

# 基于 A-T 趋近律的非线性系统固定时间滑模控制

郑在弘, 李丹, 李平<sup>†</sup>, 陈明

(辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁鞍山 114051)

**摘要:** 为解决现有滑模控制方法在不确定非线性系统中存在的收敛速度依赖初值、鲁棒性差等问题, 提出一种新型全局固定时间滑模控制策略. 首先, 设计的固定时间扰动观测器能有效消除系统中不确定性扰动的不利影响; 其次, 使用一种新型非奇异快速终端滑模面, 它不仅成功克服了奇异性问题, 还显著提升了系统的鲁棒性, 且其收敛时间与系统初始状态无关; 再次, 通过结合反正切 ( $\arctan$ , A) 函数和双曲正切 ( $\tanh$ , T) 函数设计新的 A-T 趋近律, 有效抑制了系统抖振现象; 然后, 运用李雅普诺夫稳定理论证明固定时间扰动观测器和非奇异快速终端滑模的稳定性; 最后, 通过二连杆机械臂实验进一步验证所提出算法的控制效果.

**关键词:** 固定时间扰动观测器; 非奇异快速终端滑模控制; A-T 趋近律; 固定时间控制; 非线性系统

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0052

引用格式: 郑在弘, 李丹, 李平, 等. 基于 A-T 趋近律的非线性系统固定时间滑模控制 [J]. 控制与决策, 2025, 40(10): 2943-2949.

## Fixed-time sliding mode control of nonlinear systems based on A-T approaching law

ZHENG Zai-hong, LI Dan, LI Ping<sup>†</sup>, CHEN Ming

(School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

**Abstract:** To solve the problems of convergence speed dependence on initial value and poor robustness of existing sliding mode control methods in uncertain nonlinear systems, a new global fixed-time sliding mode control strategy is proposed. Firstly, the designed fixed-time disturbance observer effectively eliminates the adverse effects of uncertain disturbances within the system. Then, a non-singular fast terminal sliding mode surface is utilized, which not only successfully overcomes the singularity problem, but also significantly enhances the system's robustness. In addition, it ensures that the convergence time is independent of the initial states of the system. Furthermore, an A-T ( $\arctan$ - $\tanh$ ) approaching law is designed by combining arctangent and hyperbolic tangent functions. Meanwhile, the stability of fixed-time perturbation observers and non-singular fast terminal sliding modes is rigorously proved applying the Lyapunov stability theory. Finally, the experimental results of the two-joint manipulator further verify that the proposed algorithm has good control effect.

**Keywords:** fixed-time disturbance observer; non-singular fast terminal sliding mode control; A-T approaching law; fixed-time control; nonlinear systems

## 0 引言

在现代控制系统中, 非线性系统的控制问题一直是控制理论研究的重点和难点. 特别是对于不确定高阶非线性系统, 由于其本身的复杂性、不确定性及外部干扰的存在, 使得传统控制方法难以实现理想的控制效果<sup>[1-3]</sup>. 近年来, 滑模控制因其对系统参数摄动和外部干扰具有良好的鲁棒性, 在非线性系统

控制中得到了广泛应用<sup>[4]</sup>. 然而, 传统滑模控制方法在实际应用中仍存在一些问题, 如奇异性问题、抖振现象及收敛速度受初始状态影响等. 因此, 对非线性系统滑模控制问题继续深入研究具有重要的理论意义及应用价值.

为解决上述问题, 学者们已经提出了多种改进方法<sup>[5-6]</sup>. 文献 [7] 提出一种新的连续终端滑模控制

收稿日期: 2025-01-11; 录用日期: 2025-04-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (U21A20483, 62173046); 辽宁省兴辽英才计划领军人才项目 (XLYC2402002).

责任编辑: 关新平.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: liping\_USTL@163.com.

算法,通过设计非线性滑模面提高了系统的收敛速度,但仍存在奇异性问题. Cruz-Qrtiz 等<sup>[8]</sup>利用基于分布式状态约束非奇异终端滑模控制克服了奇异性问题,但系统的收敛时间仍然依赖于初始状态. 基于此,本文拟提出一种新的滑模控制方案,不仅能解决奇异性问题,还能兼顾系统的响应速度及鲁棒性.

在控制系统运行中,外部干扰和模型的不确定性对系统的性能有着显著影响,轻则导致系统响应的偏差,降低控制精度,重则引发系统的不稳定. 因此,对扰动和不确定性进行有效处理十分必要. 扰动观测器作为一种先进的控制策略,通过精确估计和补偿,进而减少干扰项对系统性能的影响,已被广泛应用于多种控制系统中<sup>[9-10]</sup>. 如文献[11]提出的有限时间干扰观测器,虽然能够准确地估计扰动,但是会受到系统初始状态的影响;文献[12]提出了一种基于渐近式的扰动观测器方法,用于估计机器人系统中的未知扰动;Van 等<sup>[13]</sup>提出了一种基于扰动观测器的自适应模糊积分滑模控制方法. 然而,以上设计方法都不能保证估计误差在固定时间内收敛. 因此,设计一种新的固定时间扰动观测器是本文研究的重点内容之一,旨在实现对系统扰动估计的快速性和鲁棒性.

综上,本文提出一种基于固定时间扰动观测器和 A-T 趋近律的新型非奇异快速终端滑模控制器,主要工作为: 1) 设计一种固定时间扰动观测器以实现对系统不确定性及外部干扰的精确估计与补偿. 2) 将一种新型非奇异快速终端滑模面扩展到高阶非线性系统,既解决了奇异问题又提高了收敛速度,同时保证各状态变量实现快速、精确地收敛. 3) 提出一种结合双曲正切函数和反正切函数的 A-T 趋近律,有效抑制了系统的抖振现象.

## 1 系统模型及数学准备

以如下  $n$  阶不确定非线性系统为研究对象:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\bar{x}_n(t)) + g_n(\bar{x}_n(t))u(t) + d(\bar{x}_n, t); \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_n(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  为系统状态向量,  $u(t)$  为系统输入;  $f_n(\bar{x}_n(t))$ ,  $g_n(\bar{x}_n(t))$  均为已知的连续非线性光滑函数,  $d(\bar{x}_n, t)$  是包括外部干扰及不确定性的总干扰.

**引理 1**<sup>[14]</sup> 对于非线性系统  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , 若存在一个正定的李雅普诺夫函数

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V^p(x) - \beta V^k(x),$$

其中  $0 < p < 1$ ,  $k > 1$ ,  $\alpha, \beta, p, k$  均为正数, 则该系统固定时间稳定, 且收敛时间满足

$$T_{1\max} \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} + \frac{1}{\beta(k-1)}.$$

为方便书写, 下文公式中所有变量  $t$  都被省略.

## 2 固定时间扰动观测器设计

设计一个固定时间收敛扰动观测器来解决干扰问题, 该方法不仅可以通过近似导数避免由推导引起的计算复杂度, 且不会受到系统初始状态的影响, 进一步增强了系统的鲁棒性.

对于系统 (1) 中的第  $n$  个状态方程, 构造如下一个辅助的状态方程:

$$\dot{\zeta} = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + \varepsilon D. \quad (2)$$

其中:  $\varepsilon > 0$ ;  $D = x_n - \zeta$ ,  $D_e$  为  $D$  的估计值,  $\tilde{D} = D - D_e$  为辅助系统的估计误差.

对  $D$  求其一阶导数有

$$\dot{D} = \dot{x}_n - \dot{\zeta} = d - \varepsilon D. \quad (3)$$

为了对未知外部扰动进行固定时间估计, 所设计的带有辅助系统的扰动观测器描述如下:

$$\dot{D}_e = \varepsilon_1 \tilde{D}^{\varpi_1} + \varepsilon_2 \tilde{D}^{\varpi_2} + \frac{D(t_f + \Delta t) - D(t_f)}{\Delta t}, \quad (4)$$

$$\hat{d} = \varepsilon D_e + \frac{D(t_f + \Delta t) - D(t_f)}{\Delta t}. \quad (5)$$

其中:  $\hat{d}$  为  $d$  的估计值,  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  为正常数, 且  $\varpi_1 > 1$ ,  $0 < \varpi_2 < 1$ .

**注 1** 在式 (4) 和 (5) 中引入近似导数项具有重要意义, 即用  $(D(t_f + \Delta t) - D(t_f))/\Delta t$  替代当前时刻的  $\dot{D}$ , 不仅解决了代数循环问题, 亦简化了计算过程.

**定理 1** 利用固定时间干扰观测器 (5) 及其辅助系统 (4), 确保扰动估计误差在固定时间内收敛为零, 且收敛时间上界为

$$T_{a\max} \leq \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_1 \left(1 - \frac{\varpi_1 + 1}{2}\right)} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_2 \left(\frac{\varpi_2 + 1}{2} - 1\right)}.$$

其中:  $\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\varpi_1 + 1}{2} \varepsilon_1$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\varpi_2 + 1}{2} \varepsilon_2$ .

**证明** 选取如下李雅普诺夫函数:

$$V_e = \frac{1}{2} \tilde{D}^2. \quad (6)$$

对式 (6) 求时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= \tilde{D}(\dot{D} - \varepsilon_1 \tilde{D}^{\varpi_1} - \varepsilon_2 \tilde{D}^{\varpi_2}) - \\ &\quad \tilde{D} \left( \frac{D(t_f + \Delta t) - D(t_f)}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

因  $(D(t_f + \Delta t) - D(t_f))/\Delta t$  与  $\dot{D}$  近似相等, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_e \approx & -\varepsilon_1 \tilde{D}^{\varpi_1+1} - \varepsilon_2 \tilde{D}^{\varpi_2+1} \leq \\ & -\tilde{\varepsilon}_1 V_e^{\frac{\varpi_1+1}{2}} - \tilde{\varepsilon}_2 V_e^{\frac{\varpi_2+1}{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

由引理 1,  $\tilde{D}$ 将在固定时间 $T_{a \max}$ 内收敛, 满足

$$T_{a \max} \leq \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_1 \left(1 - \frac{\varpi_1+1}{2}\right)} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_2 \left(\frac{\varpi_2+1}{2} - 1\right)}.$$

**注 2** 由于 $\dot{D} = d - \varepsilon D$ ,  $d = \hat{D} + \varepsilon D$ , 有

$$\begin{aligned} \tilde{d} &= d - \hat{d} = \\ & \hat{D} + \varepsilon D - \varepsilon D_e - \\ & \frac{D(t_f + \Delta t) - D(t_f)}{\Delta t} \approx \varepsilon \tilde{D}. \end{aligned} \quad (9)$$

由式 (9) 可发现,  $\tilde{d}$ 与 $\tilde{D}$ 具有相同的收敛特性, 即 $\tilde{d}$ 能在固定时间内收敛为零.  $\square$

### 3 固定时间滑模控制器设计

在传统滑模控制领域, 如终端滑模<sup>[15]</sup>和快速终端滑模<sup>[16]</sup>等控制策略在求解过程中常会遇到负分数幂项的问题, 它们的存在可能导致在特定条件下系统控制信号突然无限增大, 这种现象被称为滑模控制的奇异问题. 基于此, 本文采用如下非奇异快速终端滑模面:

$$\begin{aligned} s_i &= \arctan(x_i)(1 + x_i^2)^{\gamma_i} + \\ & (1 + \lambda_i \arctan(x_i)^{\mu_i-1})^{-1}(\dot{x}_i)^{\gamma_i}. \end{aligned} \quad (10)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ 均为待设计的正参数, 且 $1 < \gamma_i < 2$ ,  $\mu_i > \gamma_i$ .

对于系统 (1) 而言, 需创建 $n-1$ 个滑模面, 即

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_{n-1}]. \quad (11)$$

在滑模控制中, 另一个不可忽视的问题就是抖振问题. 为了确保系统状态能迅速且平稳地到达滑模面, 设计合适的趋近律至关重要. 传统的趋近律如下:

1) 等速趋近律

$$\dot{s}_i = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s), \quad (12)$$

其中 $\varepsilon > 0$ . 该趋近律通过恒定增益来驱动滑模变量 $s$ 趋近于0, 具有结构简单、易于实现等特点, 但是其逼近速度单一且缓慢, 易在滑模面附近引发严重的抖振现象.

2) 指数趋近律

$$\dot{s}_i = -ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s). \quad (13)$$

其中:  $k > 0, \varepsilon > 0$ . 该趋近律通过调节切换项与线性项使得系统状态趋近滑模面, 且在接近滑模面时, 趋近速度逐渐减缓, 在一定程度上缓解了抖振现象. 但调节过程较为复杂, 面对外部扰动时鲁棒性不足.

3) 幂次趋近律

$$\dot{s}_i = -\alpha |s|^\beta \operatorname{sgn}(s). \quad (14)$$

其中:  $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$ . 该趋近律通过调节幂次函数来调节趋近速度, 具有一定灵活性, 使得系统能够在有限时间内收敛. 但其在远离滑模面时, 逼近速度较慢, 且具有参数敏感、抖振抑制不明显及抗扰能力不足等问题.

为了解决上述传统趋近律中存在的一些问题, 本文提出一种 A-T 趋近律. 该趋近律摒弃了传统的符号函数, 采用双曲正切  $\tanh$  函数和反正切  $\arctan$  函数, 具体表示为

$$\dot{s}_i = -m \frac{(\arctan(s_i) - \tanh(s_i))^l}{(1 + s_i^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_i))}. \quad (15)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 设计参数  $m$  为收敛速率因子,  $l$  代表平滑度调节指数, 且 $0 < l < 1, m > 0$ .

**注 3** 形如式 (15) 所示的 A-T 趋近律由 $\tanh(s_i)$ 及 $\arctan(s_i)$ 构成. 这两种函数及其导数都具备连续性和饱和性, 所以 A-T 趋近律也具有连续性. 其动态表现为: 当滑模变量 $s_i$ 较大时, 分子趋近于 $\pi/2 + 1$ , 分母较小, 从而产生较大的趋近律, 以实现快速收敛; 当滑模变量 $s_i$ 较小时, 趋近律整体趋近于0, 保证系统状态平稳地进入滑模面. 与传统滑模趋近律相比, A-T 趋近律可以有效抑制滑模面附近的抖振问题, 还能提高系统的鲁棒性及控制精度. 此外, 它还具有设计参数少、控制信号连续等优点.

基于式 (10) 及 A-T 趋近律, 设计如下控制律:

$$u = u_{\text{eq}} + u_{\text{sw}}, \quad (16)$$

$$u_{\text{eq}} = -g_n^{-1}(x)(\Phi_1 + \Phi_2 - f_n(x) - \hat{d}), \quad (17)$$

$$u_{\text{sw}} = -g_n^{-1}(x)\Phi_3. \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \\ & \frac{(1 + x_{n-1})^{\gamma-1} (1 + 2\gamma \arctan(x_{n-1})x_{n-1})(x_n)^{2-\gamma}}{\gamma\psi^\gamma}, \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = \psi^{-1}\dot{\psi}x_n,$$

$$\Phi_3 = \frac{m(\arctan(s_{n-1}) - \tanh(s_{n-1}))^l}{(1 + s_{n-1}^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_{n-1}))},$$

$$\psi = \frac{1}{(1 + \lambda \arctan(x_{n-1})^{\mu-1})^{1/\gamma}} > 0.$$

**注 4** 因为参数 $1 < \gamma < 2$ , 所以 $2 - \gamma > 0$ . 当 $\dot{x}_{n-1} = 0, x_{n-1} \neq 0$ 时,  $(1 + 2\gamma \arctan(x)x)\dot{x}^{2-\gamma}(1 + x^2)^{\gamma-1}$ 不会引起奇点问题. 紧接着, 因为 $\psi > 0$ , 所以 $\gamma\psi^{-1}$ 以及 $\psi^{-1}\dot{\psi}\dot{x}$ 也不会引起奇点问题. 同时, 当 $s_i = 0$ 时,  $\Phi_3$ 依然不会引起奇点问题. 基于以上讨论, 所设计的控制器可以避免奇点问题.

**定理 2** 针对非线性系统 (1), 使用非奇异固定

时间滑模面 (10), (11) 及 A-T 趋近律 (15), 在滑模控制器 (16) ~ (18) 的作用下, 系统状态可以在固定时间  $T_b$  内收敛到平衡点, 有

$$T_b = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{1-l}}{m(1-l)} + \frac{1}{1 - \frac{\gamma+1}{2\gamma}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\mu+\gamma}{2\gamma} - 1\right)}.$$

**证明** 滑模控制的过程包括趋近阶段和滑动阶段. 在趋近阶段, 其核心目标是通过设计的趋近律, 纠正初始的偏差, 并迅速引导系统状态接近滑模面, 确保系统状态能够在固定时间内收敛至滑模面. 而在滑动阶段, 重点则转移到保持系统状态在滑模面上的稳定运行, 利用滑模面的结构特性来抵抗系统参数的变化和外部干扰, 从而优化系统的动态响应, 并增强对不确定性的适应能力.

### 1) 趋近阶段.

由于滑模面的形式一致, 以最后一个滑模面为例, 选取李雅普诺夫函数

$$V_{n-1} = \frac{1}{2} s_{n-1}^2. \quad (19)$$

接下来对第  $n-1$  个滑模面进行求导, 其中  $\gamma_{n-1}, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1}$  是第  $n-1$  个滑模面中的对应参数, 为了求导过程表示方便, 在下述求导过程中统一表示成  $\gamma, \lambda, \mu$ , 并将式 (10) 简化且重新标记变量, 有

$$s_{n-1} = \arctan(x_{n-1})(1 + x_{n-1}^2)^\gamma + \chi^\gamma, \quad (20)$$

其中  $\chi = \dot{x}_{n-1}/(1 + \lambda \arctan(x_{n-1})^{\mu-1})^{1/\gamma} = \psi x_n$ , 则滑模面的导数为

$$\begin{aligned} \dot{s}_{n-1} = & (1 + x_{n-1}^2)^{\gamma-1} (1 + 2\gamma \arctan(x_{n-1})x_{n-1})\dot{x}_{n-1} + \Lambda\dot{\chi}. \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda &= \gamma\chi^{\gamma-1}, \\ \dot{\chi} &= \frac{-\lambda(\mu-1)\arctan(x_{n-1})^{\mu-2}(x_n)^2}{\gamma(1 + \lambda \arctan(x_{n-1})^{\mu-1})^{1+1/\gamma}(1 + x_{n-1}^2)} + \psi\dot{x}_n. \end{aligned}$$

对式 (19) 求导得

$$\dot{V}_{n-1} = s_{n-1}(\Phi_4 + \Lambda(\psi\dot{x}_n + \psi\dot{x}_n)). \quad (22)$$

进一步将式 (1) 代入 (21) 得到

$$\dot{V}_{n-1} = s_{n-1}(\Phi_4 + \Lambda(\psi\dot{x}_n + \psi(f_n + g_n u + d))).$$

整理有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} = & s_{n-1}(\Phi_4 + (\Lambda(\psi\dot{x}_n + \psi(f_n - \Phi_1 - \\ & \Phi_2 - f(x) - \hat{d} - \Phi_3 + d)))) = \\ & s_{n-1}\Lambda\psi(-\Phi_3 + \tilde{d}). \end{aligned} \quad (23)$$

其中:  $\Phi_4 = (1 + x_{n-1}^2)^{\gamma-1}(1 + 2\gamma \arctan(x_{n-1})x_{n-1}) \times$

$\dot{x}_{n-1}, \Lambda\psi > 0$ . 由于干扰观测器 (4) 可得,  $\tilde{d}$  将在固定时间内收敛到 0, 则

$$\dot{V}_{n-1} = -\Lambda\psi \frac{s_{n-1}(\arctan(s_{n-1}) - \tanh(s_{n-1}))^l}{(1 + s_{n-1}^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_{n-1}))}.$$

其中: 双曲正切  $\tanh(s_{n-1})$  函数的值域为  $[-1, 1]$ , 反正切  $\arctan(s_{n-1})$  函数的值域为  $[-\pi/2, \pi/2]$ , 当  $s_{n-1} \neq 0$  时,  $(1 + s_{n-1}^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_{n-1})) > 0$  恒成立.

因为  $0 < l < 1$ , 结合两个函数在同一坐标系下的图像, 当  $s_{n-1} > 0$  时,  $\arctan(s_{n-1}) - \tanh(s_{n-1}) > 0$ , 当  $s_{n-1} < 0$  时,  $\arctan(s_{n-1}) - \tanh(s_{n-1}) < 0$ , 所以  $s_{n-1}(\arctan(s_{n-1}) - \tanh(s_{n-1}))^l \geq 0$ , 当且仅当  $s_{n-1} \equiv 0, \dot{V}_{n-1} < 0$ , 对于除  $s_{n-1} \equiv 0$  以外的点均成立. 由李雅普诺夫定理分析可得:  $s_{n-1}$  对于任意初始值, 均具有渐近收敛的性质.

在计算收敛时间时, 首先将 A-T 趋近律 (15) 重构为

$$\frac{ds_i(t)}{dt} = -m \frac{(\arctan(s_i) - \tanh(s_i))^l}{(1 + s_i^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_i))}. \quad (24)$$

令  $\tau = \arctan(s_i) - \tanh(s_i)$ , 则  $d\tau = ((1 + s_i^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_i)))ds_i$ , 式 (24) 可以转化为

$$\frac{((1 + s_i^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s_i)))}{(\arctan(s_i) - \tanh(s_i))^l} ds_i(t) = -m dt. \quad (25)$$

滑模函数由初始状态  $s_i(0)$  到达滑模面  $s_i(t) = 0$  所需的收敛时间为

$$\int_{\arctan(s_i(0)) - \tanh(s_i(0))}^0 \frac{1}{\tau^l} d\tau = -m \int_0^{T_1} dt. \quad (26)$$

由于  $1-l > 0$ ,  $(\arctan(s_i(0)) - \tanh(s_i(0)))^{1-l}$  的值域为  $(-\pi/2 + 1, \pi/2 - 1)$ , 可得趋近阶段收敛时间为

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{m(1-l)} (\arctan(s_i(0)) - \tanh(s_i(0)))^{1-l} \leq \\ & \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{1-l} / m(1-l). \end{aligned}$$

即对于任意  $t \geq (\pi/2 - 1)^{1-l} / (m(1-l))$ ,  $s_i(t) = 0$ . 滑模函数可以在固定时间内到达  $s_i(t) = 0$ .

### 2) 滑动阶段.

状态轨迹收敛到所设计的非奇异固定时间滑模面上后, 其状态会沿着滑模面进行滑动. 在这个过程中, 对于每一个滑模面, 都有  $s_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} 0 = & \arctan(x_i)(1 + x_i^2)^{\gamma_i} + \\ & (1 + \lambda_i \arctan(x_i)^{\mu_i-1})^{-1} (\dot{x}_i)^{\gamma_i}. \end{aligned} \quad (27)$$

对于  $n$  阶系统而言, 状态变量的理想滑动状态一致, 都在各自滑模面上向平衡点趋近.

定义  $\Theta_i = \arctan(x_i)$ , 有  $\dot{\Theta}_i = (1 + x_i^2)^{-1}\dot{x}_i$ , 则式 (27) 可转化为

$$\Theta_i \dot{\Theta}_i^{-\gamma} (\dot{x}_i)^{\gamma_i} + ((1 + \lambda_i \Theta_i^{\mu_i-1})^{-1/\gamma_i})^{\gamma_i} (\dot{x}_i)^{\gamma_i} = 0. \quad (28)$$

进一步整理得到

$$\Theta_i^{1/\gamma_i} + \dot{\Theta}_i (1 + \lambda_i \Theta_i^{\mu_i-1})^{-1/\gamma_i} = 0. \quad (29)$$

继续计算有

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_i &= -\Theta_i^{1/\gamma_i} (1 + \lambda_i \Theta_i^{\mu_i-1})^{1/\gamma_i} = \\ &= -(\Theta_i + \lambda_i \Theta_i^{\mu_i})^{1/\gamma_i}. \end{aligned} \quad (30)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V_{s_i} = \frac{1}{2} \Theta_i^2, \quad (31)$$

对其求导得

$$\dot{V}_{s_i} \leq -(V_{s_i}^{(\gamma_i+1)/2} + \lambda_i V_{s_i}^{(\mu_i+\gamma_i)/2})^{1/\gamma_i}. \quad (32)$$

因为  $\mu_i > \gamma_i > 1$ , 有  $0 < (\gamma_i + 1)/(2\gamma_i) < 1$ ,  $(\mu_i + \gamma_i)/(2\gamma_i) > 1$ . 根据引理 1, 状态  $\Theta_i$  可以在固定时间内收敛到 0. 同时由于  $\Theta_i = \arctan(x_i)$ , 状态  $x_i$  也会在固定时间内收敛到零, 其收敛时间满足

$$T_{2\max} \leq \frac{1}{1 - \frac{\gamma_i + 1}{2\gamma_i}} + \frac{1}{\lambda_i^{1/\gamma_i} \left( \frac{\mu_i + \gamma_i}{2\gamma_i} - 1 \right)}.$$

综上, 定理 2 得证. □

### 4 仿真验证及分析

为验证所提出方案的有效性, 选取如下二连杆机械臂系统<sup>[17]</sup>进行验证:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + d. \quad (33)$$

其中:  $q = [q_1 \ q_2]^T \in R^2$  为关节角度位置矢量,  $\dot{q}, \ddot{q}$  分别为角速度矢量和角加速度矢量,  $d = [d_1 \ d_2]^T \in R^2$  为不确定扰动,  $M(q) \in R^{2 \times 2}$  为正定惯性矩阵,  $C(q, \dot{q}) \in R^{2 \times 2}$  为离心力和哥氏力矩阵,  $G(q) \in R^2$  为重力矩阵,  $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T \in R^2$  为控制力矩.

机械臂的物理参数选择为:  $m_1 = 0.5 \text{ kg}$  和  $m_2 = 1.5 \text{ kg}$  为两节机械臂的质量,  $L_1 = 1.0 \text{ m}$  和  $L_2 = 0.8 \text{ m}$  为两节机械臂的长度,  $g = 9.8 \text{ m/s}$ , 机械臂绕质心的转动惯量  $J_1 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $J_2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

选取状态变量  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ , 则式 (33) 转化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) + M^{-1}(x_1)\tau + M^{-1}(x_1)d, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (34)$$

显而易见, 式 (34) 符合非线性系统 (1) 的要求, 首先利用定理 1 为其设计滑模面为

$$\begin{aligned} s &= \arctan(q)(1 + q^2)^\gamma + \\ &= (I + \lambda \arctan(q)^{\mu-1})^{-1}(\dot{q})^\gamma. \end{aligned} \quad (35)$$

结合定理 2, 设计其相应的控制器为

$$\tau = \tau_{\text{eq}} + \tau_{\text{sw}}, \quad (36)$$

$$\tau_{\text{eq}} = -M(q)(\Phi_1 + \Phi_2 + \hat{d}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (37)$$

$$\tau_{\text{sw}} = -M(q)\Phi_3, \quad (38)$$

其中

$$\psi = 1/(I + \lambda \arctan(q)^{\mu-1})^{1/\gamma} > 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{(I + q)^{\gamma-1}(I + 2\gamma \arctan(q)q)(\dot{q})^{2-\gamma}}{\gamma\psi^\gamma},$$

$$\Phi_2 = \psi^{-1}\dot{\psi}\dot{q}, \quad \Phi_3 = \frac{m(\arctan(s) - \tanh(s))^l}{(1 + s^2)^{-1} - (1 - \tanh^2(s))}.$$

控制器参数为:  $\lambda = 9.371$ ,  $\mu = 43.984$ ,  $\gamma = 1.196$ ,  $l = 0.99$ ,  $m = 8.09$ ; 干扰观测器参数为  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\varepsilon_1 = 3.9$ ,  $\varepsilon_2 = 9.5$ ,  $\varpi_1 = 2.9$ ,  $\varpi_2 = 0.645$ ; 机械臂的初始状态为  $q(0) = [1.0 \text{ rad} \ 1.5 \text{ rad}]^T$ ,  $\dot{m}(0) = [0 \text{ rad/s} \ 0 \text{ rad/s}]^T$ ; 实际干扰信号为:  $d = [1.2 \sin(3.5t) \text{ rad} \ 1.8 \sin(2.2t) \text{ rad}]^T$ . 图 1 为该机械臂系统的控制方案流程.

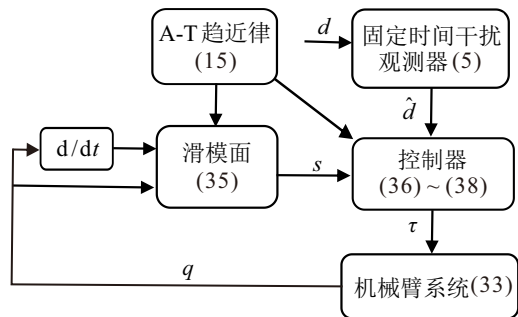


图1 控制流程

**注 5** 对于 A-T 趋近律中的设计参数  $m$  和  $l$  的取值问题, 较大的  $m$  会加速收敛, 但会导致系统小幅震荡; 而较小的  $m$  会使收敛过程更加平滑, 但会延长收敛时间.  $l$  则是在 0-1 之间取值, 以确保当系统状态接近滑模动态表面时的平稳过渡.

图 2 和图 3 展示了固定时间观测器对两个关节扰动的观测性能. 图 2 为两个关节的实际扰动与观测扰动的对比曲线, 两条曲线高度重合, 验证了所设计固定时间观测器的有效性. 图 3 呈现了两个关节的观测误差曲线, 从误差动态特性来看, 两个关节的观测误差都表现出快速收敛的特点, 在约 0.5 s 内即可迅速收敛至零.

图 4 展示了两个关节滑模面随时间的变化特性. 两个关节的滑模面表现出相似的动态响应特性, 两个滑模面都在 1 s 内快速收敛到零附近, 且收敛过程

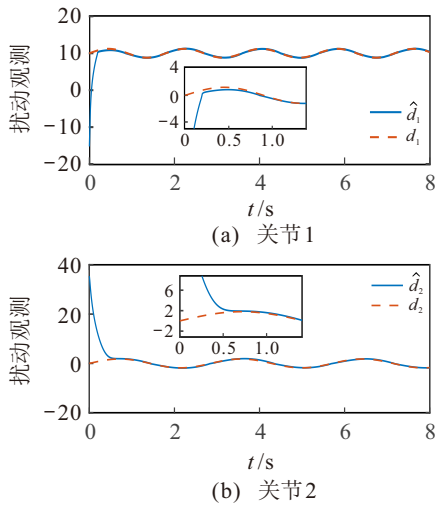


图2 两个关节的扰动观测

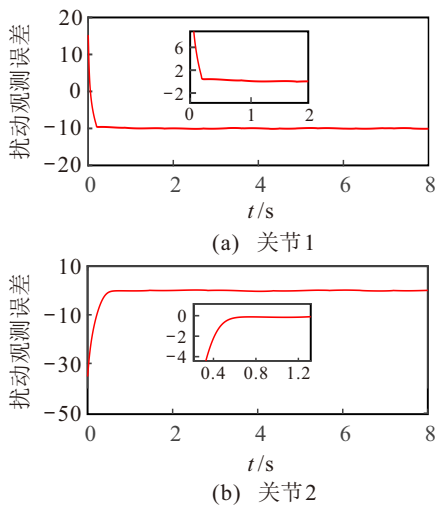


图3 两个关节的扰动观测误差

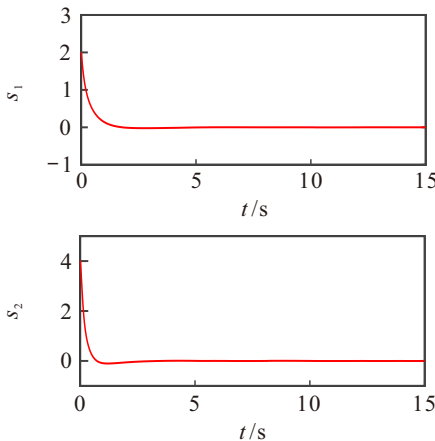


图4 两个关节的滑模面

平稳, 没有出现明显的震荡, 且在收敛到零附近后, 两个滑模面都能稳定维持在该状态, 充分说明了所设计 A-T 趋近律的有效性, 明显削弱了抖振. 图 5 展示了在不同初始值下两个关节的输出响应随时间的变化曲线.

图 6 展示了 3 种不同趋近律下的系统输出响应曲线, 通过对比分析, 这 3 种趋近律均能有效抑制系

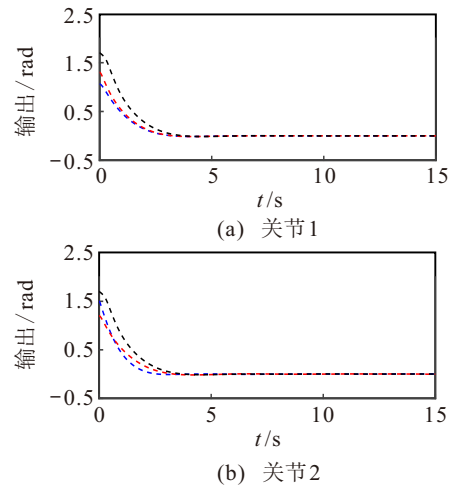


图5 不同初始值下两个关节的输出响应

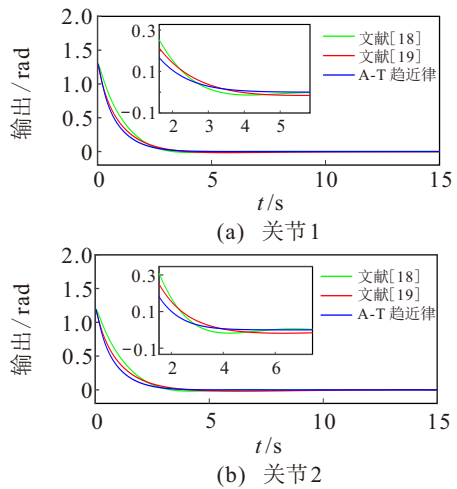


图6 不同趋近律下的输出响应

统的抖振问题. 然而, 进一步放大细节后可以发现, A-T 趋近律在整体平稳性和收敛速度上表现最佳, 能够在相同条件下更快地使系统达到稳定状态. 图 7 展示了两个关节的控制输入曲线, 可以观察到, 两个关节的控制输入在初始阶段都经历了较大的变化, 随后都快速上升并在 1 s 左右稳定. 这种控制输入特性表明控制器能够有效抑制系统扰动, 同时保持控制

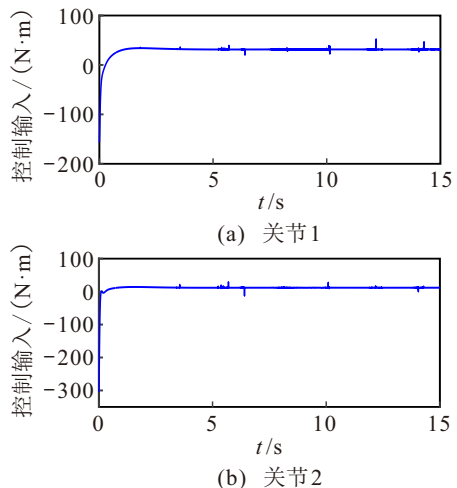


图7 两个关节的控制输入

输入在合理范围内。

## 5 结 论

本文针对不确定高阶非线性系统, 探讨了基于扰动观测器的固定时间滑模控制问题。设计的固定时间扰动观测器用于补偿扰动及不确定影响。此外, 所提出方案采用 A-T 趋近律和非奇异快速终端滑模控制提升了系统的鲁棒性和快速性, 且有效抑制了滑模面附近的抖振现象。仿真结果表明, 所提出控制策略不仅解决了奇异性问题, 还提高了系统的稳定性, 并确保收敛时间不受系统初始状态的影响。

## 参考文献 (References)

- [1] Meng Q T, Ma Q, Shi Y. Adaptive fixed-time stabilization for a class of uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(11): 6929-6936.
- [2] Berger T. Input-constrained funnel control of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, DOI:10.1109/TAC.2024.3352362.
- [3] Lu X Y, Wang F, Liu Z, et al. Adaptive fuzzy fixed-time control for nonlinear systems with input and output quantization[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, 22: 5158-5169.
- [4] 范亚洲, 孙林祥, 白雪剑, 等. 基于自适应反正切非奇异终端滑模的水下机械臂轨迹跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2025, 40(1): 205-213.  
(Fan Y Z, Sun L X, Bai X J, et al. Trajectory tracking control of underwater manipulator based on adaptive arctangent non-singular terminal sliding mode control[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(1): 205-213.)
- [5] Xu B, Zhang L, Ji W. Improved non-singular fast terminal sliding mode control with disturbance observer for PMSM drives[J]. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2021, 7(4): 2753-2762.
- [6] 王敏, 奚鑫泽, 黄英博, 等. 基于固定时间滑模控制的直驱风电场次同步振荡抑制[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 918-926.  
(Wang M, Xi X Z, Huang Y B, et al. Sub-synchronous oscillation suppression in direct-drive wind farms based on fixed-time sliding mode control[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(3): 918-926.)
- [7] Hou H Z, Yu X H, Xu L, et al. Finite-time continuous terminal sliding mode control of servo motor systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(7): 5647-5656.
- [8] Cruz-Ortiz D, Chairez I, Poznyak A. Non-singular terminal sliding-mode control for a manipulator robot using a barrier Lyapunov function[J]. *ISA Transactions*, 2022, 121: 268-283.
- [9] Zhang N, Xia J W, Park J H, et al. Improved disturbance observer-based fixed-time adaptive neural network consensus tracking for nonlinear multi-agent systems[J]. *Neural Networks*, 2023, 162: 490-501.
- [10] 余明裕, 李仲昆, 王泊桦. 基于固定时间扰动观测器的水面无人艇精确编队控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(2): 379-387.  
(Yu M Y, Li Z K, Wang B H. Fixed-time disturbance observer-based accurate formation control of unmanned surface vehicles[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(2): 379-387.)
- [11] Fu C, Zhang C H, Zhang G G, et al. Disturbance observer-based finite-time control for three-phase AC-DC converter[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(6): 5637-5647.
- [12] Chen M. Robust tracking control for self-balancing mobile robots using disturbance observer[J]. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2017, 4(3): 458-465.
- [13] Van M, Ge S S. Adaptive fuzzy integral sliding-mode control for robust fault-tolerant control of robot manipulators with disturbance observer[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021, 29(5): 1284-1296.
- [14] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [15] Yu X H, Feng Y, Man Z H. Terminal sliding mode control—an overview[J]. *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, 2021, 2: 36-52.
- [16] Yao M B, Xiao X M, Tian Y, et al. A fast terminal sliding mode control scheme with time-varying sliding mode surfaces[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(10): 5386-5407.
- [17] 王杰, 沈艳霞. 机械臂自适应精确时间滑模控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(6): 1918-1926.  
(Wang J, Shen Y X. Adaptive exact-time sliding mode control for manipulator[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(6): 1918-1926.)
- [18] 宋卓越, 马慧颖. 基于新型双曲正切趋近律的固定/有限时间姿态控制[J]. *北京理工大学学报*, 2023, 43(4): 383-393.  
(Song Z Y, Ma H Y. Fixed/finite-time attitude control based on a novel hyperbolic tangent reaching law[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2023, 43(4): 383-393.)
- [19] Zhang D, Hu J B, Cheng J, et al. A novel disturbance observer based fixed-time sliding mode control for robotic manipulators with global fast convergence[J]. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, 11(3): 661-672.

## 作者简介

郑在弘 (1998-), 男, 博士生, 主要研究方向为非线性系统的滑模控制, E-mail: dahongzzh@foxmail.com;

李丹 (1999-), 女, 博士生, 主要研究方向为非线性系统预设时间控制, E-mail: 1916759170@qq.com;

李平 (1964-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为复杂工业过程的先进控制及优化、非线性系统的模型预测控制, E-mail: liping\_USTL@163.com;

陈明 (1977-), 女, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为容错控制、鲁棒控制, E-mail: cm8061@sina.com.