{p_f}(t) = \bar{\Omega}_{ff}^{-1} \varepsilon_{p_f}(t)$ , 可见当  $\varepsilon_{p_f}(t) \rightarrow 0$  时,  $\delta_{p_f}(t) \rightarrow 0$ .

**假设5** 无人机编队领导者位置连续且满足  $p_l(t)$ 、 $\dot{p}_l(t)$ 、 $\ddot{p}_l(t)$  及  $p_l^{(4)}(t) \in L_\infty$ <sup>[22]</sup>.

无人机  $i$  的编队跟踪误差为

$$\varepsilon_{p_f i}(t) = \sum_{j \in N_i} \omega_{ij} (p_i - p_j). \quad (19)$$

定义速度误差向量  $\varepsilon_{v_f} = [\dot{\varepsilon}_{n_i+1}^T, \dots, \dot{\varepsilon}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn_f}$ , 控制量  $U = [u_{n_i+1}^T, \dots, u_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn_f}$ , 可得编队误差方程如下所示:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{p_f} = \varepsilon_{p_v}, \\ \dot{\varepsilon}_{p_v} = \bar{\Omega}_{ff}(U + D) + \bar{\Omega}_{fl} \ddot{p}_l^*. \end{cases} \quad (20)$$

定义误差向量  $r_1(t) \in \mathbb{R}^{dn_f}$ 、 $r_2(t) \in \mathbb{R}^{dn_f}$  及

$r_3(t) \in \mathbb{R}^{dn_f}$  如下:

$$\begin{cases} r_1 = \varepsilon_{p_f}, \\ r_2 = \dot{r}_1 + \lambda r_1, \\ r_3 = \dot{r}_2 + \alpha r_2, \end{cases} \quad (21)$$

其中  $\lambda \in \mathbb{R}^{dn_f \times dn_f}$  和  $\alpha \in \mathbb{R}^{dn_f \times dn_f}$  均为对称正定增益矩阵.

对  $r_3(t)$  关于时间求导得

$$\dot{r}_3 = \ddot{r}_1 + \lambda \dot{r}_1 + \alpha \dot{r}_2. \quad (22)$$

代入编队误差方程,式(22)可写为如下形式:

$$\dot{r}_3 = -r_2 + \bar{\Omega}_{ff} \dot{U} + N, \quad (23)$$

其中辅助函数向量  $N(t) \in \mathbb{R}^{dn_f}$  为

$$N = \bar{\Omega}_{ff} \dot{D} + \bar{\Omega}_{fl} \dot{P}_l^* + (\lambda + \alpha) r_3 - (\lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha^2 - I_{3n}) r_2 + \lambda^3 r_1. \quad (24)$$

引入函数向量  $N_d(t)$  为

$$N_d = \bar{\Omega}_{ff} \dot{D} + \bar{\Omega}_{fl} \dot{P}_l^{**}. \quad (25)$$

令  $\tilde{N} = N - N_d$ , 根据参考文献[22]可得其满足

$$\|\tilde{N}\| \leq \rho(\|r\|) \|r\|. \quad (26)$$

其中:  $\rho(\|\cdot\|)$  为可逆非递减函数,  $r = [r_1^T, r_2^T, r_3^T]^T \in \mathbb{R}^{9n_f}$ .

### 2.2 编队控制算法

设计辅助控制量

$$u_i = -(k_{si} + I_3)(\dot{\varepsilon}_{p_{f_i}} + \lambda_i \varepsilon_{p_{f_i}}) + (k_{si} + I_3)(\dot{\varepsilon}_{p_{f_i}}(0) + \lambda_i \varepsilon_{p_{f_i}}(0)) - \int_0^t [(k_{si} + I_3)\alpha_i(\dot{\varepsilon}_{p_{f_i}}(\tau) + \lambda_i \varepsilon_{p_{f_i}}(\tau)) + \beta_i \text{sgn}(\dot{\varepsilon}_{p_{f_i}}(\tau) + \lambda_i \varepsilon_{p_{f_i}}(\tau))] d\tau. \quad (27)$$

其中:  $k_{si} = \text{diag}(k_{s_{ix}}, k_{s_{iy}}, k_{s_{iz}})$ ,  $\lambda_i = \text{diag}(\lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \lambda_{iz})$ ,  $\alpha_i = \text{diag}(\alpha_{ix}, \alpha_{iy}, \alpha_{iz})$ ,  $\beta_i = \text{diag}(\beta_{ix}, \beta_{iy}, \beta_{iz})$ ,  $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\text{sgn}(\cdot)$  为标准符号函数.

将式(27)代入  $r_3(t)$  的动态误差方程, 可得

$$\dot{r}_3 = \tilde{N} + N_d - r_2 - \bar{\Omega}_{ff}(k_s + I_{3n_f})\alpha r_2 - \bar{\Omega}_{ff}(k_s + I_{3n_f})\dot{r}_2 - \bar{\Omega}_{ff}\beta \text{Sgn}(r_2), \quad (28)$$

其中  $K_s = \text{diag}(k_{s1}, k_{s2}, \dots, k_{sn_f}) \in \mathbb{R}^{3n_f \times 3n_f}$ . 对于向量  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Sgn}(a) = [\text{sgn}(a_1), \text{sgn}(a_2), \dots, \text{sgn}(a_n)]^T \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.3 机间避碰算法

在无人机飞行过程中, 通过无人机实时位置构建其BVC. 当无人机处于其BVC中时, 按照编队控制算法飞行, 此时无人机处于默认模式. 当无人机离开自身BVC时, 使其停止, 此时将无人机切换至死锁

模式. 本文提出一种将控制量旋转一定角度从而驱使无人机走出死锁的启发式算法. 当无人机继续运动, 将其切换回默认模式, 直至编队控制任务完成. 由BVC性质可知, 只要无人机保持在BVC内部, 则不会发生碰撞, 由此可见该算法能够保证碰撞避免.

当无人机  $i$  进入死锁模式后, 首先寻找其邻域内处于死锁模式的其他无人机  $n_1, \dots, n_k$ . 领域内无人机  $j$  与无人机  $i$  间距离需满足

$$d_{ij} < d, j \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (29)$$

其中:  $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$  为两架无人机间的距离;  $d$  为距离阈值, 通过调整其大小可以控制无人机  $i$  邻域大小. 依次计算邻域内无人机当前控制量  $u_j$  与  $u_i$  的差向量  $u_{ji} = u_i - u_j$ , 然后可得  $u_{ji}$  与  $u_i$  之间的夹角为  $\theta_{ji}$ , 夹角定义如图1所示.

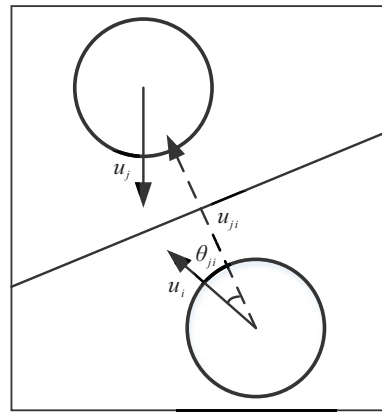


图1 夹角示意图

最终控制量旋转角度可由下式定义:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \min(\theta_{1i}, \dots, \theta_{ki}). \quad (30)$$

死锁模式下无人机  $i$  的控制量计算如下:

$$u_{i, \text{avoid}} = R_Z(\varphi)\alpha u_i. \quad (31)$$

其中:  $\alpha$  为正常数,  $R_Z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  为绕  $z$

轴旋转的旋转矩阵.

本文提出的仿射编队控制算法的算法流程如算法1所示.

#### 算法1 轨迹关联修正网络算法流程.

- 1) while true do
- 2) if 编队形成 then
- 3) break;
- 4) end
- 5) else
- 6) foreach 无人机  $i$  do
- 7) 计算无人机  $i$  及其邻域内无人机的BVC;

- 8) 根据无人机编队控制算法计算  $u_i$ ;
- 9) 计算无人机  $i$  下一时刻的位置  $p_{next}$ ;
- 10) if  $p_{next}$  in BVC then
- 11) 保留原控制量  $u_i$ ;
- 12) end
- 13) else
- 14) 无人机  $i$  进入 Deadlock 模式;
- 15) 根据启发式算法旋转  $u_i$  得到  $u_{i,avoid}$ ;
- 16) end
- 17) 更新无人机  $i$  当前位置;
- 18) end
- 19) end
- 20) end

### 3 稳定性分析

由上述算法描述可以看出,只要无人机恢复运动状态,则无人机会从死锁模式切换为默认模式,因此只需证明默认模式下的控制算法可使编队稳定.

为便于稳定性分析,引入引理如下,该引理证明详见文献[22].

**引理5** 定义辅助函数  $L(t) \in \mathbb{R}$ , 有

$$L = r_3^T [N_d - \bar{\Omega}_{ff} \beta \text{Sgn}(r_2)], \quad (32)$$

其中  $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_f})$ . 令  $k \in \{x, y, z\}$ , 若选择合适的增益使其满足

$$\beta_{ik} > \frac{\|\bar{\Omega}_{ff}\|^{-1} \|N_d\|_{\mathcal{L}_\infty} + \frac{1}{\alpha_{ik}} \|\bar{\Omega}_{ff}\|^{-1} \|\dot{N}_d\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\alpha_{ik}}, \quad (33)$$

则下式成立:

$$\int_0^\tau L(\tau) d\tau < \zeta_b. \quad (34)$$

其中正常数  $\zeta_b \in R_+$  定义为

$$\zeta_b = \|\bar{\Omega}_{ff}\| \|\beta\| \|r_2(0)\| - r_2(0) N_d(0). \quad (35)$$

**引理6** 考虑系统  $\dot{\xi} = f(\xi, t)$ , 其中  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 该系统存在实数解, 定义区域

$$D = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \|\xi\| < \iota\}, \quad \iota \in \mathbb{R}^+. \quad (36)$$

存在  $V: M \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  连续可微, 且满足

$$\begin{cases} W_1(\xi) \leq V(\xi, t) \leq W_2(\xi), \\ \dot{V}(\xi, t) \leq -W(\xi). \end{cases} \quad (37)$$

其中:  $\forall t \geq 0, \forall \xi \in M, W_1(\xi)$  和  $W_2(\xi)$  为连续正定函数,  $W(\xi)$  为一致连续半正定函数. 若式(37)满足, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\xi) = 0. \quad (38)$$

初始条件所在区域为  $S = \{\xi \in M \mid W_2(\xi) \leq \varrho\}, \varrho \leq$

$\min_{\|\xi\|=\iota} W_1(\xi)$ , 其中  $\varrho \in \mathbb{R}^+$ .

**定理1** 对于无人机系统, 若控制增益  $\alpha_{ik} > 1/2, \lambda_{ik} > 1/2, \beta_{ik}$  为正常数, 且  $k_{si}$  足够大, 则控制律能使编队跟随者误差向量实现半全局渐近收敛.

**证明** 构造辅助函数  $P(t) \in \mathbb{R}$ , 有

$$P = \zeta_b - \int_0^t L(\tau) d\tau \geq 0. \quad (39)$$

构造向量  $\gamma = [r_1^T, r_2^T, r_3^T, \sqrt{P}]^T \in \mathbb{R}^{9n_f+1}$ , 选取 Lyapunov 候选函数

$$V = \frac{1}{2} r_1^T r_1 + \frac{1}{2} r_2^T r_2 + \frac{1}{2} r_3^T r_3 + P, \quad (40)$$

则  $\mu_1 \|\gamma\|^2 < V < \mu_2 \|\gamma\|^2$ . 其中:  $\mu_1 = 1/2, \mu_2 = 1$ . 对  $V(t)$  求关于时间的一阶导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -r_1^T \lambda r_1 - r_2^T \alpha r_2 + r_1^T r_2 - r_3^T \bar{\Omega}_{ff} r_3 - \\ & r_3^T \bar{\Omega}_{ff} K_s r_3 + r_3^T N - r_3^T \bar{\Omega}_{ff} \beta \text{Sgn}(r_2) - L. \end{aligned} \quad (41)$$

利用  $r_1^T r_2 \leq \frac{1}{2}(r_1^T r_1 + r_2^T r_2)$ , 对式(41)进行缩放得其上界为

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left(\lambda^* - \frac{1}{2}\right) r_1^T r_1 - \left(\alpha^* - \frac{1}{2}\right) r_2^T r_2 - \\ & r_3^T \bar{\Omega}_{ff} r_3 - r_3^T \bar{\Omega}_{ff} K_s r_3 + r_3^T \tilde{N} + \\ & r_3^T [N_d - \bar{\Omega}_{ff} \beta \text{Sgn}(r_2)] - L. \end{aligned} \quad (42)$$

其中:  $k \in \{x, y, z\}, \lambda^* = \min(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots, \lambda_{n_f k}), \alpha^* = \min(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{n_f k})$ .

利用不等式

$$\begin{cases} r_3^T \tilde{N} \leq \|r_3\| \rho(\|r\|) \|r\|, \\ r_3^T \bar{\Omega}_{ff} K_s r_3 \geq \sigma K_s^* \|r_3\|^2, \end{cases} \quad (43)$$

可得  $\dot{V}(t)$  上界为

$$\dot{V} \leq -\varpi \|r\|^2 + \|r_3\| \rho(\|r\|) \|r\| - \sigma K_s^* \|r_3\|^2. \quad (44)$$

利用  $\rho \|r_3\| \|r\| \leq \sigma K_s^* \|r_3\|^2 + \frac{\rho^2}{4\sigma K_s^*} \|r\|^2$ , 式(44)可整理为

$$\dot{V} \leq -\left(\varpi - \frac{\rho^2(\|r\|)}{4\sigma K_s^*}\right) \|r\|^2. \quad (45)$$

其中:  $\sigma$  是  $\bar{\Omega}_{ff}$  的最小特征值,  $\varpi = \min(\sigma, \lambda^* - 1/2, \alpha^* - 1/2), K_s^* = \min(K_{s1k}, K_{s2k}, \dots, K_{sn_f k})$ . 当满足  $K_s^* > \frac{1}{4\varpi\sigma} \rho^2(\|r(t)\|)$  即  $\|r(t)\| < 2\rho^{-1} \sqrt{\varpi\sigma K_s^*}$  时, 可得

$$\dot{V} \leq -\eta \|r\|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^+. \quad (46)$$

根据引理6可得  $V(t)$  的上下界为

$$\begin{cases} W_1(\gamma) = \mu_1 \|\gamma\|^2, \\ W_2(\gamma) = \mu_2 \|\gamma\|^2, \end{cases} \quad (47)$$

且 $\dot{V}(t)$ 的上界为

$$W(\gamma) = \eta \|\gamma\|^2. \quad (48)$$

根据不等式(45)和(46)定义区域

$$D = \{\gamma \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \|\gamma\| < 2\rho^{-1}\sqrt{\varpi K_s^*}\}. \quad (49)$$

由式(40)可知 $V(t) \in \mathcal{L}_\infty$ ,  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ 及 $r_3(t) \in \mathcal{L}_\infty$ ,  
由式(27)可知 $u_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$ .

定义区域

$S =$

$$\{\gamma \in D \mid \|W_2(\gamma)\| \leq \mu_1(\rho^{-1}(2\sqrt{\lambda^* \sigma K_s^*}))^2\}. \quad (50)$$

由引理6可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) = 0, \gamma(0) \in S. \quad (51)$$

可得下式成立:

$$W_2(\gamma(0)) < \mu_1(\rho^{-1}(2\sqrt{\lambda^* \sigma K_s^*}))^2. \quad (52)$$

整理可得

$$\|\gamma(0)\| \leq \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\rho^{-1}(2\sqrt{\lambda^* \sigma K_s^*})}{\|\gamma(0)\|}}. \quad (53)$$

进一步整理可得

$$K_s^* \geq \frac{1}{4\lambda^* \sigma} \rho^2 \left( \sqrt{\frac{\mu_2 \|\gamma(0)\|}{\mu_1}} \|\gamma(0)\| \right). \quad (54)$$

可以看出,通过增大 $K_s^*$ 可使吸引域(50)足够大足以包含任何初始条件,得到了半全局渐近收敛的结论. □

### 4 实验验证

为了验证编队控制算法在实际应用场景中的有效性,本文使用四旋翼无人机室内实验平台进行编队变换实验,室内飞行场地长5 m,宽3 m,高2.5 m.如图2所示,由于室内飞行场地大小的限制,实验平台由4架轴距为0.25 m的四旋翼无人机组成,4架无人机仿射编队拓扑结构及应力系数如图3所示,其中3号无人飞机为跟随者无人机.

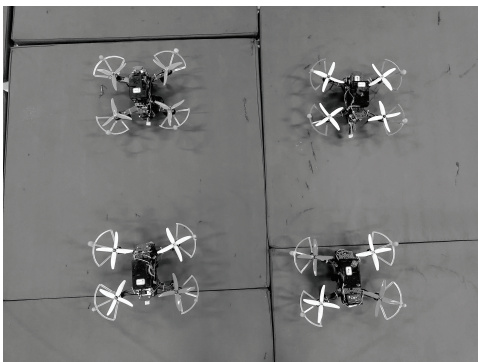


图2 实验平台

每架无人机均搭载嵌入式计算板与飞行控制器,飞行控制算法实时运行在机载计算板上,无人机间通

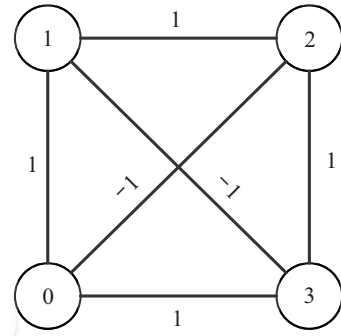


图3 4架无人机标称编队拓扑及应力系数

过机载WIFI模块进行组网,与邻机进行信息交换.在多无人机仿射编队变换实验中,设置无人机安全半径 $r_s$ 为0.5 m.定义无人机标称编队的配置矩阵 $P(r) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 为

$$P(r) = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7 & -1.5 \\ -1.7 & 1.5 \\ 1.3 & 1.5 \\ 1.3 & -1.5 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

在4架无人机距离较近时,四旋翼无人机旋翼产生的气流会对其他邻近无人机造成干扰,同时,实验中无人机飞行高度设置为1 m,飞行时会受到部分地面效应的影响.上述因素构成了多无人机仿射编队变换中的扰动,可以有效验证编队控制算法的抗扰性能.图4直观展示了多无人机仿射编队变换过程,编

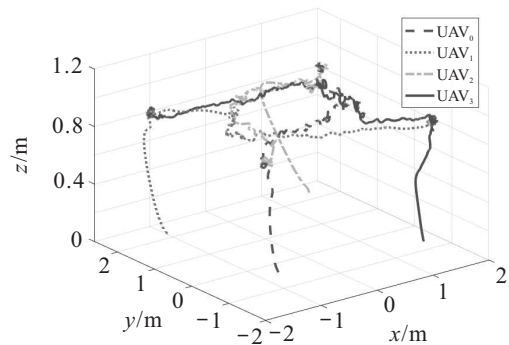


图4 无人机编队空间运动轨迹

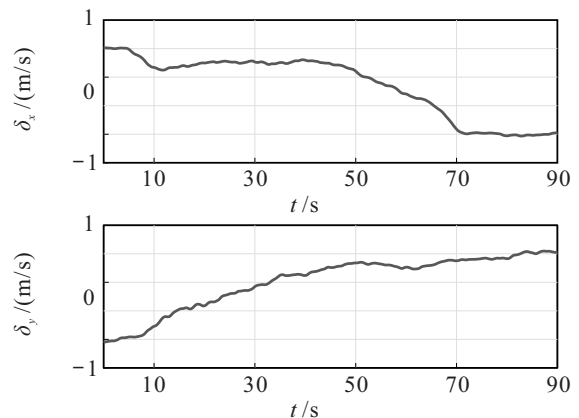


图5 编队跟踪误差

队变换过程中3号无人机的编队跟踪误差如图5所示,速度量及控制量如图6和图7所示,无人机机间距离如图8所示.可以看出,机间距离始终大于1 m,即无人机始终处于无碰撞配置下,最终编队跟踪误差收敛至零附近.

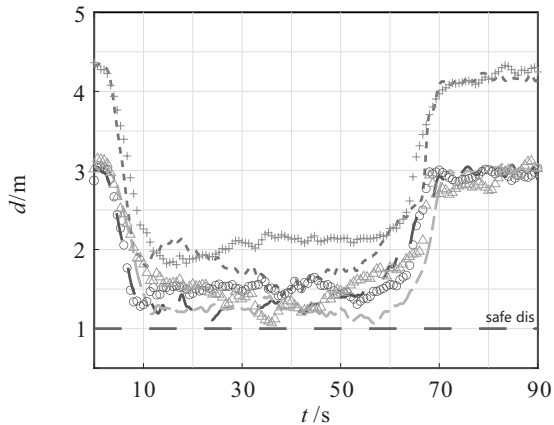


图6 无人机速度

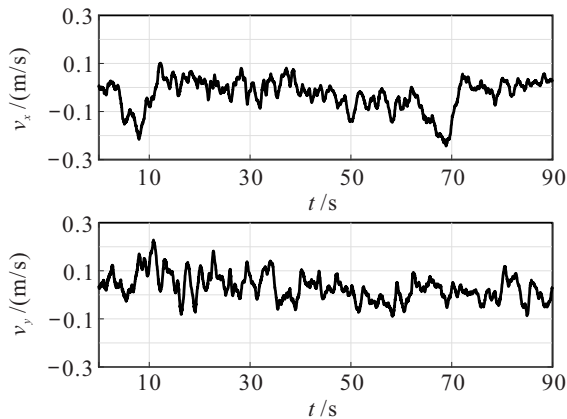


图7 无人机控制量

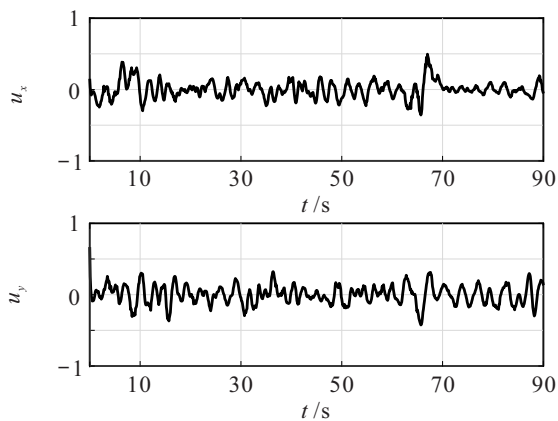


图8 机间距离

## 5 结论

本文针对存在扰动情况下的多无人机仿射编队控制问题,利用领导者-跟随者结构,设计了基于误差函数积分的鲁棒编队控制律,实现了仿射编队的分布式控制,并基于Lyapunov方法对编队闭环系统稳定性进行了证明.同时,针对编队变换过程中可能发生

的机间碰撞问题,设计了基于缓冲维诺单元的机间避碰算法,并设计了启发式算法解决死锁问题.最后,利用室内飞行实验平台进行了算法有效性的验证,实验结果表明本文设计的控制律及避碰算法能够使多无人机系统在无碰撞情况下实现仿射编队变换.

在未来的工作中,考虑加入无人机的姿态控制,将算法更好地应用于无人机编队控制.同时,考虑在实验环境中添加障碍物,验证算法在有障碍场景下的有效性,实现无人机编队的自主避障飞行控制.

## 参考文献(References)

- [1] 周鹤翔, 徐扬, 罗德林. 针对动态目标的多无人机协同组合差分进化搜索方法[J]. 控制与决策, 2023, 38(11): 3128-3136.  
(Zhou H X, Xu Y, Luo D L. A composite differential evolution algorithm for multi-UAV cooperative dynamic target search[J]. Control and Decision, 2023, 38(11): 3128-3136.)
- [2] 王巍, 彭力, 赵继军, 等. 基于旋翼无人机近地面空间应急物联网节点动态协同部署[J]. 自动化学报, 2021, 47(8): 2002-2015.  
(Wang W, Peng L, Zhao J J, et al. Dynamic cooperative deployment of emergency internet of things near ground space based on drone[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(8): 2002-2015.)
- [3] Zhao J Q, Zhang X H, Yan J W, et al. A wheat spike detection method in UAV images based on improved YOLOv5[J]. Remote Sensing, 2021, 13(16): 3095.
- [4] Muslimov T Z, Munasypov R A. Consensus-based cooperative control of parallel fixed-wing UAV formations via adaptive backstepping[J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 109: 106416.
- [5] 鲜斌, 许鸣镝, 王岭. 分布式无人机队列控制与动态障碍规避设计[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2226-2234.  
(Xian B, Xu M D, Wang L. Distributed unmanned aerial vehicle platoon control with dynamic obstacle avoidance[J]. Control and Decision, 2022, 37(9): 2226-2234.)
- [6] Kartal Y, Subbarao K, Gans N R, et al. Distributed backstepping based control of multiple UAV formation flight subject to time delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(12): 1628-1638.
- [7] Liang Y Q, Dong Q, Zhao Y J. Adaptive leader-follower formation control for swarms of unmanned aerial vehicles with motion constraints and unknown disturbances[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(11): 2972-2988.
- [8] Yao P, Wang H L, Ji H X. Multi-UAVs tracking target in urban environment by model predictive control and

- improved grey wolf optimizer[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2016, 55: 131-143.
- [9] Rosa V S M, Belo E M. Virtual structure formation flight control based on nonlinear MPC[C]. 2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems. Athens, 2021: 1383-1390.
- [10] Zhou Z, Wang H B, Wang Y L, et al. Distributed formation control for multiple quadrotor UAVs under Markovian switching topologies with partially unknown transition rates[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(11): 5706-5728.
- [11] Garcia-Aunon P, Del Cerro J, Barrientos A. Behavior-based control for an aerial robotic swarm in surveillance missions[J]. *Sensors*, 2019, 19(20): 4584.
- [12] Zhi Y R, Liu L, Guan B, et al. Distributed robust adaptive formation control of fixed-wing UAVs with unknown uncertainties and disturbances[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2022, 126: 107600.
- [13] Lin Z Y, Chen Z Y, Fu M Y. A linear control approach to distributed multi-agent formations in d-dimensional space[C]. The 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Firenze, 2013: 6049-6054.
- [14] Zhao S. Affine formation maneuver control of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(12): 4140-4155.
- [15] Xu Y, Zhao S Y, Luo D, et al. Affine formation maneuver control of high-order multi-agent systems over directed networks[J]. *Automatica*, 2020, 118: 109004.
- [16] Zhou D J, Wang Z J, Bandyopadhyay S, et al. Fast, on-line collision avoidance for dynamic vehicles using buffered voronoi cells[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2017, 2(2): 1047-1054.
- [17] Hu J W, Wang M, Zhao C H, et al. Formation control and collision avoidance for multi-UAV systems based on voronoi partition[J]. *Science China Technological Sciences*, 2020, 63(1): 65-72.
- [18] 马鸣宇, 董朝阳, 马思迁, 等. 基于SO(3)的多四旋翼无人机编队协同控制[J]. *控制理论与应用*, 2018, 35(9): 1229-1238.  
(Ma M Y, Dong C Y, Ma S Q, et al. Coordinated control of multiple quadrotors formation on SO(3)[J]. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 1229-1238.)
- [19] Connelly R. Generic global rigidity[J]. *Discrete & Computational Geometry*, 2005, 33(4): 549-563.
- [20] Rojo-Rodriguez E G, Ollervides E J, Rodriguez J G, et al. Implementation of a super twisting controller for distributed formation flight of multi-agent systems based on consensus algorithms[C]. 2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Miami, 2017: 1101-1107.
- [21] Lin Z Y, Wang L L, Chen Z Y, et al. Necessary and sufficient graphical conditions for affine formation control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(10): 2877-2891.
- [22] Xian B, Dawson D, Queiroz M, et al. A continuous asymptotic tracking control strategy for uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1206-1211.

### 作者简介

鲜斌(1975—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统控制、无人机系统, E-mail: xbin@tju.edu.cn;

刘佳妮(1999—), 女, 硕士生, 主要研究方向为多无人机编队控制, E-mail: ljn@tju.edu.cn;

姜鹏志(1980—), 男, 博士生, 主要研究方向为无人机集群系统控制, E-mail: jiangpz@tju.edu.cn.