

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于 $P$ 范数的线性时滞系统多胞空间滤波器设计

沈谦逸, 王子赟, 王艳

引用本文:

沈谦逸, 王子赟, 王艳. 基于 $P$ 范数的线性时滞系统多胞空间滤波器设计[J]. *控制与决策*, 2024, 39(12): 4209–4216.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1664>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks

*控制与决策*. 2021, 36(8): 1955–1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

#### 基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 $H_\infty$ 控制

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

#### 基于向量集逆区间滤波的故障观测器设计

Vector set inversion interval filtering based fault observer design

*控制与决策*. 2021, 36(12): 2973–2981 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0212>

#### 事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 $H_\infty$ 故障检测

Event-triggered  $H_\infty$  fault detection for networked control systems with distributed delays

*控制与决策*. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

#### 多采样率不确定离散时滞系统的鲁棒预见控制

Robust preview control for multirate uncertain discrete-time systems with input delay

*控制与决策*. 2017, 32(12): 2113–2126 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1352>

# 基于 $P$ 范数的线性时滞系统多胞空间滤波器设计

沈谦逸<sup>1,2</sup>, 王子赞<sup>1,2†</sup>, 王艳<sup>1,2</sup>

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122;  
2. 江南大学 物联网技术应用教育部工程研究中心, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对受不确定噪声干扰的线性时滞系统, 提出一种基于  $P$  范数的时滞系统多胞空间滤波算法. 首先, 利用多胞体对时滞系统状态可行集作空间表征; 随后, 根据当前时刻系统状态是否受时滞量的影响, 设计基于  $P$  范数的系统多胞空间滤波器, 通过给定的  $P$  范数准则, 构造当前时刻系统的多胞空间膨胀优化模型, 从而将时滞系统的状态估计问题转换为多胞空间膨胀系数优化问题; 进而, 利用舒尔补引理和线性矩阵不等式求解该优化问题, 并通过多胞空间降维得到状态估计最紧致多胞体可行集; 最后, 通过风力发电机系统仿真, 验证利用所提出的方法解决线性时滞系统状态估计问题的有效性.

**关键词:** 时滞系统; 滤波器设计;  $P$  范数; 多胞空间

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2023.1664

**引用格式:** 沈谦逸, 王子赞, 王艳. 基于  $P$  范数的线性时滞系统多胞空间滤波器设计 [J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 4209-4216.

## Design of $P$ -radius based zonotopic filter for linear time delay systems

SHEN Qian-yi<sup>1,2</sup>, WANG Zi-yun<sup>1,2†</sup>, WANG Yan<sup>1,2</sup>

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** For noise uncertainty linear systems with time delay, a  $P$ -radius based zonotopic filter for time delay systems is proposed. First, the state feasible set is parameterized by zonotopes. Subsequently, depending on whether the current system state is affected by time delay or not,  $P$ -radius based zonotopic filters are designed respectively. By establishing zonotopic space expansion models, the state estimation problem is converted into a parameter optimization problem. Furthermore, by implementing Schur complement lemma, the optimization problem is solved by adopting linear matrix inequalities. Then, by means of dimensionality reduction operation, the tightest feasible set of polyhedron state space is calculated. Finally, a case simulation of a wind turbine system is applied, demonstrating the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords:** time-delay systems; filter design;  $P$ -radius; polyhedron space

## 0 引言

受传感器传输延迟等影响, 实际控制系统往往存在时滞<sup>[1]</sup>. 因此, 对时滞系统状态的精确估计尤为重要. 近年来, 时滞系统状态估计问题得到了学者的广泛关注<sup>[2-3]</sup>. 传统状态估计方法集中于卡尔曼滤波及其衍生算法, 此类方法均要求噪声满足特定的概率分布. 然而, 实际过程中往往很难获取噪声的概率分布, 尤其是非高斯噪声的情形<sup>[4]</sup>. 对于更具一般性的噪声未知但有界 (unknown but bounded, UBB) 情况下的系统状态估计问题, 现有的卡尔曼滤波算法均不适用.

近年来, 面向不确定噪声系统的集员滤波算法得到了广泛的研究和应用. 该方法采用一定规则几何形状的集合来描述系统状态的可行集, 从而得到系统状态的严格不确定边界约束, 并可通过最小区间包络得到系统状态上下边界. 考虑到系统噪声和时滞均能够满足 UBB 假设, 基于集员滤波理论设计空间滤波器, 对于解决受不确定噪声的线性含时滞系统状态估计问题, 具有一定的可行性与研究价值.

系统状态可行集形状的描述是集员理论的重要问题之一. 中心对称多胞体对于闵可夫斯基和封闭,

收稿日期: 2023-11-30; 录用日期: 2024-03-27.

基金项目: 江苏省自然科学基金面上项目 (BK20221533); 国家自然科学基金项目 (61973138).

† 通讯作者. E-mail: wangzy0601@163.com.

易于降维<sup>[5]</sup>. 通过设计合适的多胞空间收缩策略,可以高效地获得最紧致的系统状态估计. 目前,常用的收缩策略集中在利用多胞体体积或  $F$  范数作为衡量多胞体规模的最优化准则. 其中,多胞体体积方法准确性好,但计算量大; $F$  范数方法复杂度低,但准确性相对较差<sup>[6]</sup>. 可见,如何利用多胞空间几何结构,包裹系统的状态可行集,是解决不确定噪声下的时滞系统状态估计问题的关键. 对此,通过构造类似椭圆  $P$  矩阵的方式,引入  $P$  范数作为新的多胞空间收缩指标,进而将时滞系统状态估计问题转换为基于  $P$  范数的多胞空间滤波器设计问题. 这其中,需要构造相应的变量描述时滞项对系统状态估计的影响,并求解满足多胞空间迭代收缩的最优解,这也是本文要解决的关键问题.

鉴于此,本文采用中心对称多胞体描述时滞系统的状态可行集,提出一种基于  $P$  范数的时滞系统多胞空间滤波器设计方法,完成时滞系统状态可行集的多胞空间表征,同时根据系统是否受到时滞影响,分别设计滤波器,引入多胞空间的膨胀系数,构造多胞空间迭代中满足空间收缩不等式的充分条件,进而利用线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)求解多胞体最优参数. 与文献[7-8]的系统滤波方法相比,利用本文算法获得的状态可行空间能够更紧密包裹时滞系统的真实状态,保守性更低.

## 1 问题描述

考虑如下形式的时滞线性时不变离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ Ax(k) + A_h x(k-h) + Bu(k) + Dw(k), \\ y(k) = Cx(k) + Fv(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  和  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  分别为系统的状态向量和测量向量;  $u(k)$  为系统输入,  $A$ 、 $A_h$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $F$  均为具有合适维数的系数矩阵;  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  和  $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$  分别为未知但有界的过程噪声和测量噪声. 不失一般性,当  $0 < k \leq h$  时,系统为零初值. 本文采用中心对称多胞体描述时滞系统的状态可行集,基于观测数据完成噪声不确定条件下线性时滞系统(1)的状态估计.

**定义1** 定义  $n$  维空间中的  $r$  阶中心对称多胞体  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n (n \leq r)$  为

$$\mathcal{Z} = p \oplus GB^r = \{z \in \mathbb{R}^n : z = p + Gb, b \in B^r\} = \langle p, G \rangle. \quad (2)$$

其中:  $p \in \mathbb{R}^n$  为多胞体中心坐标;  $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$  为多胞体

生成矩阵,决定多胞体的形状和规模;  $B^r = [-1, 1]^r$  为  $r$  阶单位盒子.

针对未知但有界的过程噪声和测量噪声,本文采用中心对称多胞体包裹噪声的可行集,即当  $k \geq 0$  时,时滞系统的过程噪声和测量噪声分别满足

$$w(k) \in \langle 0, G_w \rangle = G_w b^{r_w}, \quad (3)$$

$$v(k) \in \langle 0, G_v \rangle = G_v b^{r_v}, \quad (4)$$

其中  $G_w$  和  $G_v$  均为具有合适维数的生成矩阵.

在时滞系统的状态估计中,需要对表征系统状态的多胞体设计收缩策略. 本文通过构造  $P$  范数表征多胞体尺寸.

**定义2** 多胞体  $\mathcal{Z} = \langle p, G \rangle$  的  $P$  范数表示为

$$\begin{aligned} l &= \max_{z \in \mathcal{Z}} \|z - p\|_P^2 = \\ &= \max_{b \in B^r} \|Gb\|_P^2 = \\ &= \max_{b \in B^r} \{(Gb)^T P (Gb)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为系数矩阵.

下面给出本文所用到的中心对称多胞体运算的两个关键性质: 闵可夫斯基和的封闭性和线性变换,以及包裹中心对称多胞体最小区间的求解方法.

**引理1** 对于多胞体  $\mathcal{Z}_1 = \langle p_1, G_1 \rangle \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Z}_2 = \langle p_2, G_2 \rangle \subset \mathbb{R}^n$ , 两者的闵可夫斯基和<sup>[9]</sup>满足

$$\langle p_1, G_1 \rangle \oplus \langle p_2, G_2 \rangle = \langle p_1 + p_2, [G_1 \ G_2] \rangle. \quad (6)$$

**引理2** 对于多胞体  $\mathcal{Z} = \langle p, G \rangle \subset \mathbb{R}^n$  和线性变换矩阵  $L \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , 两者的线性变换<sup>[9]</sup>满足

$$L \odot \langle p, G \rangle = \langle Lp, LG \rangle. \quad (7)$$

**引理3** 对于任一多胞体  $\mathcal{Z} = \langle p, G \rangle \subset \mathbb{R}^n$ , 存在最小区间包络  $\text{Box}(\mathcal{Z}) = [z^-, z^+]$ , 使得  $\mathcal{Z} \subseteq \text{Box}(\mathcal{Z})$ . 令  $z_i^-$  和  $z_i^+$  分别为  $z^-$  和  $z^+$  的第  $i$  个元素, 则有

$$\begin{cases} z_i^- = p_i - \sum_{j=1}^r |G_{i,j}|, & i = 1, 2, \dots, n; \\ z_i^+ = p_i + \sum_{j=1}^r |G_{i,j}|, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (8)$$

其中  $p_i$  为多胞体中心坐标向量  $p$  的第  $i$  个元素<sup>[10]</sup>.

为了降低运算复杂度,本文引入多胞体降阶方法. 下面给出多胞体降阶后的表达形式.

**引理4** 对于多胞体  $\mathcal{Z} = \langle p, G \rangle$ , 存在降阶后的多胞体  $\mathcal{Z}_\downarrow = \langle p, \text{rs}(G) \rangle$ , 使  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}_\downarrow$ . 其中,降阶后的多胞空间生成矩阵  $\text{rs}(G)$  为对角矩阵,其第  $i$  行第  $i$  列的元素<sup>[11]</sup>为

$$\begin{aligned} \text{rs}(G)_{ii} &= \sum_{j=1}^m |G_{ij}|, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad n \leq s \leq r. \end{aligned} \quad (9)$$

最后,介绍本文用于处理线性矩阵不等式问题时需要用到的舒尔补引理.

**引理5** (舒尔补引理) 若矩阵  $R$  为正定矩阵, 则  $Q - SR^{-1}S^T \geq 0$  等价于<sup>[12]</sup>

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

其中  $Q$  和  $S$  为具有合适维数的矩阵或向量.

## 2 时滞系统状态可行集的多胞空间表征

在设计滤波器前, 需要完成时滞系统状态可行集的多胞空间表征, 即给出从  $k$  时刻到  $k+1$  时刻的多胞空间迭代形式. 本文引入参数  $\lambda$  作为时滞系统的量化更新指标, 将系统状态估计的可行集参数化.

**定理1** 给定  $k$  时刻系统状态的估计值  $\hat{x}(k) \in \hat{Z}(k) = \langle \hat{p}(k), \hat{G}(k) \rangle$ , 则存在参数  $\lambda(k)$ , 使  $k+1$  时刻系统状态的估计值  $\hat{x}(k+1)$  满足

$$\hat{x}(k+1) \in \langle \hat{p}(k+1), \hat{G}(k+1) \rangle, \quad (11)$$

$$\hat{p}(k+1) = Q_p(k+1) + \lambda(k)[y(k) - CQ_p(k+1)], \quad (12)$$

$$\hat{G}(k+1) = [(I - \lambda(k)C)Q_G(k+1) \quad \lambda(k)FG_v], \quad (13)$$

$$Q_p(k+1) = A\hat{p}(k) + A_h\hat{p}(k-h) + Bu(k), \quad (14)$$

$$Q_G(k+1) = [A\hat{G}(k) \quad A_h\hat{G}(k-h) \quad DG_w]. \quad (15)$$

**证明**  $k+1$  时刻的系统状态估计值满足

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \\ A\hat{x}(k) + A_h\hat{x}(k-h) + Bu(k) + Dw(k) &\in \\ (A \odot \langle \hat{p}(k), \hat{G}(k) \rangle) \oplus (A_h \odot \langle \hat{p}(k-h), & \\ \hat{G}(k-h) \rangle) \oplus Bu(k) \oplus (D \odot \langle 0, G_w \rangle) &= \\ \langle A\hat{p}(k) + A_h\hat{p}(k-h) + Bu(k), & \\ [A\hat{G}(k) \quad A_h\hat{G}(k-h) \quad DG_w] \rangle. & \end{aligned} \quad (16)$$

根据定义1,  $\exists b_x \in B^{r_x}$ , 使

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= [A\hat{p}(k) + A_h\hat{p}(k-h) + Bu(k)] + \\ [A\hat{G}(k) \quad A_h\hat{G}(k-h) \quad DG_w]b_x &= \\ Q_p(k+1) + Q_G(k+1)b_x. & \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$Q_p(k+1) = A\hat{p}(k) + A_h\hat{p}(k-h) + Bu(k),$$

$$Q_G(k+1) = [A\hat{G}(k) \quad A_h\hat{G}(k-h) \quad DG_w].$$

引入参量  $\lambda(k)$ , 式(17)等效为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= Q_p(k+1) + \lambda(k)CQ_G(k+1)b_x + \\ [I - \lambda(k)C]Q_G(k+1)b_x. & \end{aligned} \quad (18)$$

根据时滞系统(1)的输出方程可知,  $\hat{x}(k+1)$  同时也满足

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &\in \{ \hat{x}(k+1) \in \mathbb{R}^n : \\ \|C\hat{x}(k+1) - y(k+1)\| &\leq FG_v \}. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(19),  $\exists b_y \in B^{r_y}$ , 使

$$C\hat{x}(k+1) - y(k+1) = FG_v b_y. \quad (20)$$

将式(17)代入(20), 得

$$CQ_G(k+1)b_x = y(k+1) + FG_v b_y - CQ_p(k+1). \quad (21)$$

将式(21)代入(18)得

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \\ Q_p(k+1) + \lambda(k)[y(k+1) + FG_v b_y - & \\ CQ_p(k+1)] + [I - \lambda(k)C]Q_G(k+1)b_x &= \\ Q_p(k+1) + \lambda(k)[y(k+1) - CQ_p(k+1)] + & \\ [I - \lambda(k)C]Q_G(k+1)b_x + \lambda(k)FG_v b_y &= \\ Q_p(k+1) + \lambda(k)[y(k+1) - CQ_p(k+1)] + & \\ [(I - \lambda(k)C)Q_G(k+1) \quad \lambda(k)FG_v][b_x \quad b_y]^T. & \end{aligned}$$

由于  $b_x \in B^{r_x}$  且  $b_y \in B^{r_y}$ , 有

$$[b_x \quad b_y]^T \in B^{r_x+r_y}.$$

根据定义1可知, 存在参数  $\lambda(k)$ , 使  $k+1$  时刻系统状态的估计值  $\hat{x}(k+1) = \langle \hat{p}(k+1), \hat{G}(k+1) \rangle$ , 其中

$$\begin{aligned} \hat{p}(k+1) &= Q_p(k+1) + \lambda(k)[y(k) - CQ_p(k+1)], \\ \hat{G}(k+1) &= [(I - \lambda(k)C)Q_G(k+1) \quad \lambda(k)FG_v]. \end{aligned}$$

证毕.  $\square$

## 3 基于P范数的多胞空间滤波器设计

在前面给出的时滞系统状态可行集的多胞空间表征过程中, 式(14)和(15)均包含了  $k-h$  时刻带来的含时滞项. 可见, 需要按照  $0 < k \leq h$  和  $k > h$  两种情况分别讨论多胞空间滤波器设计问题.

### 3.1 $0 < k \leq h$ 时的多胞空间滤波器设计

在  $0 < k \leq h$  时, 系统状态量所产生的时滞尚未作用于系统. 本节针对该情形, 分析基于  $P$  范数的多胞空间滤波器设计问题.

**定理2**  $0 < k \leq h$  时, 使当前  $k$  时刻多胞空间  $P$  范数最小的  $\lambda(k)$  为如下LMI优化问题的解:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma \in (0,1]} \gamma; \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} \gamma P & 0 & 0 & A^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ * & Q_w & 0 & G_w^T D^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ * & * & Q_v & G_v F \lambda(k) P \\ * & * & * & P \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$Q_w = G_w^T D^T P D G_w, \tag{23}$$

$$Q_v = G_v^T F^T P F G_v. \tag{24}$$

**证明** 针对系统(1),考虑到系统状态的最优估计所构成的可行集具有收缩性, $k + 1$ 时刻多胞体的  $P$  范数满足

$$l(k + 1) \leq \gamma l(k) + \varepsilon(k), \quad \gamma \in (0, 1]. \tag{25}$$

其中: $\gamma \in (0, 1]$ 为多胞体膨胀系数, $\varepsilon(k)$ 用于描述  $k$  时刻系统时滞项、控制量和噪声的影响.由于在  $0 < k \leq h$  时,系统尚未产生时滞项,有

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) = & \|Bu(k)\|_P^2 + \max_{b_w \in B^{r_w}} \|DG_w b_w\|_P^2 + \max_{b_v \in B^{r_v}} \|FG_v b_v\|_P^2. \end{aligned} \tag{26}$$

将式(5)和(26)代入(25)有

$$\begin{aligned} & \max_{b_{k+1} \in B^{r_x+r_u+r_w+r_v}} \|\hat{G}(k + 1)b_{k+1}\|_P^2 \leq \\ & \gamma \max_{b_k \in B^{r_x}} \|\hat{G}(k)b_k\|_P^2 + \|Bu(k)\|_P^2 + \\ & \max_{b_w \in B^{r_w}} \|DG_w b_w\|_P^2 + \max_{b_v \in B^{r_v}} \|FG_v b_v\|_P^2, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & \max_{b_{k+1} \in B^{r_x+r_u+r_w+r_v}} \|\hat{G}(k + 1)b_{k+1}\|_P^2 - \\ & \gamma \max_{b_k \in B^{r_x}} \|\hat{G}(k)b_k\|_P^2 - \max_{b_w \in B^{r_w}} \|DG_w b_w\|_P^2 - \\ & \max_{b_v \in B^{r_v}} \|FG_v b_v\|_P^2 \leq \|Bu(k)\|_P^2. \end{aligned} \tag{27}$$

由于  $\|Bu(k)\|_P^2 \geq 0$ ,式(27)成立的一个充分条件为

$$\begin{aligned} & \max_{b_{k+1} \in B^{r_x+r_u+r_w+r_v}} \|\hat{G}(k + 1)b_{k+1}\|_P^2 - \\ & \gamma \max_{b_k \in B^{r_x}} \|\hat{G}(k)b_k\|_P^2 - \max_{b_w \in B^{r_w}} \|DG_w b_w\|_P^2 - \\ & \max_{b_v \in B^{r_v}} \|FG_v b_v\|_P^2 \leq 0. \end{aligned} \tag{28}$$

式(28)可写为

$$\begin{bmatrix} \gamma P & 0 & 0 \\ * & G_w^T D^T P D G_w & 0 \\ * & * & G_v^T F^T P F G_v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ G_w^T D^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ G_v F \lambda(k) P \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} A^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ G_w^T D^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ G_v F \lambda(k) P \end{bmatrix}^T \geq 0.$$

$$\begin{aligned} & [\hat{G}(k + 1)b_{k+1}]^T P [\hat{G}(k + 1)b_{k+1}] - \\ & \gamma [\hat{G}(k)b_k]^T P [\hat{G}(k)b_k] - (DG_w b_w)^T P (DG_w b_w) - \\ & (FG_v b_v)^T P (FG_v b_v) \leq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$b_{k+1} = [b_k^T \quad b_w^T \quad b_v^T]^T. \tag{30}$$

在  $0 < k \leq h$  时,不存在  $A_h \hat{G}(k - h)$  代表的时滞项.对式(30)等号左右两边同时左乘矩阵  $\hat{G}(k + 1)$ ,结合式(13)~(15),可得

$$\begin{aligned} \hat{G}(k + 1)b_{k+1} = & \begin{bmatrix} [I - \lambda(k)C]A\hat{G}(k) \\ [I - \lambda(k)C]DG_w \\ \lambda(k)FG_v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_k^T \\ b_w^T \\ b_v^T \end{bmatrix} = \\ & [I - \lambda(k)C]A\hat{G}(k)b_k^T + [I - \\ & \lambda(k)C]DG_w b_w^T + \lambda(k)FG_v b_v^T. \end{aligned} \tag{31}$$

记  $\hat{G}(k)b_k^T = \theta_k$ ,将式(31)的等号右侧部分代入式(29),则式(29)等价于

$$\begin{bmatrix} \theta_k^T \\ b_w^T \\ b_v^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ * & A_{22} & A_{23} \\ * & * & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k^T \\ b_w^T \\ b_v^T \end{bmatrix} \leq 0. \tag{32}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} = & [(I - \lambda(k)C)A]^T P (I - \lambda(k)C)A - \gamma P, \\ A_{12} = & [(I - \lambda(k)C)A]^T P (I - \lambda(k)C)DG_w, \\ A_{13} = & [(I - \lambda(k)C)A]^T P \lambda(k)FG_v, \\ A_{22} = & [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P [(I - \\ & \lambda(k)C)DG_w] - (DG_w)^T P (DG_w), \\ A_{23} = & [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P \lambda(k)FG_v, \\ A_{33} = & [\lambda(k)FG_v]^T P [\lambda(k)FG_v] - \\ & (FG_v)^T P (FG_v). \end{aligned}$$

此时,基于  $P$  范数的多胞空间滤波器设计问题转化为构造半负定矩阵问题,即

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ * & A_{22} & A_{23} \\ * & * & A_{33} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{33}$$

将式(33)改写为

根据舒尔补引理可知, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} \gamma P & 0 & 0 & A^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ * & Q_w & 0 & G_w^T D^T(I - \lambda(k)C)^T P \\ * & * & Q_v & G_v F \lambda(k) P \\ * & * & * & P \end{bmatrix} \geq 0.$$

其中

$$Q_w = G_w^T D^T P D G_w, \\ Q_v = G_v^T F^T P F G_v.$$

证毕.  $\square$

通过利用YALMIP和Mosek求解器, 可以直接求解定理2给出的LMI优化问题, 得到使多胞体尺寸最小的参数 $\lambda(k)$ , 随后代入定理1, 即可得出 $0 < k \leq h$ 时系统的最优状态估计.

### 3.2 $k > h$ 时的滤波器设计

在 $k > h$ 时, 对 $k + 1$ 时刻系统状态的分析需要考虑 $k - h$ 时刻系统时滞项对系统真实状态的影响, 进而设计 $k > h$ 时的多胞空间滤波器.

**定理3**  $k > h$ 时, 使当前 $k$ 时刻多胞空间P范数最小的 $\lambda(k)$ 为如下LMI优化问题的解:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma \in (0, 1]} \gamma'; \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & \alpha_2 & 0 & 0 \\ * & * & \alpha_3 & 0 \\ * & * & * & \alpha_4 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} ((I - \lambda(k)C)A)^T P \\ ((I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - h))^T P \\ ((I - \lambda(k)C)DG_w)^T P \\ (\lambda(k)FG_v)^T P \\ P \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\alpha_1 = \gamma' P, \quad (35)$$

$$\alpha_2 = [A_h \hat{G}(k - h)]^T P [A_h \hat{G}(k - h)], \quad (36)$$

$$\alpha_3 = (DG_w)^T P (DG_w), \quad (37)$$

$$\alpha_4 = (FG_v)^T P (FG_v). \quad (38)$$

**证明** 由多胞体的迭代收缩性得

$$l(k + 1) \leq \gamma' l(k) + \varepsilon'(k), \quad \gamma' \in (0, 1]. \quad (39)$$

其中 $\varepsilon'(k)$ 用于描述时滞项、控制量和噪声的影响, 表示为

$$\varepsilon'(k) = \max_{b_h \in B^{r_x}} \|A_h \hat{x}(k - h) b_h\|_P^2 + \|Bu(k)\|_P^2 + \max_{b_w \in B^{r_w}} \|DG_w b_w\|_P^2 + \max_{b_v \in B^{r_v}} \|FG_v b_v\|_P^2.$$

类似地, 式(39)成立的一个充分条件为

$$\begin{aligned} & [\hat{G}(k + 1)b_{k+1}]^T P [\hat{G}(k + 1)b_{k+1}] - \\ & \gamma' [\hat{G}(k)b_k]^T P [\hat{G}(k)b_k] - \\ & [A_h \hat{G}(k - h)b_h]^T P [A_h \hat{G}(k - h)b_h] - \\ & (DG_w b_w)^T P (DG_w b_w) - \\ & (FG_v b_v)^T P (FG_v b_v) \leq 0. \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$b_{k+1} = [b_k^T \quad b_h^T \quad b_w^T \quad b_v^T]^T. \quad (41)$$

将式(41)等号左右两边同时左乘矩阵 $\hat{G}(k + 1)$ , 结合式(13)~(15), 可得

$$\begin{aligned} & \hat{G}(k + 1)b_{k+1} = \\ & \begin{bmatrix} [I - \lambda(k)C]A \hat{G}(k) \\ [I - \lambda(k)C]A_h \hat{G}(k - h) \\ [I - \lambda(k)C]DG_w \\ \lambda(k)FG_v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_k^T \\ b_h^T \\ b_w^T \\ b_v^T \end{bmatrix} = \\ & (I - \lambda(k)C)[A \hat{G}(k)b_k^T + A_h \hat{G}(k - h)b_h^T + DG_w b_w^T + \lambda(k)FG_v b_v^T]. \end{aligned}$$

记 $G(k)b_k^T = \theta_k$ , 将式(42)的等号右侧部分代入式(40), 则式(40)等价于

$$\begin{bmatrix} \theta_k^T \\ b_h^T \\ b_w^T \\ b_v^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ * & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ * & * & A_{33} & A_{34} \\ * & * & * & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k^T \\ b_h^T \\ b_w^T \\ b_v^T \end{bmatrix} \leq 0. \quad (42)$$

其中

$$A_{11} = [(I - \lambda(k)C)A]^T P [(I - \lambda(k)C)A] - \gamma' P,$$

$$A_{12} = [(I - \lambda(k)C)A]^T P [(I - \lambda(k)C)A] A_h \hat{G}(k - h),$$

$$A_{13} = [(I - \lambda(k)C)A]^T P [(I - \lambda(k)C)A] DG_w,$$

$$A_{14} = [(I - \lambda(k)C)A]^T P \lambda(k)FG_v,$$

$$A_{22} = [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - h)]^T P [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - h)] - [A_h \hat{G}(k - h)]^T P [A_h \hat{G}(k - h)],$$

$$A_{23} = [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - h)]^T P (I - \lambda(k)C)DG_w,$$

$$A_{24} = [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - h)]^T P \lambda(k)FG_v,$$

$$A_{33} = [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P [(I - \lambda(k)C)DG_w] - (DG_w)^T P (DG_w),$$

$$A_{34} = [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P \lambda(k)FG_v,$$

$$A_{44} = [\lambda(k)FG_v]^T P [\lambda(k)FG_v] - (FG_v)^T P (FG_v).$$

$$I' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ * & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ * & * & A_{33} & A_{34} \\ * & * & * & A_{44} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (43)$$

故,问题转化为构造如下半负定矩阵:

即

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & \alpha_2 & 0 & 0 \\ * & * & \alpha_3 & 0 \\ * & * & * & \alpha_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [(I - \lambda(k)C)A]^T P \\ [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - 1 - h)]^T P \\ [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P \\ [\lambda(k)FG_v]^T P \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} [(I - \lambda(k)C)A]^T P \\ [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - 1 - h)]^T P \\ [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P \\ [\lambda(k)FG_v]^T P \end{bmatrix}^T \leq 0.$$

其中

$$\alpha_1 = \gamma' P,$$

$$\alpha_2 = [A_h \hat{G}(k - h)]^T P [A_h \hat{G}(k - h)],$$

$$\alpha_3 = (DG_w)^T P (DG_w),$$

$$\alpha_4 = (FG_v)^T P (FG_v).$$

根据舒尔补引理,将求解当前时刻多胞空间  $P$  范数最小的问题转化为如下LMI优化问题:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & [(I - \lambda(k)C)A]^T P \\ * & \alpha_2 & 0 & 0 & [(I - \lambda(k)C)A_h \hat{G}(k - h)]^T P \\ * & * & \alpha_3 & 0 & [(I - \lambda(k)C)DG_w]^T P \\ * & * & * & \alpha_4 & (\lambda(k)FG_v)^T P \\ * & * & * & * & P \end{bmatrix} \geq 0.$$

证毕. □

### 4 仿真分析

为了验证算法的有效性,选取风力发电机液压变桨执行器模型进行仿真验证和对比. 对于算法中的LMI问题,采用YALMIP和Mosek求解器求解.

#### 4.1 仿真对象描述

三叶片变速水平轴风力发电机系统结构如图1<sup>[13]</sup>所示.

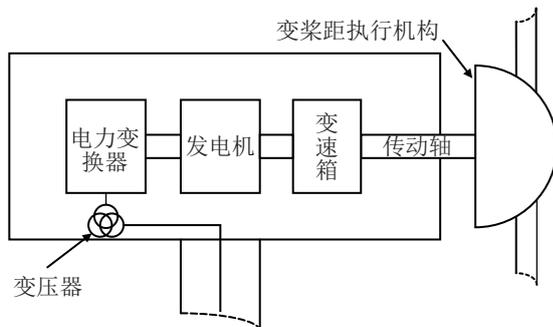


图1 风力发电机系统结构

风力发电机液压变桨距执行机构的状态空间可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\beta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \beta_r. \quad (44)$$

其中:  $\beta$  为俯仰角,  $\beta_a$  为风机角速度,  $\beta_r$  为参考值, 自然频率  $\omega_n$  和阻尼比  $\xi$  为系统参数.

相关参数设定依据文献[13],取  $\omega_n = 5.73 \text{ rad/s}$ ,  $\xi = 0.45$ , 并取  $T = 0.2 \text{ s}$ . 对式(45)进行离散化处理, 求得系统参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5677 & 0.0996 \\ -3.2713 & 0.0538 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4323 \\ 3.2713 \end{bmatrix}.$$

考虑系统噪声项和时滞项,取

$$A_h = \begin{bmatrix} -0.005 & -0.003 \\ 0.004 & -0.003 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

系统观测矩阵  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$ , 输入信号  $u(k) = \sin(6k)$ , 包裹系统初始状态的多胞空间  $x(0) \in \langle p(0), G(0) \rangle$ ,  $p(0) = [1 \ 3]^T$ ,  $G(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 系统的噪声生成矩阵  $G_w = 0.1$ ,  $G_v = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ .

#### 4.2 算法对比分析

为了验证本文提出的算法的性能,选取文献[7]给出的 ellipsoidal state-bounding-based set-membership estimation (ES-SME) 算法和文献[8]给出的 zonotopic strip-based observer PRad-A (PRad-A) 算法进行对比,仿真结果如图2和图3所示. 由图2和图3可以看出,3种滤波算法得到的状态估计上下界均能够包裹状态真值. 相比而言,本文提出的PR-ZF-TDS算法能够更加紧致地包裹系统真实状态,具有更低的保守性. 通过放大对比可以看出,本文算法计算出的估计上下界的差值比其他算法更小,响应更快,验证了PR-ZF-TDS算法具有更好的收敛性.

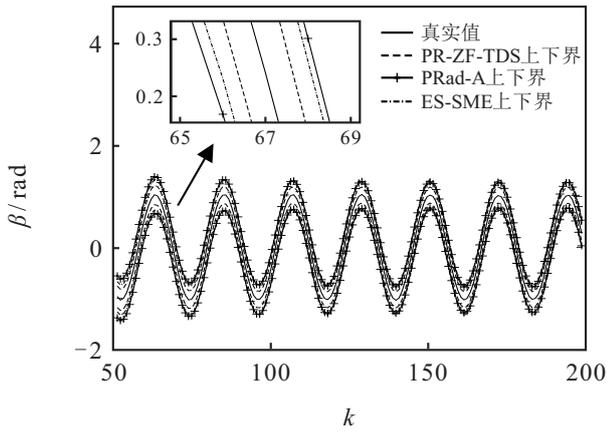


图2  $\beta$  状态估计曲线对比

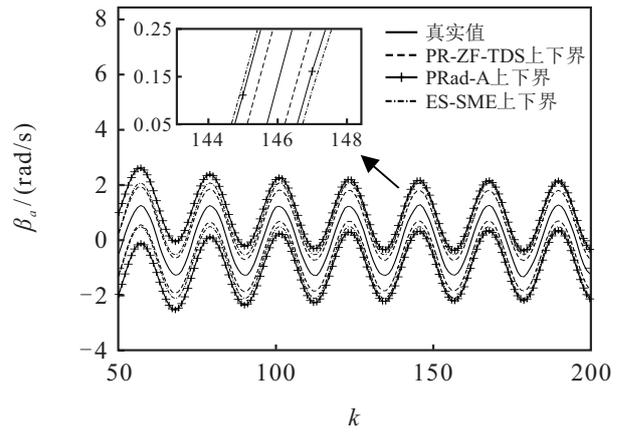
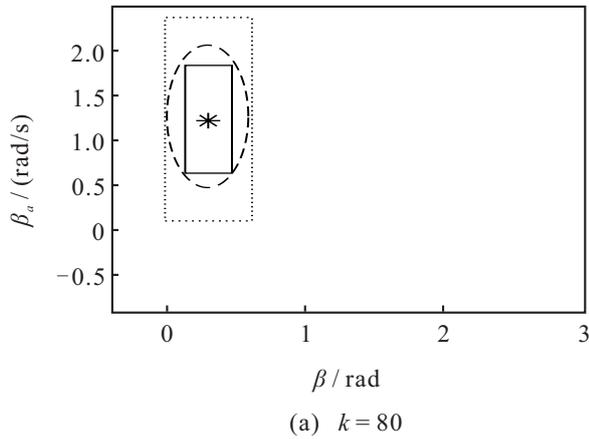


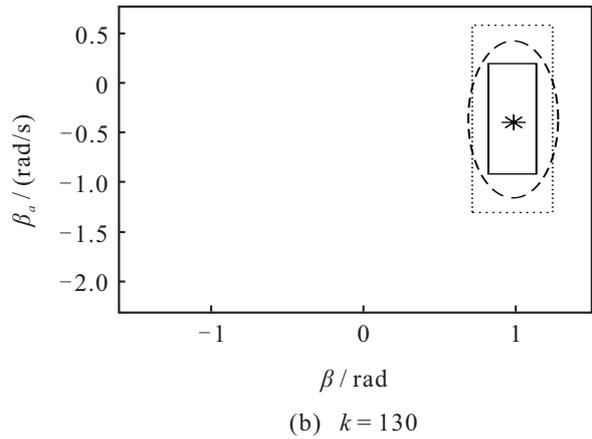
图3  $\beta_a$  状态估计曲线对比

图4展示的是不同时刻包裹系统真实状态的空间结构变化对比. 其中:\*代表该时刻的状态真值,实线矩形所包裹区域为PR-ZF-TDS算法计算所得的多胞空间,点线矩形区域为PRad-A算法所得的可行集,

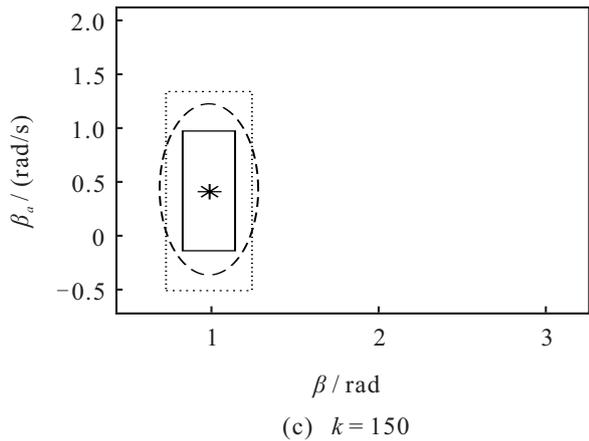
虚线椭圆为ES-SME算法所得的椭球可行集. 通过图4可以更加直观地看出,本文提出的PR-ZF-TDS算法能够针对时滞系统真实状态给出更紧致空间包裹,算法的保守性更小.



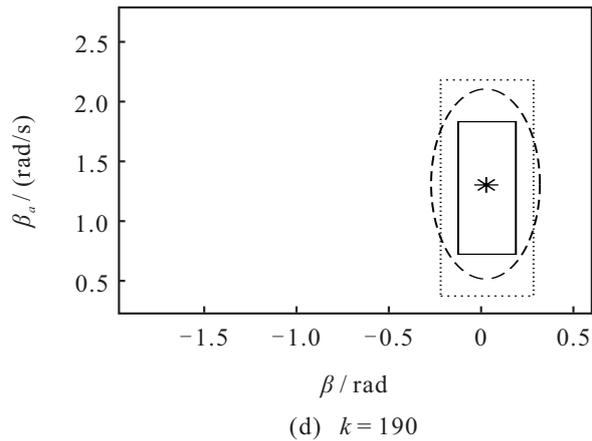
(a)  $k = 80$



(b)  $k = 130$



(c)  $k = 150$



(d)  $k = 190$

图4 状态可行集空间演化对比

### 5 结论

本文针对线性时滞系统的状态估计问题,提出了基于P范数的时滞系统多胞空间滤波算法. 利用未知但有界噪声约束,构造多胞空间对系统状态可行集作空间表征,随后利用P范数最小准则,分别针对非时滞和时滞情形,设计多胞空间膨胀系数得出P范数

最小条件下的多胞空间收缩的充分条件,求解多胞空间最优参数,并利用降阶步骤得到多胞可行集和状态估计上下界. 最后,采用风力发电系统进行仿真,验证了算法的有效性. 本文提出的方法可以解决噪声不确定条件下线性时滞系统的状态估计问题,进而可以推广到解决机械传动系统、通信系统存在的时滞

状态估计工程问题.

### 参考文献(References)

- [1] 宋云霞, 周彬. 具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 562-568.  
(Song Y X, Zhou B. Stability analysis of integral delays systems with multiple time-delays[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 562-568.)
- [2] Lee S M, Son H. Prediction-based preview control of motion platform with time delay[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(12): 23346-23357.
- [3] Zhang C K, Long F, He Y, et al. A relaxed quadratic function negative-determination lemma and its application to time-delay systems[J]. Automatica, 2020, 113: 108764.
- [4] 李可非, 马晓川, 刘宇, 等. 基于转换量测容积卡尔曼滤波器带多普勒量测的目标跟踪算法[J]. 控制与决策, 2021, 36(6): 1425-1434.  
(Li K F, Ma X C, Liu Y, et al. Converted measurement cubature Kalman filter for Doppler-assisted target tracking[J]. Control and Decision, 2021, 36(6): 1425-1434.)
- [5] Zhan Y C, Wang Z Y, Wang Y, et al. A novel hybrid filter-based fault diagnosis algorithm for switched systems with a dual noise term[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(7): 4626-4639.
- [6] Zhao Z Y, Wang Z D, Zou L, et al. Zonotopic multi-sensor fusion estimation with mixed delays under try-once-discard protocol: A set-membership framework[J]. Information Fusion, 2023, 91: 681-693.
- [7] Liu Y S, Zhao Y, Wu F L. Ellipsoidal state-bounding-based set-membership estimation for linear system with unknown-but-bounded disturbances[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(4): 431-442.
- [8] Althoff M, Rath J J. Comparison of guaranteed state estimators for linear time-invariant systems[J]. Automatica, 2021, 130: 109662.
- [9] Wang J, Lv X Y, Meng Z, et al. An integrated design method for active fault diagnosis and control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(10): 5583-5603.
- [10] Zhang W H, Wang Z H, Guo S H, et al. Interval estimation of sensor fault based on zonotopic Kalman filter[J]. International Journal of Control, 2021, 94(6): 1641-1650.
- [11] Wang X D, Wang G Q, Li Z, et al. Event-based fault estimation and compensation for discrete-time systems via zonotopes[J]. Information Sciences, 2023, 631: 1-14.
- [12] Turki F, Gritli H, Belghith S. An LMI-based design of a robust state-feedback control for the master-slave tracking of an impact mechanical oscillator with double-side rigid constraints and subject to bounded-parametric uncertainty[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 82: 105020.
- [13] Rahnavard M, Ayati M, Hairi Yazdi M R, et al. Finite time estimation of actuator faults, states, and aerodynamic load of a realistic wind turbine[J]. Renewable Energy, 2019, 130: 256-267.

### 作者简介

沈谦逸(2003—), 男, 本科生, 主要研究方向为控制系统滤波理论和优化控制, E-mail: q\_y\_shen@126.com;

王子赞(1989—), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为复杂系统故障诊断和滤波理论, E-mail: wangzy0601@163.com;

王艳(1978—), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为生产过程建模与优化控制, E-mail: yanwang@jiangnan.edu.cn.