

控制与决策

Control and Decision

高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法

李炳毅, 贾祥, 张鑫航, 李博文

引用本文:

李炳毅, 贾祥, 张鑫航, 等. 高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(12): 4160-4170.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0046>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于池计算的宽度学习系统

A broad learning system based on reservoir computing

控制与决策. 2021, 36(9): 2203-2210 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1729>

一种基于节点嵌入表示学习的社区搜索算法

Community search algorithm based on node embedding representation learning

控制与决策. 2021, 36(8): 1970-1976 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1439>

输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

控制与决策. 2021, 36(6): 1435-1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

基于广义罚函数可行性准则的DE算法对不确定数据的处理

Application of improved DE algorithm based on generalized penalty function feasibility criteria in uncertain data processing

控制与决策. 2021, 36(2): 498-504 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0728>

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering

控制与决策. 2021, 36(12): 2946-2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法

李炳毅¹, 贾祥^{1†}, 张鑫航², 李博文³

(1. 国防科技大学 系统工程学院, 长沙 410073; 2. 国防科技大学 理学院, 长沙 410073;
3. 宇航动力学国家重点实验室, 西安 710043)

摘要: 在系统的结构可靠性分析中, 针对主动学习克里金 (active learning Kriging, AK) 方法中学习函数涵盖信息不全面、终止准则过于保守, 导致在高维因子系统的求解中加点过多带来高昂成本、效率较低的问题, 提出一种高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法. 首先, 基于初始样本构建 Kriging 模型, 基于一种新的学习函数寻点并更新模型, 该函数能够同时考虑极限状态面附近、方差所度量的不确定性大小以及候选点本身的概率密度情况, 使得增加的学习点更具代表性; 然后, 使用预测值的最大相对误差作为加点终止准则; 接着, 估计系统的失效概率; 最后, 在 3 个数值函数算例验证的基础上, 针对一个 8 维曲柄滑块机械结构中连杆的失稳问题进行研究. 实验结果表明: 与已有常见的学习函数相比, 所提出方法在保证预测精度的条件下, 减少了加点数量, 能够实现准确、高效的可靠性分析.

关键词: 可靠性分析; 主动学习克里金; 学习函数; 终止准则; 失效概率

中图分类号: TB114.3

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0046

引用格式: 李炳毅, 贾祥, 张鑫航, 等. 高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法[J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 4160-4170.

Active learning analysis method for structural reliability of systems with high dimensional performance factors

LI Bing-yi¹, JIA Xiang^{1†}, ZHANG Xin-hang², LI Bo-wen³

(1. College of Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 3. State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an 710043, China)

Abstract: In the structural reliability analysis of the system, the learning function in the active learning Kriging (AK) method does not cover comprehensive information and the termination criterion is too conservative, resulting in too many points added in the solution process of the high-dimensional factor system. To solve the problems of high cost and low efficiency, an active learning analysis method for the structural reliability of systems with high-dimensional performance factors is proposed. First, the Kriging model is constructed based on the initial samples, and a new learning function is proposed, which considers the uncertainty measured near the limit state surface, the variance, and the probability density of the candidate points themselves, making the added learning points more representative and updating the model. Then, the maximum relative error of the predicted value is used as the termination criterion, and the failure probability of the system is estimated. Finally, based on the verification of three numerical function examples, the proposed method is applied in an instability problem of the connecting rod in an 8-dimensional crank slider mechanical structure. The experimental results show that the proposed method reduces the number of addition points while ensuring the prediction accuracy, and can achieve accurate and efficient reliability analysis compared with the typical learning functions.

Keywords: reliability analysis; active learning Kriging; learning function; termination criterion; failure probability

0 引言

受物理特性、环境载荷等不确定因素的影响, 系统的使用可能超出额定范围, 进而失去功能完整性.

因此, 开展系统的结构可靠性分析十分重要. 失效概率作为系统的固有属性, 是开展结构可靠性分析的通用定量指标, 其指的是规定条件下和规定时间内丧失

收稿日期: 2024-01-09; 录用日期: 2024-04-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(72271238, 71801219); 湖南省自然科学基金项目(2021JJ20050); 国防科技大学研究生科研创新项目(XJXC2023055).

责任编辑: 李少远.

[†]通讯作者. E-mail: jjxiang09@sina.cn.

特定功能的概率^[1-2]. 通过系统的性能函数 $G(\mathbf{x})$ 可知失效概率为

$$P_f = P\{G(\mathbf{x}) \leq 0\} = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

其中: \mathbf{x} 为结构尺寸、材料特性、环境载荷等性能因子; $f(\mathbf{x})$ 为其联合概率密度函数 (probability density function, PDF); $G(\mathbf{x})$ 值为正的因子所在区域为安全域, $G(\mathbf{x})$ 值为非正的因子所在区域为失效域, 常引入二元指标函数 $I(\mathbf{x})$ 进行区分, 即

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & G(\mathbf{x}) > 0; \\ 0, & G(\mathbf{x}) \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

性能函数值趋近于 0 的连续曲面称为极限状态面 (limit state surface, LSS), 定义了一种临界的极限状态. 当超过这个临界状态时, 系统不再满足特定功能, 即系统失效. 显然, 估计失效概率的关键在于 LSS 附近的性能响应估计值. 实际工程中, 性能因子与系统性能响应间的关系复杂, 难以直接根据式 (1) 求得 P_f 的解析式, 因此, 常用蒙特卡洛仿真方法 (Monte Carlo simulation, MCS) 随机采样得到失效概率的估计值, 即

$$P_f^{MCS} = \int_{R^n} I(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{N_{MCS}} \sum_{i=1}^{N_{MCS}} I(\mathbf{x}_i). \quad (3)$$

其中: \mathbf{x} 为随机的采样点, $I(\mathbf{x})$ 是通过有限元模拟来获取系统性能真值 $G(\mathbf{x})$ 再判断得到的, N_{MCS} 为 MCS 的样本数. MCS 往往能够得到精确的失效概率估计值, 但是需要生成尽可能覆盖所有因子组合的大量样本点, 易带来高昂成本和时间开销. 进而有改进的采样方法被提出, 如重要性抽样^[3]、子集采样^[4]和线采样^[5]等, 减少了有限元的调用次数, 但是针对极小失效概率, 高维因子的系统失效概率的求解效率依然不高.

结构可靠性分析中, 如何减少高昂有限元的调用, 实现精确、高效的失效概率估计, 一直备受关注. 代理模型通过建立有限个样本和性能真值的“输入-输出”的“黑箱”, 进而对任意采样点实施预测, 以代替计算成本高昂的真实模型, 在解决结构可靠性问题中非常有效. 常见的代理模型有响应面^[6]、多项式回归^[7]、支持向量机^[8-9]、径向基函数^[10]以及克里金 (Kriging)^[11-12]等, 其中应用最广的为 Kriging. 然而, 仅靠少量初始实验设计 (design of experiment, DoE) 样本拟合的 Kriging 模型并不能很好地兼顾到整个 LSS, 微小的差异可能带来式 (2) 中 $I(\mathbf{x})$ 的误判, 最终导致失效概率估计有大的偏差. 因此, 有研究引入与外界环境进行交互从而提升对系统、模型等认知的

主动学习 (active learning)^[13-14]方法来对 Kriging 模型进行修正, 主动学习的基本框架如图 1 所示. 具体地, 在初始 DoE 构建 Kriging 的基础上, 通过某种学习策略自适应采样, 增加代表性的样本 (即学习点) 来更新 Kriging 模型, 实现更精确的估计, 即主动学习克里金.

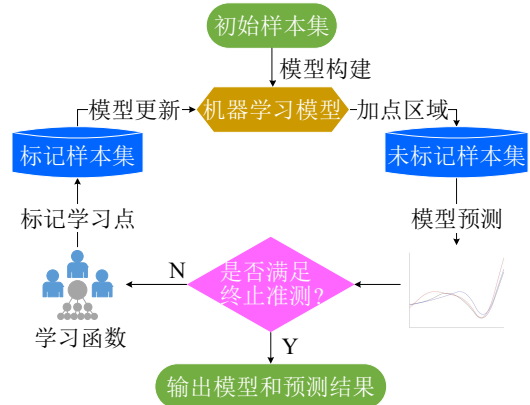


图 1 主动学习基本框架

关于 AK 的研究, 主要包括样本候选池的确定、寻点依据的学习函数和停止加点的终止准则等方面. Jones 等^[15] 在高效全局优化 (efficient global optimization, EGO) 算法中引入了期望改进的 EI (expected improvement) 函数, 对全局最小值附近区域进行搜索. Bichon 等^[16] 在高效全局可靠性分析算法中, 基于 EI 提出了期望可行性函数 (expected feasibility function, EFF), 衡量了某一点在多大程度上可以满足约束 $G(\mathbf{x}) = 0$, 所寻学习点趋近于 LSS, 但是二者每次的自适应采样均是在整个样本空间内优化求解进行的, 处理高维因子系统时, 计算效率有限. 进一步地, Echard 等^[17] 提出了 AK-MCS 算法和基于判错概率的 U 函数, 通过给定的有限候选样本池代替 EGRA 中的全局优化求解, 显著提高了寻点效率. Song 等^[18] 对常用的学习函数进行了梳理, 常见的有基于信息熵的 H 函数^[19]、预测符号不确定性 (即期望风险) 的 ERF (excepted risk function) 函数^[20]、结合折叠正态分布的 REIF (reliability-based EI function) 函数^[21] 和 FNEIF (folded Normal based EI function) 函数^[22]、Bootstrap 方法改进 Kriging 方差来构造的 BU (Bootstrap-U) 学习函数^[23] 等, 这些学习函数的构建主要考虑 Kriging 对性能响应的预测值和方差两个方面, 由于没有考虑候选点的分布情况, 易导致过量加点, 即没有将分布密度大小不同的区域对可靠性估计的贡献加以区分. 基于此, Sun 等^[24] 基于 U 函数和候选点的 PDF, 提出了最小改进的 LIF (least improvement function) 函数; Zhou 等^[25] 结合 AK 和 PDF 改进了 U 函数, 并设置权重来动态衡量 PDF 的影

响程度; Zhang等^[21]在REIF函数的基础上,结合样本点的概率密度得到了REIF2函数,寻找的样本更具代表性.此外,以上算法和学习函数的终止准则大多是直接基于学习函数值本身,常取经验值作为阈值,这类终止准则能够得到可靠的失效概率估计值.然而,在更加高维、形式复杂的可靠性分析中往往会过于保守,导致收敛速度较慢,从而带来不必要的开销.对此,李大帅^[26]和Wang等^[27]将预测 P_f 的相对误差作为终止准则进行了研究.

针对高维复杂系统,如何在保证估计精度的情况下,减少有限元的调用次数是本文重点研究的问题.具体地,本文结合现有方法,提出一种高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法,创新点在于提出ELG2(expected least global function 2)学习函数,能够同时考虑极限状态面附近、方差所度量的不确定性大小,以及候选点本身的概率密度情况,并将模型预测失效概率的最大相对误差作为加点终止准则.在使用数值算例对所提出方法进行验证的基础上,针对一个8维曲柄滑块机械结构中连杆的失稳问题进行分析,并与已有常用的学习函数进行对比.实验结果表明,所提出方法能够实现较少的加点来实现准确、高效的失效概率估计.

1 模型描述和现有方法

1.1 Kriging方法简述

Kriging是一种基于统计理论的插值模型,通过假设真值与估计值的误差服从高斯过程,能够提供性能响应的预测均值和方差.这一特征有助于量化响应预测的局部不确定性,即预测方差越大的区域,不确定性越大,而消除不确定性可以更好地拟合真实模型. Kriging由参数线性回归模型和非参数随机过程两部分组成,通常用一个包含一定数量初始样本的DoE来定义随机参数,然后在任意未知点上实施响应预测.对于 n 组初始样本集 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$ 和其真实响应值向量 $\mathbf{G} = [\mathbf{G}(\mathbf{x}_1), \mathbf{G}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)]^T$,每个样本 $\mathbf{x}_i = [\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{ik}]$ 均为 k 维因子水平组合,则Kriging模型表示为

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}). \quad (4)$$

其中: $\hat{G}(\mathbf{x})$ 为性能预测值; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})]^T$ 为基函数向量,有一阶、二阶、高阶等不同形式,记为 \mathbf{f}, p 为基函数的个数; $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]^T$ 为Kriging模型的回归系数; $z(\mathbf{x})$ 为服从平稳高斯随机过程的误差项,其均值为0,方差为 σ_z^2 ,任意两点 \mathbf{x}_i 与 \mathbf{x}_j 间的协方差为

$$\text{Cov}(z(\mathbf{x}^{(i)}), z(\mathbf{x}^{(j)})) = \sigma_z^2 R_\theta(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}). \quad (5)$$

这里: $i, j = 1, 2, \dots, n$; $R_\theta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 为包含相关系数 θ 的相关函数,常用的为高斯相关函数,有

$$R_\theta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \prod_{l=1}^k \exp[-\theta_l(\mathbf{x}_{il} - \mathbf{x}_{jl})^2], \quad (6)$$

θ_l 为与维数 k 有关的高斯相关系数, \mathbf{x}_{il} 和 \mathbf{x}_{jl} 分别为 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 中的第 l 个因子水平.

另外,趋势函数 $f(\mathbf{x})$ 的阶次和高斯相关系数 θ 的选择在实际问题中要具体分析,所建Kriging模型为一阶,并给定 θ 的初始范围.基于初始样本集 \mathbf{X} 及其真实性能值向量 \mathbf{G} ,可得到 $\boldsymbol{\beta}$ 和随机过程方差 σ_z^2 的最小二乘估计值为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}, \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{G} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}}). \quad (8)$$

其中: \mathbf{F} 和 \mathbf{R} 分别为趋势矩阵、相关矩阵,即

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_1) & f_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & f_p(\mathbf{x}_1) \\ f_1(\mathbf{x}_2) & f_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & f_p(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{x}_n) & f_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & f_p(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_\theta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & R_\theta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & R_\theta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ R_\theta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & R_\theta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & R_\theta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_\theta(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & R_\theta(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \cdots & R_\theta(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}.$$

进而,在因子 \mathbf{x} 处的响应预测值和预测方差为

$$\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{G}}^2(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}_z^2 [1 + \mathbf{u}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}]. \quad (10)$$

这里:中间量 $\mathbf{r} = [R(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}), R(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}), \dots, R(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})]$; $\mathbf{u} = \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{f}$; Kriging模型的预测结果为性能函数预测值,即 $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x}) = \hat{G}(\mathbf{x})$; 预测方差 $\hat{\sigma}_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})$ 反映了预测结果的不确定性.

1.2 常见的学习函数

AK的两个关键是寻找学习点的学习函数和停止加点的终止准则.不同学习函数基于不同侧重,可得到下一步学习点.常见学习函数表达式有

$$U(\mathbf{x}) = \left| \frac{\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \right|, \quad (11)$$

EFF(\mathbf{x}) =

$$\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x}) \left[2\Phi\left(\frac{-\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}\right) - \Phi\left(\frac{-2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}\right) - \Phi\left(\frac{2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}\right) \right] - \sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) \left[2\phi\left(\frac{-\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}\right) - \phi\left(\frac{-2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}\right) - \left(\frac{2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}\right) \right] +$$

$$\varepsilon_{\text{EFF}} \left[\Phi \left(\frac{2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \right) - \Phi \left(\frac{-2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \right) \right], \quad (12)$$

$$\text{REIF}(\mathbf{x}) = \mu_{\hat{G}}(\mathbf{x}) \left[1 - 2\Phi \left(\frac{\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \right) \right] + \sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x}) \left[w - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left(-\frac{\mu_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})}{2\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})} \right) \right]. \quad (13)$$

其中: $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})$ 和 $\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})$ 分别为式(9)和(10)中Kriging模型对性能值的预测值和标准差, $\Phi(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 分别为标准正态分布的累积分布函数(cumulative distribution function, CDF)和PDF, 调控因子 $\varepsilon_{\text{EFF}} = 2\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})$, 经验权重 $w=2$.

这些函数的加点方法, 通常将函数值本身作为终止准则, 如: $U_{\min} \geq 2$; $\text{EFF}_{\max} \leq \varepsilon_{\text{EFF}}$, 常取 $\varepsilon_{\text{EFF}} = 0.001$; $\text{REIF}_{\max} \leq 0$.

2 基于ELG 2函数的加点策略

2.1 新的ELG 2学习函数

可靠性分析的一个关键在于极限状态面附近的预测值, 即满足式 $G(\mathbf{x}) = 0$ 中 \mathbf{x} 的预测值 $\hat{G}(\mathbf{x})$, 在增加学习点时可以更多考虑性能函数为0的学习点, 故将失效域的样本“折叠”到安全域一并考虑, 即将性能函数值 $\hat{G}(\mathbf{x})$ 的预测改为其绝对值 $|\hat{G}(\mathbf{x})|$ 的预测. 同时, 结合克里金代理模型预测结果的正态性, 将折叠正态分布(folded normal distribution, FND)引入学习函数加点准则的构建中. 所提出新的ELG 2学习函数, 能够同时考虑极限状态面附近、候选点的不确定性和概率密度大小, 基于此寻找学习点来更新Kriging模型, 进而开展结构可靠性分析. 本节首先简单介绍折叠正态分布, 而后详述ELG 2函数的推导过程.

FND其实是正态分布取绝对值的结果, 对于正态随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 $Y = |X| \geq 0$ 服从折叠正态分布, 其PDF和CDF分别为

$$f_Y(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2 + \mu^2}{2\sigma^2} \right) \cosh \left(\frac{\mu x}{\sigma^2} \right),$$

$$F_Y(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{2} \left[\text{erf} \left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) + \text{erf} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right].$$

其中: $\cosh(\cdot)$ 为双曲余弦函数, $\text{erf}(\cdot)$ 为误差函数.

下面介绍ELG 2函数的推导过程. 首先, 定义最小改进 L (least improvement) 函数, 其极小值能够同

时考虑趋近于LSS和预测点的不确定性, 表达式为

$$L = \frac{|\hat{G}(\mathbf{x})|}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})}. \quad (14)$$

在 $|\hat{G}(\mathbf{x})|$ 的全域 $[0, \infty)$ 上, 对 L 求期望, 有

$$E(L) = \frac{1}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} E(|\hat{G}(\mathbf{x})|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left(-\frac{\mu_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})}{2\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})} \right) + \frac{\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \right) \right], \quad (15)$$

其中 $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})$ 和 $\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})$ 分别为式(9)和(10)中Kriging模型的预测值和方差. 将该期望记为ELG(expected least global), 理想的学习点应为候选点集中满足 $\min(\text{ELG}(\mathbf{x}))$ 的点, 其分子项 $|\hat{G}(\mathbf{x})|$ 越小, 越趋近于LSS; 分母项越大, 候选点的不确定性越大, 要优先考虑作为理想学习点. 进一步地, 由于候选点的PDF不同, 在PDF大的区域选点要相对更密, 故在ELG中加入 $\frac{1}{f(\mathbf{x})}$, 并定义为ELG 2学习函数, 即

$$\text{ELG 2} = \frac{1}{f(\mathbf{x})} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left(-\frac{\mu_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})}{2\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{x})} \right) + \frac{\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \left[1 - 2\Phi \left(-\frac{\mu_{\hat{G}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{x})} \right) \right], \quad (16)$$

则增加的理想学习点 \mathbf{x}^* 需满足

$$\mathbf{x}^* = \arg \min(\text{ELG 2}(\mathbf{x})). \quad (17)$$

在AK-MCS结构可靠性分析方法框架内, 计算真实性能函数值 $G(\mathbf{x}^*)$. 而后, 将 $\{\mathbf{x}^*, G(\mathbf{x}^*)\}$ 添加至初始样本集中, 以更新Kriging模型.

2.2 基于相对误差的终止准则

大多数基于学习函数值本身的终止准则存在过于保守、效率有限等不足^[26-27]. 实际上, 尤其对于高维、因子取值范围较大的系统, 尽管构建Kriging模型估计的失效概率真实误差接近于0, 但是为了满足基于学习函数值的终止条件, 会带来不必要的有限元的调用. 为了解决这个问题, Wang等^[27]通过推导失效和安全样本的分布, 为失效概率最大相对误差 ε_{\max} 的计算提供了理论依据. 相较于学习函数值阈值型的终止条件, 尽管推导 ε_{\max} 的过程比较复杂, 但是考虑了Kriging模型对候选集的整体预测情况, 可缩短AK寻找学习点的过程. 具体地, 基于有限元和MCS随机采样得到失效概率的估计值作为其“真实”值. 将式(3)进一步展开, 得到

$$P_f^{\text{MCS}} = \frac{N_f}{N_S}. \quad (18)$$

其中: N_S 为候选集 S 的样本总数, N_f 为基于真实性能函数通过 MCS 得到的失效样本数. 实际上, N_f 的值是未知的, 是通过 MCS 估计得到.

基于 Kriging 进行 MCS 采样得到失效概率的预测值为

$$\hat{P}_f = \frac{\hat{N}_f}{N_S}, \quad (19)$$

这里 \hat{N}_f 为基于 Kriging 模型进行 MCS 采样得到的失效样本数, 则失效概率估计值与真实值间的相对误差 ε 为

$$\varepsilon = \frac{|P_f^{MCS} - \hat{P}_f|}{P_f^{MCS}} = \left| \frac{\hat{N}_f}{N_f} - 1 \right|. \quad (20)$$

实际上, 对系统的结构可靠性分析的准确程度关键在于 \hat{N}_f 更趋近于 N_f . 用 \hat{S}_f 表示原本属于安全域 S_s 但是被预测为失效的点数, \hat{S}_s 表示原本属于失效域 S_f 但是被预测为安全的点数, 则有

$$N_f = \hat{N}_f + \hat{S}_s - \hat{S}_f, \quad (21)$$

即 $N_f \in [\hat{N}_f - \hat{S}_f, \hat{N}_f + \hat{S}_s]$. 结合式(11)中 U 函数的定义, 样本点符号错判概率 P_w 的表达式为

$$P_w(\hat{G}(\mathbf{x})) = \Phi(-U(\mathbf{x})), \quad (22)$$

则符号错判的样本数服从伯努利分布. 假设候选池 S 内不同样本点间错误分类样本数相互独立^[26-27], 根据中心极限定理, \hat{S}_f 和 \hat{S}_s 均服从高斯分布, 记为 $\hat{S}_f \sim N(\mu_{\hat{S}_f}, \sigma_{\hat{S}_f}^2)$ 和 $\hat{S}_s \sim N(\mu_{\hat{S}_s}, \sigma_{\hat{S}_s}^2)$. 其中

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{S}_f} &= \sum_{\mathbf{x} \in S_f} P_w(\hat{G}(\mathbf{x})), \\ \sigma_{\hat{S}_f}^2 &= \sum_{\mathbf{x} \in S_f} P_w(\hat{G}(\mathbf{x}))[1 - P_w(\hat{G}(\mathbf{x}))], \\ \mu_{\hat{S}_s} &= \sum_{\mathbf{x} \in S_s} P_w(\hat{G}(\mathbf{x})), \\ \sigma_{\hat{S}_s}^2 &= \sum_{\mathbf{x} \in S_s} P_w(\hat{G}(\mathbf{x}))[1 - P_w(\hat{G}(\mathbf{x}))]. \end{aligned}$$

当要求 95% 置信度时, \hat{S}_f 和 \hat{S}_s 的置信上界分别为 $\hat{S}_f^u = \mu_{\hat{S}_f} + 1.96\sigma_{\hat{S}_f}$ 和 $\hat{S}_s^u = \mu_{\hat{S}_s} + 1.96\sigma_{\hat{S}_s}$. 进一步地, 可得到最大相对误差为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &= \max_{N_f \in [\hat{N}_f - N_{S_f}, \hat{N}_f + N_{S_s}]} \left| \frac{\hat{N}_f}{N_f} - 1 \right| = \\ &= \max \left(\left| \frac{\hat{N}_f}{\hat{N}_f - \hat{S}_f^u} - 1 \right|, \left| \frac{\hat{N}_f}{\hat{N}_f + \hat{S}_s^u} - 1 \right| \right). \quad (23) \end{aligned}$$

显然, 在迭代加点和更新 Kriging 的过程中, ε_{\max} 是变化的. 本文所用的终止准则主要是比较当前 Kriging 模型下的 ε_{\max} 与给定阈值 ε_{thr} 的大小, 当最大相对误差小于阈值时, 停止加点. 因此, ε_{thr} 的大小将很大程度上决定系统结构可靠性分析的最终精度.

2.3 算法步骤

基于前文所述新的 ELG2 学习函数和基于相对误差的终止准则, 结合 AK-MCS 的思路, 本节介绍所提出高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法流程. 具体如图 2 所示.

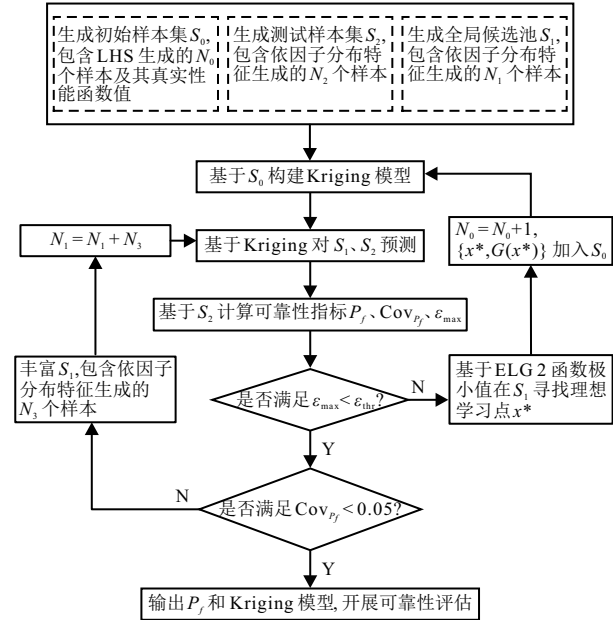


图 2 AK-MCS-ELG2 方法流程

step 1: 生成初始样本集 S_0 、全局候选池 S_1 和测试样本集 S_2 .

为了保证初始样本能够均匀地分布在设计空间内, 采用拉丁超立方采样 (Latin hypercube sampling, LHS) 生成 N_0 个初始样本, 并调用性能函数得到初始样本的真实性能值. 初始样本及其性能函数值共同构成初始样本集 S_0 , 并分别作为 Kriging 模型的输入和输出. 其中, 生成初始样本的个数 N_0 由下式得到:

$$N_0 = \max \left\{ 12, \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right\}, \quad (24)$$

这里 n 为输入因子的维度. 具体采样时, 要预先明确各性能因子的取值范围, 如对于一个服从正态分布的性能因子 $\mathbf{x} \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所提出方法选择 5 倍标准差的取值范围, 即 $[\mu - 5\sigma, \mu + 5\sigma]$.

基于系统输入因子的分布特征, 随机生成具有 N_1 个样本的全局候选池 S_1 和 N_2 个样本的测试样本集 S_2 . 在整个可靠度分析过程中, 除 step 8, S_1 保持不变.

step 2: 基于 S_0 构建 Kriging 模型.

基于 S_0 构建性能因子与性能函数值间的 Kriging 模型, 本文使用的 Kriging 模型为全局 Kriging (universal Kriging, UK) 模型, 具体实施时, 通过 Matlab 的 DACE (design and analysis of computer experiments) 工具箱实现. 其中: 相关函数使用高斯相关函数, 相关

系数 θ 的初始值为1,寻优范围为[0.001, 1 000].

step 3: 基于Kriging模型对 S_1 、 S_2 实施预测. 计算 \hat{P}_f 、 Cov_{P_f} 、 ε_{\max} .

利用式(9)和(10)对 S_1 中的所有候选点进行预测,得到 S_1 中样本对应的性能函数估计值和预测方差. 分别利用式(2)和(3)计算失效概率估计值 \hat{P}_f ,使用式(23)计算失效概率的最大相对误差 ε_{\max} . 计算失效概率的变异系数 Cov_{P_f} ,作为失效概率估计值的收敛评价指标,用来判断测试样本集 S_2 的大小是否合适,即

$$\text{Cov}_{P_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f^{\text{MCS}}}{(N_{\text{MCS}} - 1)P_f^{\text{MCS}}}}. \quad (25)$$

step 4: 基于误差的加点终止准则判断.

当前Kriging模型下的 ε_{\max} 与阈值 ε_{thr} 进行比较. 若 $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{\text{thr}}$,则认为当前Kriging模型满足加点终止条件,转至step 7;否则,进入step 5.

step 5: 基于ELG2学习函数寻找理想学习点 \mathbf{x}^* .

通过所提出ELG2学习函数对 S_1 进行评估,基于式(16)和(17)选择ELG2函数值最小的 \mathbf{x}^* 作为理想学习点. 该点包含了趋近极限状态面、不确定性大且概率密度大的丰富信息,作为下一步更新Kriging模型的输入.

step 6: 更新 S_0 ,转至step 2.

调用性能函数计算 $G(\mathbf{x}^*)$,将 $\{\mathbf{x}^*, G(\mathbf{x}^*)\}$ 加入 S_0 . 转至step 3,重构Kriging模型时,模型的超参数也重新估计,即将理想学习点加入Kriging模型输入,丰富Kriging模型的信息,便于后续实施更精确的预测.

step 7: 可靠性指标条件判断.

若 $\text{Cov}_{P_f} < 5\%$,则认为模型预测效果达到了失效概率评价指标要求,进入step 9;否则,进入step 8.

step 8: 丰富 S_1 ,转至step 3.

变异系数不满足要求,则需要丰富全局候选池 S_1 ,即基于系统输入因子的分布特征,随机生成 N_2 个样本加入 S_1 . 保持当前的 S_0 和Kriging模型,转至step 3,重新对 S_1 实施预测.

step 9: 输出失效概率估计值 P_f .

输出失效概率估计率值和最终的Kriging模型,为开展其他可靠性分析提供依据.

3 方法验证

分别将数值函数中的变量视为性能因子,具体函数表达式作为性能函数,运用所提出方法开展可靠性分析来验证预期的准确、高效的失效概率估计的效果,并与已有经典学习函数的求解结果进行对比. 本文选择5个指标来比较不同学习函数的效果: T_{cal}

(time of calculation)为AK寻找学习点最终达到终止条件的运行时间,用于对比不同方法的求解效率,其单位为秒(s). N_{call} 为真实性能函数的调用次数,即初始点数与增加点数之和. Cov_{P_f} 和 ε_{P_f} 分别为失效概率估计值的变异系数和相对误差. NRMSE为归一化均方根误差(normalized root mean square error),即

$$\text{NRMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}}. \quad (26)$$

其中: y_i 为真实响应值; \hat{y}_i 为预测响应值;NRMSE的取值范围为[0, 1],其值越小,预测结果与真实结果间的误差越小,预测结果越准确.

由于AK中 S_0 、 S_1 和 S_2 均为随机方式产生,为了保证结果的稳定性,不同学习函数结果均取10次运行的平均值,而同一次运行时,不同的学习函数方法所使用的 S_0 、 S_1 、 S_2 为同一组取值. 同时,MCS运行10次的失效概率均值作为失效概率的真实值.

3.1 算例1:2维性能函数算例

为了直观地对比所提出方法的加点的效果,针对一个从文献[28]中修改后的2维数值算例进行验证. 两个因子均服从标准正态分布,其性能函数表达式如下所示:

$$G = 2x_1^2 - 1.05x_1^4 + \frac{x_1^6}{6} + x_1x_2 + x_2^2 - 1. \quad (27)$$

基于所提出方法的流程,由式(24),在[-5, 5]内用LHS生成 $N_0 = 12$ 个样本,并计算其真实性能函数值,得到 S_0 用于构建Kriging模型. 结合两个因子的正态性,随机生成 $N_1 = 1.0 \times 10^5$ 个样本的全局候选池 S_1 和 $N_2 = 1.0 \times 10^6$ 个样本的测试样本集 S_2 . 在ELG2函数找点的主动学习过程中,补充 S_0 并更新Kriging模型,直至满足终止准则和可靠性指标要求,其中 $\varepsilon_{\text{thr}} = 0.01$. 求解过程中,某次运行中不同方法求解的极限状态面对比如图3所示. 随着新样本点的增加,失效概率的预测值及其最大相对误差的变化如图4(a)所示. 具体求解结果对比如表1所示.

由图3(a)可见,初始样本点所构建的Kriging模型对失效概率的预测值较真值偏差较大,且对LSS的拟合偏差非常大. 随着加点迭代更新Kriging模型,失效概率预测值在真值附近波动,当增加42个点后达到终止准则,相对误差仅在0.001 5%. 由图3可见:与几种经典的方法对比,所提出方法的求解时间相比U函数略多,但是加点数是最少的;几种学习函数方法均能够通过迭代加点对LSS有一定的拟合,但是

ELG2函数在LSS周围和PDF较大的区域加点较多,其他几种函数在LSS周围和一些较小PDF区域有较

多加点,表明所提出方法在寻点和拟合LSS上的优势较明显.

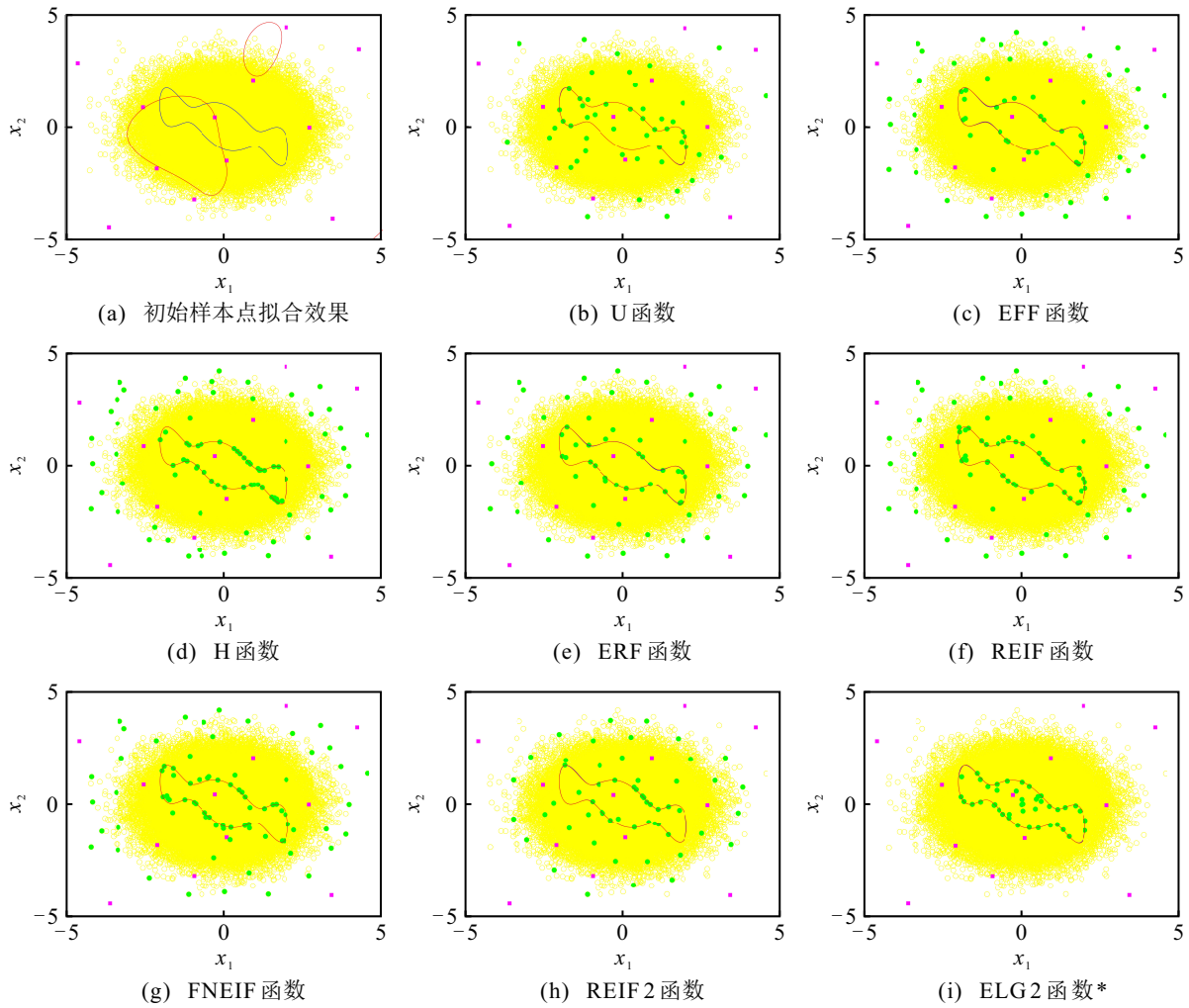


图3 算例1某次求解拟合LSS效果对比

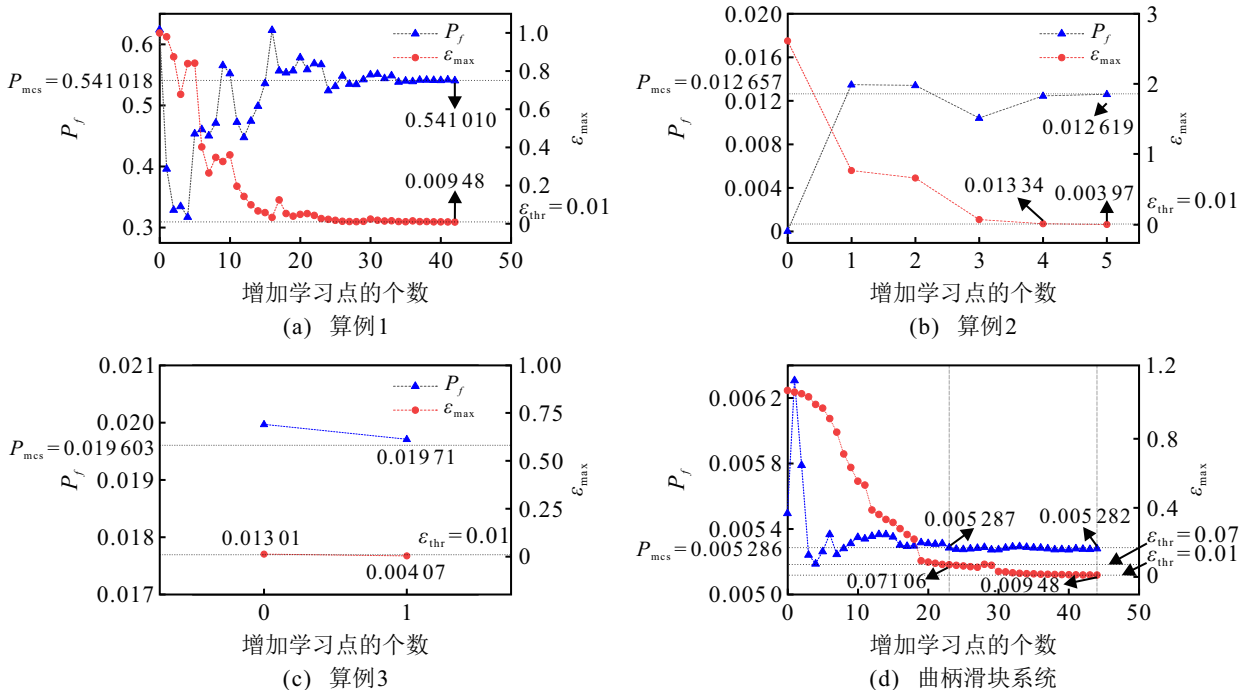


图4 求解过程对比

表1 求解结果对比

算例和应用	方法	T_{cal}/s	N_{call}	NRMSE	$\hat{P}_f/\%$	$Cov_{P_f}/\%$	$\varepsilon_{P_f}/\%$
算例1	MCS	—	$12 + 1.0 \times 10^6$	—	54.1018	—	—
	U函数	88.43	12 + 50	0.0339	54.0908	0.0921	0.0203
	EFF函数	115.45	12 + 60	0.0029	53.9504	0.0924	0.2798
	H函数	219.73	12 + 91	0.0100	54.1001	0.0921	0.0031
	ERF函数	115.89	12 + 60	0.0043	53.9777	0.0923	0.2294
	REIF函数	175.13	12 + 77	0.0080	54.1049	0.0921	0.0057
	FNEIF函数	177.28	12 + 79	0.0094	54.1012	0.0921	0.0011
	REIF2函数	109.51	12 + 56	0.0209	54.0886	0.0921	0.0244
	ELG2函数*	101.15	12 + 42	0.1929	54.1010	0.0921	0.0015
算例2	MCS	—	$15 + 1.0 \times 10^6$	—	1.2657	—	—
	U函数	6.3125	15 + 8	0.0006	1.2666	0.8829	0.0711
	EFF函数	6.3125	15 + 8	0.0009	1.2676	0.8825	0.1501
	H函数	11.5938	15 + 10	0.0008	1.2653	0.8834	0.0316
	ERF函数	6.5938	15 + 6	0.0143	1.3766	0.8464	8.7619
	REIF函数	4.625	15 + 10	0.0008	1.2675	0.8826	0.1422
	FNEIF函数	11.6875	15 + 11	0.0007	1.2698	0.8818	0.3239
	REIF2函数	4.0625	15 + 9	0.0007	1.2666	0.8829	0.0711
	ELG2函数*	4.9844	15 + 5	0.0029	1.2619	0.8900	0.3973
算例3	MCS	—	$28 + 1.0 \times 10^6$	—	1.9603	—	—
	U函数	63.91	28 + 8	0.0006	1.9583	0.7076	0.1020
	EFF函数	72.46	28 + 8	0.0004	1.9595	0.7073	0.0408
	H函数	75.54	28 + 9	0.0004	1.9587	0.7075	0.0816
	ERF函数	50.50	28 + 6	0.0009	1.9613	0.7070	0.0510
	REIF函数	77.54	28 + 9	0.0003	1.9608	0.7071	0.0255
	FNEIF函数	80.17	28 + 10	0.0002	1.9612	0.7070	0.0459
	REIF2函数	62.23	28 + 7	0.0006	1.9587	0.7075	0.0816
	ELG2函数*	7.95	28 + 1	0.0021	1.9708	0.7053	0.5356
曲柄滑块系统	MCS	—	$45 + 1.0 \times 10^6$	—	0.5286	—	—
	U函数	375.87	45 + 47	0.0071	0.5296	1.3705	0.1892
	EFF函数	609.11	45 + 75	0.0056	0.5291	1.3711	0.0946
	H函数	1079.27	45 + 127	0.0033	0.5278	1.3728	0.1513
	ERF函数	349.46	45 + 44	0.0090	0.5304	1.3694	0.3405
	REIF函数	883.88	45 + 68	0.0068	0.5296	1.3705	0.1892
	FNEIF函数	961.14	45 + 114	0.0014	0.5284	1.3720	0.0378
	REIF2函数	726.68	45 + 57	0.0031	0.5288	1.3715	0.0378
	ELG2函数*	278.32	45 + 44	0.0036	0.5282	1.3723	0.0948

注:“—”表示MCS方法的失效概率估计值作为对比项,未计算对应值;“*”为所提出方法。

3.2 算例2:4维性能函数算例

对于一个含有4个独立标准正态变量的非线性函数^[25,29],开展可靠性分析.其表达式为

$$G = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 10x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 12x_4 - 43.$$

同算例1,在学习函数寻找理想点的主动学习过程中,更新 S_0 和Kriging模型.失效概率的预测值及其最大相对误差的变化如图4(b)所示.仅用初始的15个样本点预测的失效概率值偏差较大,且最大相对误差值远大于0.01.基于ELG2学习函数增加1个学习点后,失效概率预测值趋近于真值,最大相对

误差值也显著降低.继续增加学习点,预测值在真值上下波动,当加入第5个点时,最大相对误差值为0.00397,小于设定的阈值0.01,故最终增加学习点数为5个,所得Kriging的参数值如下: $\hat{\theta} = 0.0063, \hat{\beta} = [14.6247, -0.6158, -0.6361, -0.4523, -0.6244]$.求得 $\hat{P}_f = 0.012466$,与MCS得到的失效概率“真实”值 $P_f = 0.012657$ 的相对误差为 $\varepsilon_{P_f} = 0.01334$.

求解结果如表1所示.基于初始样本集加点并更新Kriging模型,达到相应的终止准则,最终均可实现失效概率的估计.对比可靠性指标,不同方法失效概率估计值差异在万分位(0.01%)上,均实现了较精确的估计,且相差不大.对比运行求解时间,各函数方法

间的差异并不明显,但是ELG2函数增加的学习点最少、效率最高。

3.3 算例3:6维性能函数算例

对一个6维性能函数^[30-31]进行分析,表达式为

$$G = 460 - \left(\frac{36h^2M^2}{\{a(h-2t)^3 + b[h^3 - (h-2t)^3]\}^2} + \frac{3T^2}{\{0.8bt^2 + 0.4a^3(h/t-2)\}^2} \right)^{1/2}$$

其中: a 、 b 、 t 、 h 、 M 、 T 均为服从正态分布的随机变量,且相互独立,具体分布参数如表2所示。

表2 算例3因子的分布参数

序号	因子	均值	标准差
1	a	12	0.060
2	b	65	0.325
3	t	14	0.070
4	h	85	0.425
5	M	3.5×10^6	1.75×10^5
6	T	3.1×10^6	1.55×10^5

类似算例1,在所提出方法流程下,基于式(24)生成 $N_0 = 28$ 初始样本点.每个因子的取值范围为 $\mu \pm 5\sigma$,如因子 a 的取值范围为 $[12 - 5 \times 0.060, 12 + 5 \times 0.060]$,即 $[11.7, 12.3]$. S_1 和 S_2 均为各因子的正态分布随机数.求解中,失效概率预测值及其最大相对误差值如图4(c)所示.表1求解结果中,对比失效概率预测值与相对误差,所提出ELG2学习函数效果稍差,但是仍然能够保持在与真实值的预测误差精度(1%)内.其他函数中增加学习点数最少为6个(ERF函数), T_c 最小为62.23 s(REIF2函数).但是ELG2函数最终增加1个学习点、 T_c 为7.98 s,表明求解效率和节省成本上的优势非常明显。

2维算例的预测结果和LSS拟合效果表明,ELG2函数寻找的学习点更具代表性;4维和6维性能函数算例的结果表明,所提出方法通过加点更新Kriging模型,在高维情况下更能够实现准确、高效的失效概率估计.与常见学习函数对比,结果预测精度不及个别学习函数的精度高,但是均在可接受范围内.而ELG2函数达到终止准则时增加学习点的数量明显较少,运行求解时间更短,尤其是6维算例中,优势更为明显.分析来看,这得益于ELG2函数同时考虑了趋于极限状态面、预测方差和候选点的PDF,能够增加有代表性的高质量学习点,且使用基于最大相对误差的终止准则,迭代更新Kriging时关注失效概率的预测情况.当满足给定阈值时即停止加点,避免了学习函数值本身作为终止准则可能带来过多加点的不足。

4 应用研究

在所提出方法被验证可行的基础上,针对一个8维曲柄滑块连杆系统的稳定性问题^[32]开展研究.在连杆运动过程中,存在失稳的可能,对其进行可靠性分析很有必要,图5为其结构示意图.其性能函数为

$$G(\mathbf{x}) = \frac{\pi^3 E(d_2^4 - d_1^4)}{64b^2} - \frac{P(b-a)}{\sqrt{(b-a)^2 - e^2 - \mu e}}$$

其中各因子均服从正态分布,具体含义和分布参数如表3所示。

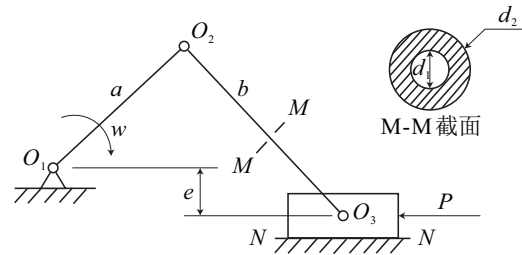


图5 曲柄滑块系统示意图

表3 曲柄滑块系统的因子分布参数表

因子	单位	含义	均值	标准差
a	mm	曲柄长度	100	1
b	mm	连杆长度	400	1
P	kN	外载荷	750	75
E	GPa	摇杆弹性模型	200	20
d_1	mm	连杆内径	20	1
d_2	mm	连杆外径	40	1
e	mm	偏心距	125	1
μ	-	滑块与地面摩擦系数	0.2	0.02

由表1结果可以看出,同样初始样本点情况下,所提出方法仅增加44个学习点即可达到其他大多数学习函数增加更多个学习点同样精度的预测效果.对比 T_c ,其他学习函数方法均远大于ELG2函数的时间开销,故所提出方法预测效率更高.观察图4(d)的求解过程,随着学习点数量的增多,失效概率估计值逐渐趋近于真实值,模型的 ε_{\max} 逐渐减小,直至满足设定阈值.当阈值 $\varepsilon_{\text{thr}} = 0.01$ 时,最终增加44个学习点,失效概率估计值为0.005 282.实际上,将阈值调整为 $\varepsilon_{\text{thr}} = 0.072$ 时,失效概率估计值为0.005 287,与真实值0.005 286几乎一致,此时仅增加23个学习点.可见,所提出方法针对具体的系统分析时,可以通过适当调整阈值 ε_{thr} 来达到准确、高效的预测效果。

5 结论

本文针对系统的结构可靠性分析中高维度、因子关系复杂情况下的失效概率难以高效、准确估计的问题,结合现有AK方法的基本思路,提出了一种高维性能因子系统结构可靠性的主动学习分析方法,主要包括新的ELG2学习函数,其同时考虑趋近于极限

状态面附近、预测方差的不确定性和候选点的概率密度,相较于已有经典学习函数对学习点的寻找条件更加严格,得到的学习点也更具有代表性.同时使用基于相对误差的终止准则,能够避免基于学习函数值本身的终止准则不必要的加点,从而减少真实有限元的调用次数,节省成本.在3个性能函数对所提出方法进行验证的基础上,针对一个8维曲柄滑块机械结构中连杆的失稳问题开展研究,并同已有的学习函数方法进行对比.实验结果表明,在同等精度条件下,所提出方法增加学习点数更少,能够降低调用真实有限元的成本和求解时间开销,在实际工程上有一定应用价值.

所提出方法是在全局候选池上寻找学习点,而全局最优学习点的周围往往是在LSS附近,现有研究中已有关于在全局最优学习点周围进一步实施局部开发,更具针对性的寻找学习点.未来进一步的研究中,考虑将加点策略细分为全局探索和局部开发两个环节.同时,所提出方法较已有学习函数在求解效率和成本开销上有一定优势,但是失效概率的估计精度略差,对小失效概率系统问题可能带来较大偏差,且针对超过10维时Kriging模型本身效率将受限,也有待进一步研究.

参考文献(References)

- [1] 孙强,岳继光.基于不确定性的故障预测方法综述[J].控制与决策,2014,29(5):769-778.
(Sun Q, Yue J G. Review on fault prognostic methods based on uncertainty[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 769-778.)
- [2] 吕震宙.结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M].北京:科学出版社,2009:1-5.
(Lv Z Z. Reliability and reliability sensitivity analysis of structural mechanism[M]. Beijing: Science Press, 2009: 1-5.)
- [3] 龙云利,徐晖,安玮.马尔可夫链蒙特卡罗重要度采样与多目标跟踪[J].控制与决策,2011,26(9):1402-1406.
(Long Y L, Xu H, An W. Markov chain Monte Carlo and importance sampling for multiple targets tracking[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1402-1406.)
- [4] Du W Q, Luo Y X, Wang Y Q. Time-variant reliability analysis using the parallel subset simulation[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 182: 250-257.
- [5] Zhang X B, Lu Z Z, Yun W Y, et al. Line sampling-based local and global reliability sensitivity analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 61(1): 267-281.
- [6] Jiang C, Zhang D Q, Liu J, et al. Time-dependent reliability analysis through response surface method[J]. Journal of Mechanical Design, 2017, 139(4): 1547-1559.
- [7] 段辉亚,杨昌棋,贾子初.基于多项式代理模型的薄膜材料力学参数识别[J].实验力学,2020,35(4):577-587.
(Duan H Y, Yang C Q, Jia Z C. Mechanics parameter identification of thin film materials based on polynomial proxy model[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2020, 35(4): 577-587.)
- [8] Dai H Z, Zhang H, Wang W. A support vector density-based importance sampling for reliability assessment[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2012, 106: 86-93.
- [9] 刘峤,方佳艳.定点孪生支持向量机[J].控制与决策,2020,35(2):272-284.
(Liu Q, Fang J Y. Fixed-point twin support vector machine[J]. Control and Decision, 2020, 35(2): 272-284.)
- [10] Berkemeier M, Peitz S. Derivative-free multiobjective trust region descent method using radial basis function surrogate models[J]. Mathematical and Computational Applications, 2021, 26(2): 31.
- [11] Lee S, Kim J H. An adaptive importance sampling method with a Kriging metamodel to calculate failure probability[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2017, 31(12): 5769-5778.
- [12] 陈洪转,万良琪,欧阳林寒,等.面向复杂装备精密产品质量特性的Kriging-RBDO可靠性优化设计[J].控制与决策,2019,34(9):1929-1936.
(Chen H Z, Wan L Q, Ouyang L H, et al. Precision product of complex equipment quality characteristic reliability-based design optimization using Kriging model[J]. Control and Decision, 2019, 34(9): 1929-1936.)
- [13] 胡峰,张苗,于洪.基于三支决策的主动学习方法[J].控制与决策,2019,34(4):718-726.
(Hu F, Zhang M, Yu H. An active learning method based on three-way decision model[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 718-726.)
- [14] 徐海龙,王晓丹,廖勇,等.一种基于主动学习的SVM增量训练算法[J].控制与决策,2010,25(2):282-286.
(Xu H L, Wang X D, Liao Y, et al. Incremental training algorithm of SVM based on active learning[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 282-286.)
- [15] Jones D R, Schonlau M, Welch W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. Journal of Global Optimization, 1998, 13(4): 455-492.
- [16] Bichon B J, Eldred M S, Swiler L P, et al. Efficient global

- reliability analysis for nonlinear implicit performance functions[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(10): 2459-2468.
- [17] Echard B, Gayton N, Lemaire M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145-154.
- [18] Song K L, Zhang Y G, Shen L J, et al. A failure boundary exploration and exploitation framework combining adaptive Kriging model and sample space partitioning strategy for efficient reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 216: 108009.
- [19] Lv Z Y, Lu Z Z, Wang P. A new learning function for Kriging and its applications to solve reliability problems in engineering[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2015, 70(5): 1182-1197.
- [20] Yang X F, Liu Y S, Gao Y, et al. An active learning Kriging model for hybrid reliability analysis with both random and interval variables[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 51(5): 1003-1016.
- [21] Zhang X F, Wang L, Sørensen J D. REIF: A novel active-learning function toward adaptive Kriging surrogate models for structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 185: 440-454.
- [22] Shi Y, Lu Z Z, He R Y, et al. A novel learning function based on Kriging for reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 198: 106857.
- [23] 欧阳林寒, 黄磊, 韩梅. 主动学习可靠性分析算法: 基于Kriging预测方差的视角[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(7): 2154-2165.
(Ouyang L H, Huang L, Han M. An active learning reliability analysis algorithm: Based on the perspective of Kriging prediction variance[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2023, 43(7): 2154-2165.)
- [24] Sun Z L, Wang J, Li R, et al. LIF: A new Kriging based learning function and its application to structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 157: 152-165.
- [25] Zhou C N, Xiao N C, Zuo M J, et al. AK-PDF: An active learning method combining Kriging and probability density function for efficient reliability analysis[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers—Part O: Journal of Risk and Reliability*, 2020, 234(3): 536-549.
- [26] 李大师. 基于多保真度Kriging代理模型的结构可靠度分析方法[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.
(Li D S. A structural reliability analysis method based on multi-fidelity Kriging surrogate model[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021.)
- [27] Wang Z Y, Shafieezadeh A. ESC: An efficient error-based stopping criterion for kriging-based reliability analysis methods[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 59(5): 1621-1637.
- [28] Zhang L L, Jin G, Liu T Y, et al. Generalized hierarchical expected improvement method based on black-box functions of adaptive search strategy[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 106: 30-44.
- [29] Zhao Z, Lu Z H, Zhao Y G. A Kriging-assisted two-stage adaptive radial-based importance sampling method for random-interval hybrid reliability analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, 66(6): 136.
- [30] Wang P, Lu Z Z, Tang Z C. An application of the Kriging method in global sensitivity analysis with parameter uncertainty[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(9): 6543-6555.
- [31] Zhang L G, Lu Z Z, Pan W. Efficient structural reliability analysis method based on advanced Kriging model[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(2): 781-793.
- [32] 陈哲, 杨旭锋, 程鑫. 基于改进Kriging模型的主动学习可靠性分析方法[J]. *机械强度*, 2021, 43(1): 129-136.
(Chen Z, Yang X F, Cheng X. Active learning method based on improved Kriging model for reliability analysis[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2021, 43(1): 129-136.)

作者简介

李炳毅(2000—), 男, 硕士生, 主要研究方向为系统试验与评估, E-mail: libingyi18@nudt.edu.cn;

贾祥(1991—), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为复杂系统可靠性分析、试验评估, E-mail: jiaxiang09@sina.cn;

张鑫航(2001—), 男, 硕士生, 主要研究方向为试验设计与分析, E-mail: zhangxinhang19@nudt.edu.cn;

李博文(1998—), 男, 助理工程师, 主要研究方向为航天器测量控制, E-mail: libowen_529@163.com.