

# 控制与决策

Control and Decision

可解释非线性灰色Bernoulli模型及其在结构疲劳寿命预测的应用

杨璐, 徐秋慧, 谢乃明

引用本文:

杨璐, 徐秋慧, 谢乃明. 可解释非线性灰色Bernoulli模型及其在结构疲劳寿命预测的应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(9): 2833–2840.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0015>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

时滞累积TDAGM (1,N,t) 模型及其在粮食生产中的应用

[Time-delayed accumulative TDAGM \(1, N, t\) model and its application in grain production](#)

控制与决策. 2021, 36(8): 2002–2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

基于数据驱动的浓密-压滤过程协调优化控制

Data driven coordinated optimization control of thickening-filter process

控制与决策. 2021, 36(5): 1095–1100 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1151>

基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型

[Multi-component system state space partition model based on Markov process](#)

控制与决策. 2021, 36(2): 418–428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

[Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering](#)

控制与决策. 2021, 36(12): 2946–2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

考虑退化轨迹差异性与相似性的轴承RUL预测

Prediction of bearing remaining useful life involving difference and similarity of degradation trajectories

控制与决策. 2021, 36(11): 2833–2840 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1028>

# 可解释非线性灰色 Bernoulli 模型及其 在结构疲劳寿命预测的应用

杨璐<sup>1</sup>, 徐秋慧<sup>3</sup>, 谢乃明<sup>2†</sup>

(1. 南京农业大学 信息与管理学院, 南京 211800; 2. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106;  
3. 南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

**摘要:** 金属疲劳裂纹是导致航空飞行器结构失效的最常见损伤, 准确、有效地对结构疲劳裂纹扩展进行预测, 对于飞行器研制以及运营全寿命周期提供维护方案具有重要意义, 是航空工业界和学界共同关注的重要问题。针对飞行器结构疲劳寿命预测问题, 首先, 在现有的非线性灰色 Bernoulli 模型的基础上, 提出一种可解释累积和算子, 明晰累积和算子的物理意义, 并基于该算子导出改进的非线性灰色 Bernoulli 模型; 然后, 引入可分非线性最小二乘法构建参数估计算法, 以实现模型结构参数、幂指数以及初值条件的同步估计; 最后, 通过飞行器蒙皮搭接结构的疲劳试验对所提出方法进行有效性验证, 并进行算法对比。实验结果表明, 模型对两个试件裂纹扩展预测结果的均方根误差均小于 1.9 mm, 验证了方法的有效性。所提出方法对于飞行器结构疲劳寿命预测领域具有重要的技术价值, 对于类似的复杂装备结构疲劳寿命问题具有一定的借鉴意义。

**关键词:** 可解释累积和算子; 非线性灰色 Bernoulli 模型; 可分非线性最小二乘; 飞行器搭接结构; 疲劳寿命预测  
**中图分类号:** N941.5 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2025.0015

**引用格式:** 杨璐, 徐秋慧, 谢乃明. 可解释非线性灰色 Bernoulli 模型及其在结构疲劳寿命预测的应用 [J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2833-2840.

## Physics-perserving nonlinear grey Bernoulli model and applications to fatigue life prediction

YANG Lu<sup>1</sup>, XU Qiu-hui<sup>3</sup>, XIE Nai-ming<sup>2†</sup>

(1. College of Information Management, Nanjing Agricultural University, Nanjing 211800, China; 2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 3. State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Metal fatigue cracks are one of the most common causes of structural failure in aircrafts. Accurate and effective prediction of fatigue crack propagation is crucial for developing design and maintenance strategies throughout the lifecycle of aircrafts. This issue is of significant concern to both the aerospace industry and academia. Therefore, based on the classical nonlinear grey Bernoulli model, we propose a physics-perserving cumulative sum operator, making it more interpretable. On this basis, we derive an improved form of the nonlinear grey Bernoulli model. Furthermore, separable nonlinear least squares is formulated to generate simultaneous estimates of structural parameters, power parameter and initial condition. The proposed method is validated through fatigue tests on aircraft skin lap structures and compared with other algorithms. The results demonstrate that the root mean square errors of crack propagation predictions are less than 1.9 mm for all structures, confirming the effectiveness of the proposal. This approach provides significant technical value for predicting the fatigue life of aircraft structures and offers valuable insights for predicting metal fatigue cracks in similar complex equipment.

**Keywords:** physics-perserving cumulative sum operator; nonlinear grey Bernoulli model; separable nonlinear least squares; aircraft lap joint structures; fatigue life prediction

收稿日期: 2025-01-06; 录用日期: 2025-05-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (92367301, 72171116, 72301140); 南京航空航天大学中央高校基本科研业务费项目 (NP2024203); 江苏省 333 高层次人才培养计划项目.

责任编辑: 马大中.

†通信作者. E-mail: xienaiming@nuaa.edu.cn.

## 0 引言

飞行器结构安全是保证其性能实现的前提。然而,飞行器在服役过程中不仅受到偶发冲击和长期疲劳载荷的影响,还面临严酷的外部环境条件,这些因素可能会导致结构表面或内部发生各种类型的损伤,最终导致结构失效<sup>[1]</sup>。在所有类型的损伤中,金属疲劳是最常见的失效模式之一<sup>[2]</sup>。结构的疲劳寿命通常定义为导致疲劳失效的载荷循环次数,或从载荷加载开始到发生断裂的时间<sup>[3]</sup>。准确有效地预测结构寿命可以:1)在设计阶段,优化设计以平衡可靠性与成本效益;2)在运行阶段,允许提前检测潜在故障并采取及时维护措施,从而防止事故发生;3)在使用寿命结束后,决定是否需要重新制造或回收结构,实现经济效益与安全性的平衡<sup>[4]</sup>。在此背景下,及时准确地预测结构疲劳裂纹扩展以及完整性评估至关重要<sup>[5]</sup>。

目前,以预测技术为核心的故障预测和健康管理 (prognostics and health management, PHM) 技术在航空工业领域得到了广泛应用和发展<sup>[6]</sup>,主要可分为物理驱动方法和数据驱动方法:物理驱动的方法通过对疲劳裂纹的力学分析建立机理模型,如:Li等<sup>[7]</sup>提出了基于贝叶斯滤波框架的修正 Paris 模型,以解决航空耳片结构单孔多裂纹预测问题;Chen等<sup>[8]</sup>利用粒子滤波算法在线更新高斯过程测量模型,实现了对结构的疲劳裂纹预测,并以单孔结构航空耳片疲劳试验进行了模型有效性验证。数据驱动的方法利用监测数据构建机器学习模型,如:袁慎芳等<sup>[9]</sup>提出了一种基于卷积神经网络的算法,解决了疲劳裂纹扩展的定量辨识问题;Zafar等<sup>[10]</sup>基于神经网络的元启发式优化算法对航空材料铝合金裂纹扩展速率进行了预测。然而,对于飞行器疲劳寿命预测问题,以上研究方法仍有不足:1)现有的研究多以单孔结构为验证对象,对于结构复杂的多孔搭接结构,其力学分析更为复杂,呈现高度非线性特点,为物理法则对裂纹扩展进行建模带来了挑战;2)机器学习方法往往需要大量的数据进行模型的学习,而疲劳裂纹数据的采集信息通常是有限的。灰色预测模型<sup>[11]</sup>结合了物理模型以及数据模型的优点,通过累积和算子非参数化地挖掘数据背后的动态演化机制,并使用微分方程对累积和序列进行建模,在处理小样本、冷启动问题上具有独特的优势<sup>[12-13]</sup>。

非线性灰色 Bernoulli 模型<sup>[14]</sup>是最具代表性的灰色预测模型之一,其幂次项使得模型能够灵活地应用于具有不同生长特征的时间序列,已被广泛应用于产品需求预测<sup>[15]</sup>、能源消耗预测<sup>[16]</sup>、交通流预

测<sup>[17]</sup>等问题。在数学上,非线性灰色 Bernoulli 模型使用 Bernoulli 微分方程对累积和序列进行建模,因此,对于该模型的理论研究主要集中在两个方面:1)模型形式的改进,如时滞模型<sup>[18]</sup>、时变模型<sup>[15]</sup>、多变量模型<sup>[19]</sup>等;2)不同形式累积和算子的构建,如分数阶累积和算子<sup>[20]</sup>、新信息优先累积和算子<sup>[21]</sup>、概率累积和算子<sup>[22]</sup>等。然而,现有的文献对于模型的机理研究仍有不足:累积和序列作为非线性 Bernoulli 模型的建模对象,其初始值通常取原始时间序列的第 1 项,这种定义在非线性灰色预测建模中的物理解释仍然不清晰<sup>[23]</sup>,且参数估计时又对初值条件进行了优化,导致参数估计过程缺乏一致性,可能使得模型陷入“过优化”陷阱。此外,模型参数估计使用两步法:首先估计结构参数,然后估计初值条件的估计值。两个阶段的目标函数的差异给参数估计引入了额外的误差<sup>[24]</sup>。

为解决上述问题,本文提出可解释累积和算子,明晰累积和的物理意义,基于该算子对非线性灰色 Bernoulli 模型进行重构和分析。同时,引入可分非线性最小二乘法 (separable least squares, SLS) 构建单步参数估计方法,以实现模型结构参数与初值条件的同步估计,规范化模型的建模步骤。最后,将所提出方法应用于飞行器搭接结构的疲劳寿命预测问题,为结构设计和维修提供可靠的决策参考。

## 1 问题描述

搭接结构是最常见的飞行器结构之一,该结构表面有多个铆钉孔,主要用于连接多个基材<sup>[25]</sup>。这种结构广泛应用于飞行器机身的各部分,包括机翼、尾翼和机身前中后段等,以确保整个飞机的完整性和可靠性(飞机蒙皮结构如图 1 所示)。

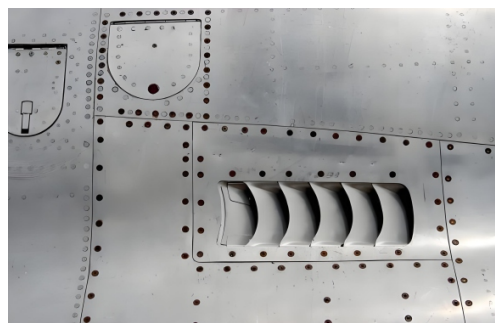


图1 飞机蒙皮搭接结构

由于搭接结构中存在多个铆钉孔,孔边应力集中,是裂纹萌生的重点部位,且疲劳裂纹对于材料属性、疲劳载荷、组装质量和表面加工以及不利环境因素等各种参数非常敏感。此外,裂纹扩展过程中局部刚度与紧固件间的载荷分布会发生变化,即使在实验室条件下,相同多孔搭接结构的裂纹扩展过程也

会表现出较大的分散性<sup>[26]</sup>. 因此, 如何通过数据模拟疲劳裂纹扩展规律是准确预测疲劳寿命的关键, 本文将针对这一问题进行探索, 开发可解释非线性灰色 Bernoulli 模型, 实现多孔搭接结构疲劳寿命预测.

## 2 基础知识

### 2.1 经典非线性灰色 Bernoulli 模型

非线性灰色 Bernoulli 模型是处理具有不同生长特征的时间序列的有效方法, 相关定义如下.

**定义 1** 设单变量时间序列  $\boldsymbol{x} = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$ , 其累积和序列为  $\boldsymbol{y} = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)\}$ . 其中

$$y(t_k) = \begin{cases} x(t_1), & k = 1; \\ x(t_1) + \sum_{i=2}^k h_i x(t_i), & k \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

为累积和算子, 且  $h_k = t_k - t_{k-1} (k \geq 2)$  为时间间隔. 相应地, 称

$$x(t_k) = \begin{cases} x(t_1), & k = 1; \\ \frac{1}{h_k} [y(t_k) - y(t_{k-1})], & k \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

为逆累积和算子.

**定义 2** 非线性灰色 Bernoulli 模型的白化方程<sup>[14]</sup>为

$$\frac{d}{dt} y(t) = a_1 y(t) + a_2 [y(t)]^r, \quad (3)$$

其中:  $a_1$  和  $a_2$  为未知的结构参数;  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  为未知的幂指数, 可控制解轨迹的形态. 特别地, 当  $r = 0$  时, 模型退化为 GM(1, 1) 模型<sup>[27]</sup>; 当  $r = 2$  时, 模型退化为灰色 Verhulst 模型<sup>[28]</sup>.

### 2.2 两步法参数估计

传统的模型参数估计使用两阶段的方法, 即第 1 阶段估计模型的结构参数, 第 2 阶段估计模型的初值条件, 具体过程总结如下.

结构参数估计: 运用隐式中点公式, 式 (3) 可离散化为

$$x(t_k) = a_1 \left[ \frac{1}{2} y(t_k) + \frac{1}{2} y(t_{k-1}) \right] + a_2 \left[ \frac{1}{2} y(t_k) + \frac{1}{2} y(t_{k-1}) \right]^r, \quad (4)$$

式中包含参数  $(a_1, a_2)$  和非线性幂指数  $r$ . 若假设幂指数  $r$  已知, 则结构参数可视作  $r$  的函数. 将时刻  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  代入式 (4), 整理得到目标函数为

$$\arg \min_{a_1, a_2} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Theta}(r) [a_1(r) \ a_2(r)]^T\|, \quad (5)$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta}(r) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} y(t_1) + \frac{1}{2} y(t_2) & \left[ \frac{1}{2} y(t_1) + \frac{1}{2} y(t_2) \right]^r \\ \frac{1}{2} y(t_2) + \frac{1}{2} y(t_3) & \left[ \frac{1}{2} y(t_2) + \frac{1}{2} y(t_3) \right]^r \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} y(t_{n-1}) + \frac{1}{2} y(t_n) & \left[ \frac{1}{2} y(t_{n-1}) + \frac{1}{2} y(t_n) \right]^r \end{bmatrix}.$$

使用普通最小二乘法求解线性回归问题 (5), 可得到结构参数的估计值为

$$[\hat{a}_1(r) \ \hat{a}_2(r)]^T = [\boldsymbol{\Theta}(r)^T \boldsymbol{\Theta}(r)]^{-1} \boldsymbol{\Theta}(r)^T \boldsymbol{x}. \quad (6)$$

然后, 求解幂指数  $r$ , 将结构参数的估计值 (6) 代入式 (4), 且最小化以下最小平方和误差准则:

$$\mathcal{L}(r) = \sum_{k=2}^n \left\{ x(t_k) - \hat{a}_1(r) \left[ \frac{1}{2} y(t_k) + \frac{1}{2} y(t_{k-1}) \right] - \hat{a}_2(r) \left[ \frac{1}{2} y(t_k) + \frac{1}{2} y(t_{k-1}) \right]^r \right\}^2, \quad (7)$$

可得到幂指数的估计值  $\hat{r}$ .

初值条件估计: 将结构参数和幂指数的估计值代入白化方程 (4) 的解轨迹 (求解过程可参见文献 [23]), 可得到时间响应方程为

$$\check{y}(t, \hat{a}_1(\hat{r}), \hat{a}_2(\hat{r}), \hat{r}; \eta_y) = \left[ \left( \eta_y^{1-\hat{r}} + \frac{\hat{a}_2(\hat{r})}{\hat{a}_1(\hat{r})} \right) \times \exp(\hat{a}_1(\hat{r})(1-\hat{r})(t-t_1)) - \frac{\hat{a}_2(\hat{r})}{\hat{a}_1(\hat{r})} \right]^{\frac{1}{1-\hat{r}}}, \quad (8)$$

其中  $\eta_y$  为未确定的初值条件. 通常模型的初值条件选用原始数据的第 1 个值, 即  $\hat{\eta}_y = x(t_1)$ ; 或以残差建立目标函数, 即

$$\mathcal{L}(\eta_y) = \sum_{k=1}^n [y(t_k) - \check{y}(t_k, \hat{a}_1(\hat{r}), \hat{a}_2(\hat{r}), \hat{r}; \eta_y)]^2. \quad (9)$$

优化式 (9) 可得到初值条件的估计值  $\hat{\eta}_y$  以及相应的时间响应式  $\hat{y}(t, \hat{a}_1(\hat{r}), \hat{a}_2(\hat{r}), \hat{r}, \hat{\eta}_y)$ . 将离散时刻  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n+p}\}$  代入时间响应式, 可得到累积和序列的预测值  $\{\hat{y}(t_1), \hat{y}(t_2), \dots, \hat{y}(t_{n+p})\}$ . 将逆累积和算子 (2) 运用于累积和序列的预测值  $\{\hat{y}(t_1), \hat{y}(t_2), \dots, \hat{y}(t_{n+p})\}$ , 可得到原始序列的预测值  $\{\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2), \dots, \hat{x}(t_{n+p})\}$ . 其中:  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n+p}\}$  为指定的采样间隔,  $p \in \mathbb{N}$  为预测步长.

## 3 可解释非线性灰色 Bernoulli 模型构建

### 3.1 可解释累积和算子

**引理 1** 非线性灰色 Bernoulli 模型的建模对象是累积和算子 (1), 其数学本质已被证明为一个变上限定积分算子<sup>[29]</sup>, 有

$$y(t) = x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} x(s) ds, \quad (10)$$

累积和算子 (1) 为积分算子 (10) 的左矩形离散化形

式,具有一阶离散精度.

根据引理 1, 累积和  $y(t)$  为状态  $x(t)$  的积分; 反之, 状态  $x(t)$  为累积和  $y(t)$  的导数. 根据对累积和算子的朴素理解, 累积和序列的第 1 项  $y(t_1)$  通常设定为  $x(t_1)$ . 然而, 对于真实的动态系统, 这一设定往往不符合物理规律. 如: 当累积量  $y(t)$  为“位移”, 其导数  $x(t)$  为“速度”, 此时设定位移的初始值等于此刻的速度, 即  $y(t_1) = x(t_1)$ , 显然违背物理意义. 因此, 考虑累积和算子的物理意义, 本文将累积和算子的初值条件定义为未知量, 以显式表征未观测序列的累积量, 并结合数值积分的二阶精度公式, 提出了可解释的累积和算子, 具体定义如下.

**定义 3** 设有单变量时间序列  $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$ , 其可解释累积和算子定义为

$$\tilde{y}(t_k) = \begin{cases} \eta_y, & k = 1; \\ \eta_y + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^k h_i [x(t_{i-1}) + x(t_i)], & k \geq 2. \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $\eta_y \in \mathbb{R}$  为未知初始值,  $h_k = t_k - t_{k-1}$  ( $k \geq 2$ ) 为时间间隔. 则  $\{\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_2), \dots, \tilde{y}(t_n)\}$  为相应的累积和序列.

图 2 为可解释累积和算子的直观解释: 累积和序列的第 1 个值  $\eta_y$  应为  $\int_{t_0}^{t_1} x(s)ds$ , 尽管  $x(t_0)$  是不可观测的.

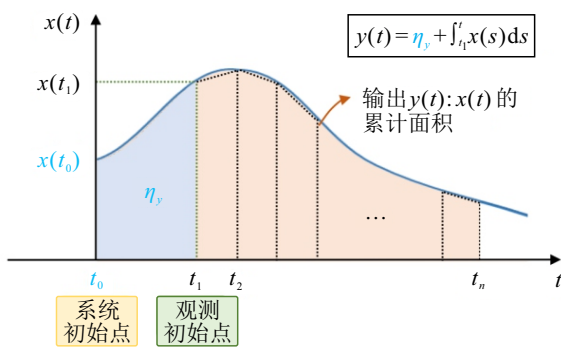


图2 可解释累积和算子的几何示意图

### 3.2 模型定义

基于可解释累积和算子, 定义可解释非线性灰色 Bernoulli 模型, 具体如下.

**定义 4** 可解释非线性灰色 Bernoulli 模型的白化方程为

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = a_1 \tilde{y}(t) + a_2 [\tilde{y}(t)]^r, \quad \tilde{y}(t_1) = \eta_y. \quad (12)$$

其中:  $a_1$  和  $a_2$  为未知的结构参数,  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  为未知的幂指数,  $\eta_y$  为未知的初值条件.

**性质 1** 结合白化方程 (12) 和累积和算子 (11),

可得到

$$x(t) = a_1 \tilde{y}(t) + a_2 [\tilde{y}(t)]^r. \quad (13)$$

由于累积和算子  $\tilde{y}(t)$  的本质为积分算子, 式 (13) 表明非线性灰色 Bernoulli 模型的本质为积分建模.

**性质 2** 白化方程 (12) 中  $\tilde{y}(t)$  显式地蕴含了模型未知的初值条件  $\eta_y$ , 因此, 基于白化方程可设计同步估计模型的结构参数和初值条件的方法 (详见下文第 3.3 节).

**性质 3** 根据模型的解轨迹 (8), 直接求导可得到逆累积和算子的解析形式, 即

$$x(t_k) = \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) |_{t=t_k}, \quad t \geq t_k. \quad (14)$$

式 (14) 为连续形式逆累积和算子.

### 3.3 结构参数与初值条件的同步估计

下面建立参数估计方法, 同步估计模型的结构参数  $(a_1, a_2)$ 、幂指数  $r$  和初值条件  $\eta_y$ , 并实现原始序列的多步预测.

与传统的隐中点公式离散化公式不同, 本文运用梯形公式离散化状态方程 (3) (两种方法均为二阶精度, 梯形公式的优势参见文献 [23]), 可得到伪线性回归表达式为

$$\frac{\tilde{y}(t_k) - \tilde{y}(t_{k-1})}{h_k} = a_1 \left[ \frac{1}{2} \tilde{y}(t_k) + \frac{1}{2} \tilde{y}(t_{k-1}) \right] + a_2 \left\{ \frac{1}{2} [\tilde{y}(t_k)]^r + \frac{1}{2} [\tilde{y}(t_{k-1})]^r \right\} + \varepsilon(k), \quad (15)$$

其中  $\varepsilon(k)$  为在  $k$  时刻观测误差以及离散化误差的总和. 观察伪回归函数 (15) 可知: 结构参数  $(a_1, a_2)$  是关于状态变量的线性可分参数, 幂指数  $(r)$  和初值条件  $(\eta_y)$  为非线性参数. 因此, 引入可分非线性最小二乘法<sup>[30]</sup>, 对结构参数、幂指数以及初值条件进行同步估计, 具体求解步骤如下.

将时刻  $k = 2, 3, \dots, n$  代入式 (15), 可得到目标函数为

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, r, \eta_y) = \|\tilde{z} - \Theta(r, \eta_y) [a_1 \ a_2]^T\|_2^2. \quad (16)$$

其中

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{y}(t_2) - \tilde{y}(t_1)}{h_2} \\ \frac{\tilde{y}(t_3) - \tilde{y}(t_2)}{h_3} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{y}(t_n) - \tilde{y}(t_{n-1})}{h_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x(t_1) + \frac{1}{2} x(t_2) \\ \frac{1}{2} x(t_2) + \frac{1}{2} x(t_3) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} x(t_{n-1}) + \frac{1}{2} x(t_n) \end{bmatrix},$$

$$\Theta(r, \eta_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{y}(t_2) + \frac{1}{2}\tilde{y}(t_1) & \frac{1}{2}[\tilde{y}(t_2)]^r + \frac{1}{2}[\tilde{y}(t_1)]^r \\ \frac{1}{2}\tilde{y}(t_3) + \frac{1}{2}\tilde{y}(t_2) & \frac{1}{2}[\tilde{y}(t_3)]^r + \frac{1}{2}[\tilde{y}(t_2)]^r \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}\tilde{y}(t_n) + \frac{1}{2}\tilde{y}(t_{n-1}) & \frac{1}{2}[\tilde{y}(t_n)]^r + \frac{1}{2}[\tilde{y}(t_{n-1})]^r \end{bmatrix}$$

首先,对可分离参数进行初步估计:将 $a_1$ 和 $a_2$ 视为 $r$ 和 $\eta_y$ 的函数,通过最小化损失函数(16),可分离参数的最小二乘估计为

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1(r, \eta_y) & \hat{a}_2(r, \eta_y) \end{bmatrix}^T = [\Theta(r, \eta_y)^T \Theta(r, \eta_y)]^{-1} \Theta(r, \eta_y)^T \tilde{z}. \quad (17)$$

然后,对非线性参数进行最终估计:将估计值(17)代入(16),目标函数可写为无约束的非线性优化问题,即

$$\mathcal{L}(r, \eta_y) = \|\tilde{z} - \Theta(r, \eta_y)[\Theta(r, \eta_y)^T \Theta(r, \eta_y)]^{-1} \Theta(r, \eta_y)^T \tilde{z}\|_2^2. \quad (18)$$

目标函数(18)是关于参数 $\hat{r}$ 和 $\hat{\eta}_y$ 的非线性函数,是一个无约束的优化问题,可使用修正牛顿法——LM算法<sup>[12]</sup>进行求解.为简化表述,将参数记为向量形式 $\vartheta$ ,且目标函数(18)等号右侧的第2项记为 $z(\vartheta)$ ,则目标函数(18)可被重写为

$$\mathcal{L}(\vartheta) = \|\tilde{z} - z(\vartheta)\|_2^2 = (\tilde{z} - z(\vartheta))^T (\tilde{z} - z(\vartheta)). \quad (19)$$

另外,将雅可比矩阵表示为 $J(\vartheta) = \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} z(\vartheta)\right)$ ,步骤如算法1所示.

算法1 LM算法.

- 
- 输入:  $\tilde{z}, z(\vartheta)$ ;  
 1.  $\vartheta = \vartheta^{(0)}$ ;  
 2. repeat  
 3.  $H(\vartheta^{(j)}) = \lambda_j I + [J(\vartheta^{(j)})]^T J(\vartheta^{(j)})$   
 4.  $g(\vartheta^{(j)}) = [J(\vartheta^{(j)})]^T [\tilde{z} - z(\vartheta^{(j)})]$   
 5.  $\vartheta^{(j+1)} = \vartheta^{(j)} - [H(\vartheta^{(j)})]^{-1} g(\vartheta^{(j)})$   
 6. until 收敛;  
 输出:  $\hat{\vartheta}$ .
- 

当LM算法满足以下收敛条件之一时停止迭代:

- 1) 参数满足收敛条件 $|\vartheta^{(j+1)} - \vartheta^{(j)}| < 10^{-5}$ ;
- 2) 目标函数满足收敛条件 $|\mathcal{J}(\vartheta^{(j+1)}) - \mathcal{J}(\vartheta^{(j)})| < 10^{-5}$ ;
- 3) 达到函数计算/迭代的最大次数 $8 \times 10^9$ . 该算法可用 Matlab 中的 lsqnonlin 程序实现. 最后,对可分离参数进行最终估计:将非线性参数的最终估计 $(\hat{\eta}_y, \hat{r})$ 代入式(17),可得到分离参数的最终估计为

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1(\hat{r}, \hat{\eta}_y) & \hat{a}_2(\hat{r}, \hat{\eta}_y) \end{bmatrix}^T = [\Theta(\hat{r}, \hat{\eta}_y)^T \Theta(\hat{r}, \hat{\eta}_y)]^{-1} \Theta(\hat{r}, \hat{\eta}_y)^T \tilde{z}. \quad (20)$$

将离散时刻 $\{t_1, t_2, \dots, t_{n+p}\}$ 以及参数的估计值代入模型并求解,可得到累积和序列的预测值为 $\{\hat{y}(t_1), \hat{y}(t_2), \dots, \hat{y}(t_{n+p})\}$ .接着使用逆累积和算子(14)求得原始序列的预测值 $\{\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2), \dots, \hat{x}(t_{n+p})\}$ .另外,由于式(8)为连续时间的解轨迹,可对任意时刻进行插值预测.

### 3.4 经典模型与可解释模型对比分析

将基于传统累积和算子的非线性灰色 Bernoulli 模型和基于可解释累积和算子的模型分别简称为经典模型和可解释模型,建模步骤如表1所示.

表1 经典模型与可解释模型的建模步骤对比

模型	经典模型	可解释模型
输入		$\{x(t_k)\}_{k=1}^n$
累积和	式(1), 一阶精度	式(11), 二阶精度
模型结构	式(3)	式(12)
参数估计	两步法: $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{r}) \rightarrow (\hat{\eta}_y)$	一步法: $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{r}, \hat{\eta}_y)$
时间响应		$\hat{y}(t; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{r}, \hat{\eta}_y)$
逆累积和	$\hat{x}(t_k) = \frac{1}{h_k} (\hat{y}(t_k) - \hat{y}(t_{k-1}))$	$\hat{x}(t_k) = \frac{d}{dt} \hat{y}(t) _{t=t_k}$

表1表明:经典模型和可解释模型建模步骤均是基于累积和的微分方程建模的.然而,由于累积和算子的定义发生了变化,导致建模过程发生了改变,具体区别总结如下:1)前者使用传统的累积和算子,其初值的物理意义不清晰,且离散格式为一阶精度;后者拟合可解释累积和序列,具备物理可解释性,离散格式为二阶精度.2)前者在参数估计阶段结构参数与初值条件估计是分离的;后者由于在可解释累积和的定义中引入了初值条件,结构参数与初值条件可同步估计,约简了其参数估计的过程.3)前者的逆累积和算子是离散形式;后者的逆累积和算子本质是连续形式,可对时间响应式直接求导得到的原始序列估计值,这种解析的表达具有更高的精度.

综上所述,基于可解释累积和算子的非线性灰色 Bernoulli 模型物理意义更明确,同时,具备结构参数与初值条件可以同步估计等优点.

## 4 案例分析:多孔搭接结构疲劳寿命预测

本案例采用飞行器铝合金蒙皮搭接结构试件为研究对象,预测其疲劳寿命,对所提出方法进行验证.本文的数据采集于南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室,结构健康监测与预测研究中心.

#### 4.1 试验装置及信号采集

搭接结构试件由两块2024-T4铝合金板组成, 每块板厚度为2 mm. 该结构具有6个铆钉孔, 其详细几何形状如图3所示.

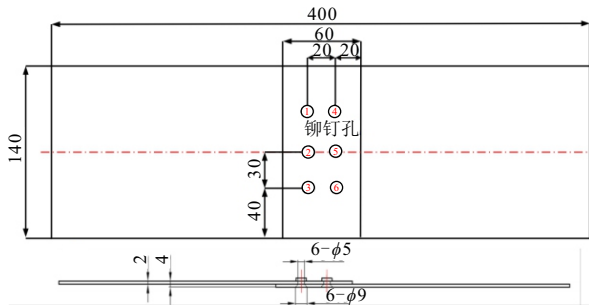


图3 搭接结构及详细尺寸信息

图4为整体的实验装置, 采用SUNS890疲劳试验系统, 主要包括结构试件、疲劳拉伸机、电子显微镜等. 试验时使用疲劳拉伸机垂直夹住试件的两端, 对其垂直施加动态载荷来模拟飞行任务次数, 使得试件产生疲劳裂纹. 动态载荷为振幅15 kN、应力比0.1的正弦载荷, 加载频率为10 Hz.

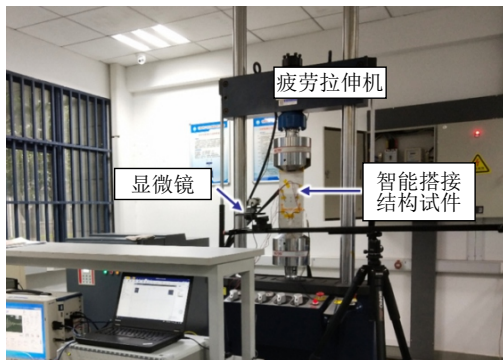


图4 试验设置

#### 4.2 数据描述

共展开4个试件的疲劳试验, 记为 $T_1 \sim T_4$ . 用数码显微镜观察并记录表面裂纹的长度, 由于试件结构包括6个铆钉孔, 每个孔边缘均有可能产生疲劳裂纹, 一旦一个部位开始产生疲劳裂纹, 其他疲劳裂纹便会很快开始萌生, 这是由于载荷的重新分配和刚度的降低, 在现役飞机结构中很普遍. 因此, 采集数据过程中将单个试件产生的多个疲劳裂纹长度总和作为试件裂纹长度, 疲劳裂纹初始采集长度为2.0 mm. 通过损伤容限分析可得到裂纹长度的失效阈值, 以表示结构所能够承受的最大裂纹长度<sup>[8]</sup>. 为方便起见, 本文采用最终记录的裂纹长度27 mm作为破坏阈值. 若裂纹长度超过该阈值, 则认为结构失效. 图5为用于试验的连接试件 $T_1 \sim T_4$ 的裂纹长度随载荷循环数(时间)变化的损伤演化情况. 由图5可见: 即使采用了相同材料和加工工艺的试件,

且加载的疲劳载荷谱也是完全一致的, 不同试件表面萌生裂纹的时间不同; 裂纹扩展曲线也呈现较为明显的差异. 4个试件的裂纹长度观测序列分别为[25, 13, 23, 22].

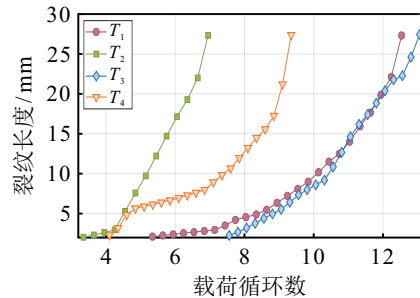


图5  $T_1 \sim T_4$ 试件裂纹演化情况

#### 4.3 疲劳裂纹扩展预测

下面将所提出可解释灰色Bernoulli模型(简称为PNGBM)应用于 $T_1 \sim T_4$ 试件的疲劳裂纹数据, 在建模过程中: 每个试件前80%数据用于训练模型, 后20%的数据用于验证模型的有效性. 同时, 选取传统灰色Bernoulli模型(NGBM)、ARIMA模型、长短记忆神经网络(LSTM)、卷积神经网络(CNN)以及前馈神经网络(FNN)等基准模型与所提出模型进行对比. 对于建模结果的评估, 采用两个误差准则: 预测误差用均方根误差(RMSE)描述, 即

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\hat{x}(t_k) - x(t_k)]^2}$$

试件的失效时间可由载荷循环数记录, 则剩余寿命预测的相对误差为

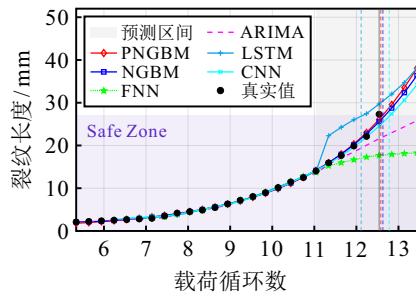
$$E_{\text{RUL}} = \frac{\|N_{\text{failure}} - \hat{N}_{\text{failure}}\|}{N_{\text{failure}}} \times 100\%$$

其中 $\hat{N}_{\text{failure}}$ 为预测的失效载荷循环数.

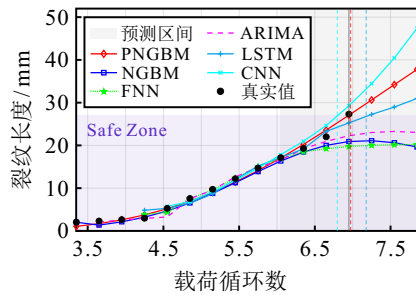
拟合以及预测的结果如图6、表2和表3所示.

图6为各模型在 $T_1 \sim T_4$ 共4个试件数据上拟合以及预测的曲线. 由图6可见, 在拟合区间内, 6种模型整体上均与真实测量值较为接近. 在预测区间, 所提出PNGBM与其他模型相比, 更能够准确地捕捉裂纹扩展的未来趋势.

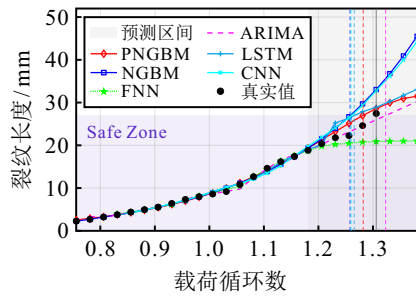
为进一步评估模型的建模效果, 计算各模型的均方根误差, 结果如表2所示. 由表2可知, 对于试验的4个试件, 所提出PNGBM模型总体表现最佳, RMSEs均小于1.9 mm, 满足工程应用要求. 进一步分析试件的剩余寿命精度, 结果如表3所示. PNGBM模型的总体表现优于各对比模型, 可以准确地预测 $T_1 \sim T_4$ 试件的疲劳剩余寿命. 注意, 对比模型在预测区间的裂纹扩展结果未达到27 mm的, 表中没有数据记录, 表明模型误差较大.



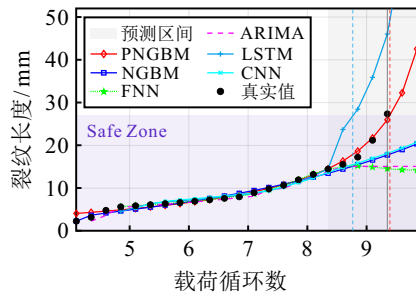
(a)  $T_1$  结构的疲劳裂纹扩展结果



(b)  $T_2$  结构的疲劳裂纹扩展结果



(c)  $T_3$  结构的疲劳裂纹扩展结果



(d)  $T_4$  结构的疲劳裂纹扩展结果

图6  $T_1 \sim T_4$  结构的疲劳裂纹预测结果

表2  $T_1 \sim T_4$  试件疲劳裂纹的预测误差 (RMSE)

	PNGBM	NGBM	ARIMA	LSTM	CNN	FNN
$T_1$	<b>0.7391</b>	0.8576	2.8019	5.5888	1.2608	5.0925
$T_2$	<b>1.0754</b>	3.9157	2.9931	1.4126	2.1259	4.6898
$T_3$	1.8878	4.0851	<b>0.7635</b>	2.8850	3.8960	3.5717
$T_4$	<b>1.0983</b>	5.4479	6.9481	13.7398	5.1309	7.2053

表3  $T_1 \sim T_4$  试件剩余寿命预测

相对误差 $E_{RUL}$						%
	PNGBM	NGBM	ARIMA	LSTM	CNN	FNN
$T_1$	<b>0.6308</b>	1.0885	9.1411	3.1531	2.0582	-
$T_2$	<b>0.0791</b>	-	-	3.7755	2.1151	-
$T_3$	1.8545	3.6340	<b>1.3806</b>	3.0191	3.4464	-
$T_4$	<b>0.4299</b>	-	-	6.1743	-	-

## 5 结论

本文在现有的非线性灰色 Bernoulli 模型基础上,提出了可解释累积和算子,提出了其对应的改进灰色 Bernoulli 模型以及规范化的建模步骤,并解决了飞行器多孔搭接结构疲劳寿命预测问题,主要工作如下: 1) 在动态系统的视角下,提出了可解释累积和算子(及其逆算子),明晰了累积和算子的物理意义,并构建了改进的可解释非线性灰色 Bernoulli 模型. 2) 引入了可分非线性最小二乘法,构建了结构参数与初值条件同步估计的参数估计方法,并将经典模型建模过程与可解释模型建模过程进行了综合比较. 3) 采用飞行器多孔搭接结构开展了疲劳裂纹试验,使用所提出可解释非线性灰色 Bernoulli 模型对试件的疲劳裂纹扩展进行了预测. 试验结果表明,所提出模型可以准确地捕捉疲劳裂纹的演化规律,展现出较高的预测精度,其建模性能显著优于对比模型.

基于预测技术的 PHM 方法将促进飞行器设计和维护向精细化方法变革,以实现飞行器结构的精准设计、视情维护和科学寿命管理. 然而,如何从数据中建立物理模型仍然是这一方法的重要挑战. 在未来的研究中,拟对模型的结构辨识进行研究,以提升模型的可解释性和预测精度.

## 参考文献 (References)

- [1] Dixit Y, Kulkarni M S. Simulation based approach for reliability and remaining useful life estimation of spur gear pair under non-Markov and non-stationary load transitions[J]. Computers & Industrial Engineering, 2024, 190: 110026.
- [2] 任元强, 严嘉慧, 袁慎芳, 等. 时变影响下导波健康 HMM 的损伤定量诊断方法[J]. 机械工程学报, 2024, 60(16): 54-61.  
(Ren Y Q, Yan J H, Yuan S F, et al. Quantitative diagnostic method of damage to the health baseline GW-HMM under time-varying influence[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(16): 54-61.)
- [3] Chen J, Yuan S F, Sbarufatti C, et al. Dual crack growth prognosis by using a mixture proposal particle filter and on-line crack monitoring[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 215: 107758.
- [4] Wang L, Zhang C, Tao C C. Prediction of multiple fatigue crack growth based on modified Paris model with particle filtering framework[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 190: 110124.
- [5] Khalid S, Song J, Azad M M, et al. A comprehensive review of emerging trends in aircraft structural prognostics and health management[J]. Mathematics, 2023, 11(18): 3837.
- [6] Kordestani M, Orchard M E, Khorasani K, et al. An overview of the state of the art in aircraft prognostic and health management strategies[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 72: 3505215.

- [7] Li T Z, Chen J, Yuan S F, et al. Particle filter-based fatigue damage prognosis by fusing multiple degradation models[J]. *Structural Health Monitoring*, 2024, 23(5): 3253-3275.
- [8] Chen J, Yuan S F, Wang H. On-line updating Gaussian process measurement model for crack prognosis using the particle filter[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 140: 106646.
- [9] 袁慎芳, 李晓泉, 陈健. 疲劳裂纹扩展的卷积神经网络辨识[J]. *航空科学技术*, 2020, 31(7): 64.  
(Yuan S F, Li X Q, Chen J. Convolutional neural network based fatigue crack growth identification[J]. *Aeronautical Science & Technology*, 2020, 31(7): 64.)
- [10] Zafar M H, Younis H B, Mansoor M. Training deep neural networks with novel metaheuristic algorithms for fatigue crack growth prediction in aluminum aircraft alloys[J]. *Materials*, 2022, 15(18): 6198.
- [11] Deng J. Introduction to grey system theory[J]. *Journal of Grey System*, 1989, 1(1): 1-24.
- [12] Wei B L. Parameter estimation strategies for separable grey system models with comparisons and applications[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 116: 32-44.
- [13] 苟小义, 米传民, 曾波, 等. 多频率信息协同下的季节性混频灰色预测模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(4): 1163-1171.  
(Gou X Y, Mi C M, Zeng B, et al. Seasonal mixing grey prediction model and its application under collaboration of multiple frequency information[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(4): 1163-1171.)
- [14] Chen C I, Chen H L, Chen S P. Forecasting of foreign exchange rates of Taiwan's major trading partners by novel nonlinear grey Bernoulli model NGBM(1,1)[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(6): 1194-1204.
- [15] Zhou H M, Dang Y G, Yang Y J, et al. An optimized nonlinear time-varying grey Bernoulli model and its application in forecasting the stock and sales of electric vehicles[J]. *Energy*, 2023, 263: 125871.
- [16] Li N L, Razia E S, Ba H N. A novel damped conformable fractional grey Bernoulli model and its applications in energy prediction with uncertainties[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2024, 130: 94-118.
- [17] Yang L, Su B T, Xie N M, et al. An IDE-based nonlinear grey Bernoulli model and applications to daily traffic flow pattern identification[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 246: 123172.
- [18] Wang R, Liu H, Yang Q W, et al. A new conformable fractional-order time-delay grey bernoulli model with the arithmetic optimization algorithm and its application in rural regional economy[J]. *Journal of Mathematics*, 2023, 2023: 17167.
- [19] Ma X, Liu Z B, Wang Y. Application of a novel nonlinear multivariate grey Bernoulli model to predict the tourist income of China[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 347: 84-94.
- [20] Zheng C L, Wu W Z, Xie W L, et al. A MFO-based conformable fractional nonhomogeneous grey Bernoulli model for natural gas production and consumption forecasting[J]. *Applied Soft Computing*, 2021, 99: 106891.
- [21] 周伟杰, 张宏如, 党耀国, 等. 新息优先累加灰色离散模型的构建及应用[J]. *中国管理科学*, 2017, 25(8): 140-148.  
(Zhou W J, Zhang H R, Dang Y G, et al. New information priority accumulated grey discrete model and its application[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2017, 25(8): 140-148.)
- [22] Zhang K, Yin K D, Yang W D. Probabilistic accumulation grey forecasting model and its properties[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 223: 119889.
- [23] Wei B L, Yang L, Xie N M. Nonlinear grey Bernoulli model with physics-preserving cusum operator[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 229: 120466.
- [24] Wei B L, Xie N M, Yang Y J. Data-based structure selection for unified discrete grey prediction model[J]. *Expert Systems with Applications*, 2019, 136: 264-275.
- [25] 陈健, 孟义兴, 袁慎芳, 等. 融合导波监测的搭接结构裂纹扩展寿命孪生预测[J]. *机械工程学报*, 2024, 60(16): 34-42.  
(Chen J, Meng Y X, Yuan S F, et al. Digital twins prediction of crack growth life for the lap joint structure combined with guided wave monitoring data[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2024, 60(16): 34-42.)
- [26] Chen J, Meng Y X, Xu Y S. A multi-layer ML model evolutionary paradigm for high-accuracy individual aircraft SHM[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2024, 144: 108824.
- [27] Wang Q, Song X X. Forecasting China's oil consumption: A comparison of novel nonlinear-dynamic grey model (GM), linear GM, nonlinear GM and metabolism GM[J]. *Energy*, 2019, 183: 160-171.
- [28] 周德强. 估计灰色 Verhulst 模型参数的 LS-SVM 方法及应用[J]. *中国管理科学*, 2022, 30(3): 280-286.  
(Zhou D Q. Estimation of grey verhulst model parameter based on LS-SVM method and its application[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2022, 30(3): 280-286.)
- [29] Wei B L, Xie N M, Yang L. Understanding cumulative sum operator in grey prediction model with integral matching[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, 82: 105076.
- [30] Gan M, Chen C L P, Chen G Y, et al. On some separated algorithms for separable nonlinear least squares problems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(10): 2866-2874.

## 作者简介

杨璐 (1994-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为灰色系统理论、动态数据分析, E-mail: [yanglu@njau.edu.cn](mailto:yanglu@njau.edu.cn);

徐秋慧 (1997-), 女, 博士生, 主要研究方向为飞行器结构损伤概率诊断方法、结构健康监测可靠性评价, E-mail: [qhx@nuaa.edu.cn](mailto:qhx@nuaa.edu.cn);

谢乃明 (1981-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为工业工程、复杂装备研制管理、灰色系统理论, E-mail: [xienaiming@nuaa.edu.cn](mailto:xienaiming@nuaa.edu.cn).