

控制与决策

Control and Decision

一类切换非线性正时变系统的状态界估计

张娜, 孙元功

引用本文:

张娜, 孙元功. 一类切换非线性正时变系统的状态界估计[J]. 控制与决策, 2025, 40(11): 3357-3362.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0123>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 \$H_\infty\$ 控制](#)

Non-fragile H_∞ control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087-1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

[基于模型依赖驻留时间的异步切换控制](#)

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

控制与决策. 2021, 36(3): 609-618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

[基于反馈无源化的切换非线性系统 \$H_\infty\$ 跟踪控制](#)

Passification-based H_∞ tracking control for a class of switched nonlinear systems

控制与决策. 2021, 36(11): 2729-2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

[基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制](#)

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger

控制与决策. 2021, 36(10): 2467-2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

[基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制](#)

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97-104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

一类切换非线性正时变系统的状态界估计

张娜[†], 孙元功

(济南大学 数学科学学院, 济南 250022)

摘要: 讨论切换 1 次齐次协同时变系统的状态界估计问题. 齐次协同系统是一种特定的非线性正系统. 在分析时变系统时, 没有使用比较原理. 首先, 提出当存在扰动时, 此切换非线性正时变系统轨迹渐近收敛至平衡点的一个邻域的准则, 并给出每个子系统的衰减率; 然后, 将这些准则推广至切换线性正时变系统; 最后, 给出一个数值例子来验证结论.

关键词: 齐次协同系统; 非线性系统; 正系统; 切换系统; 时变系统; 扰动

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0123

引用格式: 张娜, 孙元功. 一类切换非线性正时变系统的状态界估计 [J]. 控制与决策, 2025, 40(11): 3357-3362.

State bounding estimation for a class of switched nonlinear positive time-varying systems

ZHANG Na[†], SUN Yuan-gong

(School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract: This paper discusses the state bounding problem of switched homogeneous cooperative time-varying systems of degree one. A homogeneous cooperative system is a specific type of nonlinear positive system. For analysis of time-varying systems, we don't use the comparison principle. First, a criterion is presented for the existence of a neighborhood of the equilibrium point where the trajectories of the switched nonlinear positive time-varying system with disturbance asymptotically converge within, and the decay rate of every subsystem is also given. Then, the criteria are extended to switched linear positive time-varying systems. Finally, a numerical example is proposed to illustrate the results.

Keywords: homogeneous cooperative system; nonlinear system; positive system; switched system; time-varying system; disturbance

0 引言

若一个动态系统的初始条件非负, 则它的轨迹也非负, 这样的系统被称为正系统^[1-2]. 切换系统^[3-12]由一个切换信号和若干个子系统组成. 齐次 (homogeneous) 协同 (cooperative) 系统^[13-15]是一种特殊的非线性正系统. 稳定性是动态系统的核心属性之一, 它吸引了众多研究者的关注. 在实际中, 一些动态系统存在扰动, 在这种情况下, 系统的解可能会收敛至平衡点的一个邻域内. 这个问题被称为可达集估计或状态界估计.

正系统的稳定性研究通常采用一种不同于传统 Lyapunov 函数的方法^[16-22]. 如 Feyzmahdavian 等^[19]研究了 1 次齐次协同系统的稳定性. 随后关于稳定性的结论被推广至任意次的齐次协同系统^[20].

Dong^[21]和 Xiao 等^[22]也研究了任意次的齐次协同系统的稳定性准则.

状态界估计问题吸引了众多研究者的关注. 线性系统的状态界估计问题已经得到了很好的发展^[23-25]. Hien 等^[25]估计了具有时滞和扰动的连续时间线性时变系统的可达集. 近年来, 非线性系统的状态界估计问题也受到了显著的关注. Nam 等^[26]研究了有扰动的且非线性项满足线性增长条件的非线性时滞系统的状态定界问题; Zhang 等^[27-28]研究了 1 次齐次协同系统的状态定界问题; Zhang 等^[29]估计了切换 $r(r > 1)$ 次齐次协同系统的可达集.

时变系统在工程、生物、经济等领域均具有广泛应用, 相对于时不变系统, 时变系统更能反映现实世界的动态本质, 时变系统吸引了许多研究者的兴趣.

收稿日期: 2025-01-26; 录用日期: 2025-06-13.

基金项目: 山东省自然科学基金项目 (ZR2023MF057); 国家自然科学基金项目 (11601184, 61873110).

责任编委: 刘洋.

[†]通信作者. E-mail: sms_zhangn@ujn.edu.cn.

然而,应用传统的 Lyapunov 泛函方法来分析时变系统,效果较差.如即使对于线性时变系统, Lyapunov 方法可能会导致不定线性矩阵不等式或不可解的矩阵 Riccati 微分方程^[25].

为克服利用 Lyapunov 函数分析时变系统的困难,很多文献利用比较原理 (comparison principle),即通过构造或选择一个合适的比较系统 (comparison system)^[30,33],利用其稳定性来推导原目标系统的稳定性.系统 A 被称为系统 B 关于 (渐近) 稳定性的比较系统,意指:若系统 A 的零解 (或平衡点) 具有 (渐近) 稳定性,则可推知系统 B 的零解 (或平衡点) 亦具有渐近稳定性^[30].由此,系统 A 的稳定性特性可用于比较或推断系统 B 的相应稳定性特性.如文献 [25,30-34] 利用比较原理研究了时变系统的稳定性等问题,构造或选择某个正时不变系统作为比较系统.

本文的主要内容包括以下几方面:

1) 推导出所讨论的切换非线性正时变系统的解渐近收敛至平衡点的一个邻域的准则.

2) 给出每个非线性正时变子系统的衰减率.

3) 没有使用比较原理,不需要构造或选择某个比较系统来分析原时变系统.从这一角度看,所提出分析方法能够降低保守性.

1 预备知识

在本文中, \mathbb{R}^n 表示 n 维实欧几里得空间. 记 $\langle m \rangle = \{1, 2, \dots, m\}$, 其中 m 为正整数. 对于 $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, 这里 x_i 为向量 \mathbf{x} 的第 i 个分量, $i \in \langle n \rangle$. 记 $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$), 若对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $i \in \langle n \rangle$, 则有 $x_i > y_i$ ($x_i \geq y_i$). 记 $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}\}$, 即 \mathbb{R}_+^n 表示 n 维非负实向量的集合. 记 $|\mathbf{x}| = (|x_i|) \in \mathbb{R}_+^n$ 和 $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in \langle n \rangle} |x_i|$. 给定 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = (v_i) \succ \mathbf{0}$, 定义向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的加权 ∞ -范数为 $\|\mathbf{x}\|_\infty^{\mathbf{v}} = \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{|x_i|}{v_i}$. 对于 $\epsilon > 0$, 记 $\mathcal{B}(\epsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \epsilon\}$.

$\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵空间. 若 A 所有的非对角线元素非负, 则矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 被称为 Metzler^[13] 矩阵.

$\sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow \langle m \rangle$ 表示切换信号, 其中 $m > 1$ 为子系统的数量. 切换时刻记为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$, 驻留时间为 $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, 且有 $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$. 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 第 $\sigma(t_k)$ 个子系统被激活.

定义 1^[13] 连续向量场 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若其在 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ 上连续可微, 且对于所有 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \mathbf{0}$, 其 Jacobian 矩阵 $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}(\mathbf{a})$ 均为 Metzler 矩阵, 则称 \mathbf{f} 为协同向量场.

定义 2^[19] 对于向量场 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若对于所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和所有 $\lambda > 0$, 均有 $\mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^r \mathbf{f}(\mathbf{x})$, 则称 \mathbf{f} 为 r 次齐次的, 其中 $r > 0$.

一个协同向量场满足以下 Kamke 条件.

引理 1^[13-14,35] 设 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个协同向量场, f_i 为 \mathbf{f} 的第 i 个分量. 对于任意两个满足 $x_i = y_i$ 和 $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ 的向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \mathbf{0}$, 可得到 $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{y})$.

前文的定义可被推广至时变系统.

定义 3 对于在 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ 上关于 \mathbf{x} 连续可微的, 连续向量场 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若对于所有 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \mathbf{0}$ 和 $t \geq 0$, 其 Jacobian 矩阵 $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}(t, \mathbf{a})$ 均为 Metzler 矩阵, 则称 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 为协同向量场.

定义 4 对于向量场 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若对于所有 $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda > 0$, 均有 $\mathbf{f}(t, \lambda \mathbf{x}) = \lambda^r \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, 则称 \mathbf{f} 是 r 次齐次的, 其中 $r > 0$.

类似地, 可得到协同向量场 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 有以下性质.

引理 2 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个协同向量场, f_i 为 \mathbf{f} 的第 i 个分量. 对于任意两个满足 $x_i = y_i$ 和 $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ 的向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \mathbf{0}$, 可得到 $f_i(t, \mathbf{x}) \geq f_i(t, \mathbf{y})$.

定义 5^[36] 对于切换信号 $\sigma(t)$ 以及 $t_2 \geq t_1 \geq 0$, 令 $N_\sigma(t_2, t_1)$ 为 $\sigma(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内的不连续次数. 若存在两个正数 N_0 (颤振界限) 和 τ , 使得 $N_\sigma(t_2, t_1) \leq N_0 + (t_2 - t_1) / \tau$, 对于所有 $t_2 \geq t_1 \geq 0$ 均成立, 则称此切换信号有平均驻留时间 (ADT) τ .

研究以下切换非线性时变系统:

$$\mathcal{H} : \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\sigma(t)}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{w}(t), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态; $\mathbf{w}(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为扰动向量, $\mathbf{w}(t) \succeq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{w}(t)\|_\infty \leq \bar{w}$, $\bar{w} > 0$ 为一个常数.

假设向量场 $\mathbf{f}_{\sigma(t)} : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足如下条件.

假设 1 1) $\mathbf{f}_{\sigma(t)}(t, \mathbf{x})$ 在 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 连续, 在 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ 上关于 \mathbf{x} 连续可微;

2) $\mathbf{f}_{\sigma(t)}(t, \mathbf{x})$ 是齐次的, 且齐次度为 $r = 1$;

3) $\mathbf{f}_{\sigma(t)}(t, \mathbf{x})$ 在 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}_+^n$ 上是协同向量场.

根据文献 [27] 的证明, 利用归纳法可得到如下引理.

引理 3 当满足假设 1 的条件 3) 时, 系统 \mathcal{H} 为正系统.

2 主要结论

定理 1 对于满足假设 1 的系统 \mathcal{H} , 若存在一组向量 $\mathbf{v}_p \succ \mathbf{0}$, $p \in \langle m \rangle$, 使得 $\mathbf{f}_p(t, \mathbf{v}_p) \prec \mathbf{0}$, 则对于任

何初始条件 $\mathbf{x}(0) \succeq \mathbf{0}$, 在平均驻留时间切换 $\tau > \frac{\ln u}{\eta}$ 的条件下, 系统的解渐近收敛于一个球内, 且满足

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty}^{v_{\sigma(t_k)}} &\leq \\ \theta &\left[1 + \frac{(u-1)}{1-ue^{-\eta\tau}}\right] + \\ (\varphi_0 - \theta)e^{-\int_{t_0}^t (\eta(s) - \frac{\ln u}{\tau}) ds}, &t \in [t_k, t_{k+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} u &= \max_{i \in \langle n \rangle; p, q \in \langle m \rangle} \frac{v_{pi}}{v_{qi}}; \\ \theta &= \frac{\hat{\omega}}{-\max_{i \in \langle n \rangle; p \in \langle m \rangle} [f_{pi}(t, \mathbf{v}_p)]}; \\ \varphi_0 &= \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{x_i(0)}{v_{\sigma(0)i}} \right\}; \\ \varphi_k &= u[\theta + (\varphi_{k-1} - \theta)e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(t) dt}], \quad k \geq 1; \\ 0 < \eta < \inf_{t \geq 0} \eta(t), \quad \eta(t) &= \min_{p \in \langle m \rangle} \eta_p(t), \\ \eta_p(t) &= \min_{i \in \langle n \rangle} \eta_{pi}(t). \end{aligned}$$

$\eta_{pi}(t)$ 是如下方程的唯一正解:

$$\frac{f_{pi}(t, \mathbf{v}_p)}{v_{pi}} + \eta_{pi}(t) = 0. \quad (3)$$

证明 证明分为以下 3 个步骤.

step 1:

当 $t \in [t_k, t_{k+1}) (k = 0, 1, \dots)$ 时, 对于 $\varphi_k \geq \frac{x_i(t_k)}{v_{\sigma(t_k)i}}$, 有

$$\frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_k)i}} \leq \theta + Ke^{-\int_{t_k}^t \eta(s) ds}, \quad i \in \langle n \rangle, \quad (4)$$

其中 $K = \max\{(\varphi_k - \theta), 0\}$.

令

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_k)i}} - \theta - Ke^{-\int_{t_k}^t \eta(s) ds}, \\ t &\in [t_k, t_{k+1}), \quad i \in \langle n \rangle. \end{aligned}$$

记 $p = \sigma(t_k)$, 显然有 $\frac{x_i(t_k)}{v_{pi}} \leq \varphi_k \leq (\theta + K)$, 即 $z_i(t_k) \leq 0, i \in \langle n \rangle$. 然后证明 $z_i(t) \leq 0, t \in [t_k, t_{k+1}), i \in \langle n \rangle$. 否则, 存在 $l \in \langle n \rangle$ 和 $t^* \in (t_k, t_{k+1})$, 使得 $z_i(t) \leq 0, t \in [t_k, t^*], i \in \langle n \rangle; z_l(t^*) = 0$, 且

$$\dot{z}_l(t^*) \geq 0. \quad (5)$$

因此, 有

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{x}(t^*)}{\mathbf{v}_p} \leq \theta + Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds}, \\ \frac{x_l(t^*)}{v_{pl}} = \theta + Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds}. \end{cases} \quad (6)$$

由 \mathbf{f}_p 是 1 次齐次协同向量场, 可得到

$$\begin{aligned} f_{pl}(t, \mathbf{x}(t^*)) &\leq \\ f_{pl}(t, (\theta + Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds})\mathbf{v}_p) &= \\ \{\theta + Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds}\} f_{pl}(t, \mathbf{v}_p) &= \\ \theta f_{pl}(t, \mathbf{v}_p) + Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds} f_{pl}(t, \mathbf{v}_p). \end{aligned} \quad (7)$$

根据 θ 和 η 的定义, 可以推出

$$\theta f_{pl}(t, \mathbf{v}_p) + \bar{w} \leq 0, \quad (8)$$

$$\frac{f_{pl}(t, \mathbf{v}_p)}{v_{pl}} + \eta(t) < 0, \quad (9)$$

故

$$\begin{aligned} \dot{z}_l(t^*) &\leq \\ \frac{\dot{x}_l(t^*)}{v_{pl}} + \eta(t^*)Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds} &= \\ \frac{f_{pl}(t^*, \mathbf{x}(t^*)) + w_l(t^*)}{v_{pl}} + \\ \eta(t^*)Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds} &\leq \\ \frac{\theta f_{pl}(t^*, \mathbf{v}_p) + \bar{w}}{v_{pl}} + \\ Ke^{-\int_{t_k}^{t^*} \eta(s) ds} \left[\frac{f_{pl}(t^*, \mathbf{v}_p)}{v_{pl}} + \eta(t^*) \right] &< 0. \end{aligned} \quad (10)$$

由式 (10), 可得到 $\dot{z}_l(t^*) < 0$, 这与假设 (5) 矛盾. 因此, 可以推出

$$\frac{x_i(t)}{v_{pi}} \leq \theta + Ke^{-\int_{t_k}^t \eta(s) ds}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad i \in \langle n \rangle.$$

step 2:

1) 当 $t \in [t_0, t_1)$ 时, 根据 step 1 的分析, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_0)i}} &\leq \theta + \max\{(\varphi_0 - \theta), 0\}e^{-\int_{t_0}^t \eta(s) ds}, \\ t &\in [t_0, t_1), \quad i \in \langle n \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{x_i(t_1)}{v_{\sigma(t_1)i}} &\leq u[\theta + \max\{(\varphi_0 - \theta), 0\}e^{-\int_{t_0}^{t_1} \eta(s) ds}], \\ i &\in \langle n \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

2) 记 $\varphi_1 = u[\theta + \max\{(\varphi_0 - \theta), 0\}e^{-\int_{t_0}^{t_1} \eta(s) ds}]$,

显然有 $\varphi_1 \geq \theta$ 和 $\varphi_1 \geq \frac{x_i(t_1)}{v_{\sigma(t_1)i}}$.

当 $t \in [t_1, t_2)$ 时, 根据 step 1 的分析, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_1)i}} &\leq \theta + (\varphi_1 - \theta)e^{-\int_{t_1}^t \eta(s) ds}, \\ t &\in [t_1, t_2), \quad i \in \langle n \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

3) 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 归纳可得到

$$\begin{aligned} \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_k)i}} &\leq \theta + (\varphi_k - \theta)e^{-\int_{t_k}^t \eta(s) ds}, \\ t &\in [t_k, t_{k+1}), \quad i \in \langle n \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\varphi_k = u[\theta + (\varphi_{k-1} - \theta)e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(s)ds}], k \geq 1. \quad (15)$$

因此,可得出如下结论:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty}^{v_{\sigma(t_k)}} \leq \theta + (\varphi_k - \theta)e^{-\int_{t_k}^t \eta(s)ds}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (16)$$

式(14)表明

$$0 \leq \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_k)}i} \leq \varphi_k, t \in [t_k, t_{k+1}), i \in \langle n \rangle. \quad (17)$$

step 3:

显然,有

$$\begin{aligned} \varphi_k - \theta &= \\ (u-1)\theta + ue^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(t)dt}(\varphi_{k-1} - \theta) &= \\ (u-1)\theta + ue^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(t)dt}[(u-1)\theta + \\ ue^{-\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \eta(t)dt}(\varphi_{k-2} - \theta)] &= \dots = \\ (u-1)\theta[1 + ue^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(t)dt} + \\ u^2e^{-\int_{t_{k-2}}^{t_k} \eta(t)dt} + \dots + u^{k-2}e^{-\int_{t_2}^{t_k} \eta(t)dt} + \\ u^{k-1}e^{-\int_{t_1}^{t_k} \eta(t)dt}] + u^ke^{-\int_{t_0}^{t_k} \eta(t)dt}(\varphi_0 - \theta). \end{aligned} \quad (18)$$

可得到

$$\begin{aligned} \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_k)}i} &\leq \\ \theta + (\varphi_k - \theta)e^{-\int_{t_k}^t \eta(s)ds} &= \\ \theta + (u-1)\theta[1 + ue^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(t)dt} + \\ u^2e^{-\int_{t_{k-2}}^{t_k} \eta(t)dt} + \dots + u^{k-2}e^{-\int_{t_2}^{t_k} \eta(t)dt} + \\ u^{k-1}e^{-\int_{t_1}^{t_k} \eta(t)dt}]e^{-\int_{t_k}^t \eta(s)ds} + \\ u^ke^{-\int_{t_0}^t \eta(s)ds}(\varphi_0 - \theta) &\leq \\ \theta + (u-1)\theta[1 + ue^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta dt} + \\ u^2e^{-\int_{t_{k-2}}^{t_k} \eta dt} + \dots + u^{k-2}e^{-\int_{t_2}^{t_k} \eta dt} + \\ u^{k-1}e^{-\int_{t_1}^{t_k} \eta dt}]e^{-\int_{t_k}^t \eta(s)ds} + \\ u^ke^{-\int_{t_0}^t \eta(s)ds}(\varphi_0 - \theta) &\leq \\ \theta + (u-1)\theta[1 + ue^{-\eta\tau} + (ue^{-\eta\tau})^2 + \\ \dots + (ue^{-\eta\tau})^{k-2} + (ue^{-\eta\tau})^{k-1}] \\ e^{-\int_{t_k}^t \eta(s)ds} + u^ke^{-\int_{t_0}^t \eta(s)ds}(\varphi_0 - \theta) &\leq \\ \theta + \frac{(u-1)\theta}{1 - ue^{-\eta\tau}} + u^{\frac{k}{\tau}}e^{-\int_{t_0}^t \eta(s)ds}(\varphi_0 - \theta) &= \\ \theta + \frac{(u-1)\theta}{1 - ue^{-\eta\tau}} + e^{-\int_{t_0}^t (\eta(s) - \frac{\ln u}{\tau})ds}(\varphi_0 - \theta) &\leq \\ \theta\left[1 + \frac{(u-1)}{1 - ue^{-\eta\tau}}\right] + (\varphi_0 - \theta)e^{-\int_{t_0}^t (\eta(s) - \frac{\ln u}{\tau})ds}, \end{aligned} \quad (19)$$

证毕. □

注 1 若存在一个公共向量 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_p$ 满足定理 1 的条件,则可以证明该系统 \mathcal{H} 满足 $\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty}^{\mathbf{v}} \leq \theta +$

$$(\varphi_0 - \theta)e^{-\int_{t_0}^t \eta(t)dt} (t \geq 0).$$

注 2 若正向量 \mathbf{v}_p 满足定理 1, 则很显然, 向量 $k\mathbf{v}_p$ (其中 k 为一个正实数) 也满足定理 1. 可得到, 从定理 1 获得的系统状态的上界对于 \mathbf{v}_p 与 $k\mathbf{v}_p$ 是相同的.

注 3 为简便起见, 系统 \mathcal{H} 的解也满足

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty}^{v_{\sigma(t_k)}} &\leq \\ \theta\left[1 + \frac{(u-1)}{1 - ue^{-\eta\tau}}\right] + \\ (\varphi_0 - \theta)e^{-\int_{t_0}^t (\eta(s) - \frac{\ln u}{\tau})ds} &\leq \\ \theta\left[1 + \frac{(u-1)}{1 - ue^{-\eta\tau}}\right] + (\varphi_0 - \theta)e^{-\int_{t_0}^t (\eta - \frac{\ln u}{\tau})dt}, \end{aligned} \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

注 4 对于系统 \mathcal{H} 的分析, 没有使用比较原理. 不需要构造或选择另外一个比较系统分析系统 \mathcal{H} 的稳定性特性. 而若使用比较原理估计系统 \mathcal{H} 的状态界, 如选择某个正时不变系统作为比较系统, 则估计的状态界与选择的比较系统有关, 且估计的状态界相较于所提出方法得到的状态界更大.

注 5 对于系统 \mathcal{H} 的分析, 也没有使用传统的 Lyapunov 函数方法.

下面考虑系统 \mathcal{H} 的一个特殊情况, 即下边的线性时变系统:

$$\tilde{\mathcal{H}}: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), t \geq 0. \quad (20)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态; $\mathbf{w}(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为扰动向量; $\mathbf{w}(t) \succeq \mathbf{0}, \|\mathbf{w}(t)\|_{\infty} \leq \bar{w}, \bar{w} > 0$ 为一个常数.

对于系统 $\tilde{\mathcal{H}}$ 而言, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$. 若 $\mathbf{A}(t)$ 为 Metzler 矩阵, 则系统 $\tilde{\mathcal{H}}$ 满足假设 1, 系统 $\tilde{\mathcal{H}}$ 为正系统. 可得到以下推论.

推论 1 对于系统 $\tilde{\mathcal{H}}$, 其中 $\mathbf{A}_{\sigma(t)}(t)$ 为 Metzler 矩阵, 若存在一组向量 $\mathbf{v}_p \succ \mathbf{0} (p \in \langle m \rangle)$, 使得 $\mathbf{A}_p(t)\mathbf{v}_p \prec \mathbf{0}$, 则对于任意初始条件 $\mathbf{x}(0) \succeq \mathbf{0}$, 在平均驻留时间切换 $\tau > \frac{\ln u}{\eta}$ 的条件下, 系统 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的解渐近收敛至一个球域内. 此外, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty}^{v_{\sigma(t_k)}} &\leq \\ \theta\left[1 + \frac{(u-1)}{1 - ue^{-\eta\tau}}\right] + (\varphi_0 - \theta)e^{-\int_{t_0}^t (\eta(s) - \frac{\ln u}{\tau})ds}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$u = \max_{i \in \langle n \rangle; p, q \in \langle m \rangle} \frac{v_{pi}}{v_{qi}};$$

$$\theta = \frac{\hat{\omega}}{\max_{i \in \langle n \rangle; p \in \langle m \rangle; t \geq 0} [A_{pi}(t)v_p]};$$

$$\varphi_0 = \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(0)i}} \right\};$$

$$\varphi_k = u[\theta + (\varphi_{k-1} - \theta)e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta(t)dt}], \quad k \geq 1;$$

$$0 < \eta < \inf_{t \geq 0} \eta(t);$$

$$\eta(t) = \min_{p \in \langle m \rangle} \eta_p(t);$$

$$\eta_p(t) = \min_{i \in \langle n \rangle} \eta_{pi}(t).$$

$\eta_{pi}(t)$ 是如下方程的唯一正解:

$$\frac{A_{pi}(t)v_p}{v_{pi}} + \eta_{pi}(t) = 0. \quad (22)$$

3 数值例子

系统 \mathcal{H} 被定义为

$$\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) = \frac{t+4}{t+5} \begin{pmatrix} -2x_1 + 4x_2 - 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 5x_1 - 8x_2 + 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}) = \frac{t+4}{t+5} \begin{pmatrix} -4x_1 + 8x_2 - 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 4x_1 - 2x_2 - 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}(t) = 0.05(|\sin(t)|, |\cos(t)|)^T.$$

其中:时变子系统 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 是1次齐次的和协同的;扰动向量 $\mathbf{w}(t) \succeq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{w}(t)\|_\infty \leq \hat{w} = 0.05$.

不存在一个公共向量 $\mathbf{v} \succ \mathbf{0}$ 同时满足 $\mathbf{f}_1(t, \mathbf{v}) \prec \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{f}_2(t, \mathbf{v}) \prec \mathbf{0}$,但是,存在两个不同的正向量 $\mathbf{v}_1 = (4, 5)^T$ 和 $\mathbf{v}_2 = (5, 4)^T$ 满足 $\mathbf{f}_1(t, \mathbf{v}_1) \prec \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{f}_2(t, \mathbf{v}_2) \prec \mathbf{0}$.

可得到 $u = 1.25$, $\theta = 0.0791$, $\eta = 0.1265$, $ADT \tau > \frac{\ln u}{\eta} = 1.7640$. 根据定理1,当切换信号的平均驻留时间ADT满足 $\tau > 1.7640$ 时,此切换时变系统的解渐近收敛至一个球域内.

选取 $ADT \tau = 5$ 和初始条件 $\mathbf{x}(0) = (8, 10)^T$,根据定理1,可得到

$$\|\mathbf{x}(t)\|_\infty \leq 5[0.1379 + 1.9209e^{-0.0819t}].$$

图1为切换非线性正时变系统 \mathcal{H} 的轨迹,图2

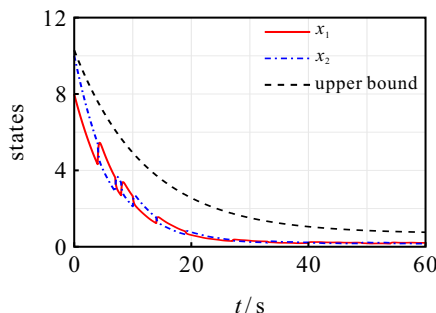


图1 系统 \mathcal{H} 的轨迹

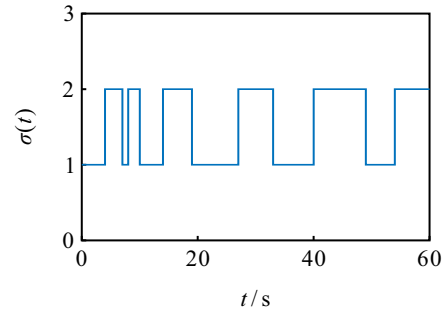


图2 对应的切换信号

为相应的切换信号.

4 结论

本文讨论了一类切换非线性正时变系统的状态界估计问题,得到了所讨论的切换非线性时变系统的解渐近收敛至平衡点的一个邻域的准则,并给出了每个子系统的衰减率.在分析此切换非线性时变系统时,没有使用比较原理,不需要构造或选择某个比较系统.

参考文献 (References)

- [1] Farina L, Rinaldi S. Positive linear systems: Theory and applications[M]. New York: Wiley, 2000.
- [2] Kaczorek T. Positive 1D and 2D systems[M]. London: Springer-Verlag, 2002.
- [3] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [4] Zou Y, Meng Z, Meng D. On exponential stability of switched homogeneous positive systems of degree one[J]. *Automatica*, 2019, 103: 302-309.
- [5] Liu Y L, Kao Y G, Karimi H R, et al. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear switched singular systems[J]. *Information Sciences*, 2016, 358: 18-28.
- [6] Han Y Q, Kao Y G, Park J H. Robust nonfragile observer-based control of switched discrete singular systems with time-varying delays: A sliding mode control design[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(5): 1462-1483.
- [7] Kao Y G, Yang T S, Park J H. Exponential stability of switched Markovian jumping neutral-type systems with generally incomplete transition rates[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(5): 1583-1596.
- [8] Kao Y G, Liu X N, Song M H, et al. Nonfragile-observer-based integral sliding mode control for a class of uncertain switched hyperbolic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(8): 5059-5066.
- [9] Lin L X, Liu Z, Kao Y G, et al. Observer-based adaptive control for a class of uncertain switched systems with time-delay: A sliding mode approach[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2020, 18(11): 2907-2916.
- [10] Chen H Y, Zong G D, Zhao X D, et al. Secure filter

- design of fuzzy switched CPSs with mismatched modes and application: A multidomain event-triggered strategy[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2023, 19(10): 10034-10044.
- [11] 黄金杰, 郝现志, 潘晓真. 基于模型依赖驻留时间的异步切换控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 609-618.
(Huang J J, Hao X Z, Pan X Z. Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(3): 609-618.)
- [12] 陈征, 高岩. 切换系统的二类共同 Lyapunov 函数[J]. *控制与决策*, 2013, 28(4): 623-626.
(Chen Z, Gao Y. Two classes of common Lyapunov functions for switched systems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(4): 623-626.)
- [13] Smith H. *Monotone dynamical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*[M]. Providence: American Mathematical Society, 1995.
- [14] Mason O, Verwoerd M. Observations on the stability properties of cooperative systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(6): 461-467.
- [15] Bokharaie V S, Mason O, Verwoerd M. D-stability and delay-independent stability of homogeneous cooperative systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(12): 2882-2885.
- [16] Liu X W, Yu W S, Wang L. Stability analysis for continuous-time positive systems with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1024-1028.
- [17] Liu X W, Yu W S, Wang L. Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2009, 56(7): 600-604.
- [18] Ngoc P H A. On exponential stability of nonlinear differential systems with time-varying delay[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25(9): 1208-1213.
- [19] Feyzmahdavian H R, Charalambous T, Johansson M. Exponential stability of homogeneous positive systems of degree one with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(6): 1594-1599.
- [20] Feyzmahdavian H R, Charalambous T, Johansson M. Asymptotic stability and decay rates of homogeneous positive systems with bounded and unbounded delays[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2014, 52(4): 2623-2650.
- [21] Dong J G. On the decay rates of homogeneous positive systems of any degree with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(11): 2983-2988.
- [22] Xiao Q, Huang Z K, Zeng Z G, et al. Stability of homogeneous positive systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2023, 152: 110965.
- [23] Fridman E, Shaked U. On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs[J]. *Automatica*, 2003, 39(11): 2005-2010.
- [24] Nam P T, Pathirana P N, Trinh H. Exponential convergence of time-delay systems in the presence of bounded disturbances[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2013, 157: 843-852.
- [25] Hien L V, Trinh H M. A new approach to state bounding for linear time-varying systems with delay and bounded disturbances[J]. *Automatica*, 2014, 50(6): 1735-1738.
- [26] Nam P T, Pathirana P N, Trinh H. Reachable set bounding for nonlinear perturbed time-delay systems: The smallest bound[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2015, 43: 68-71.
- [27] Zhang N, Sun Y G, Zhao P. State bounding for homogeneous positive systems of degree one with time-varying delay and exogenous input[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(7): 2893-2904.
- [28] Zhang N, Sun Y G, Meng F W. State bounding for switched homogeneous positive nonlinear systems with exogenous input[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29: 363-372.
- [29] Zhang N, Sun Y G. Reachable set estimation for switched homogeneous positive systems of degree greater than one[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2024, 34(16): 11238-11249.
- [30] Mazenc F. Stability analysis of time-varying neutral time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(2): 540-546.
- [31] Ngoc P H A. Novel criteria for exponential stability of nonlinear differential systems with delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(2): 485-490.
- [32] Ngoc P H A, Trinh H. Novel criteria for exponential stability of linear neutral time-varying differential systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1590-1594.
- [33] Liu X W, Yang J X, Wang X L. Stability analysis of a class of nonlinear systems with delays: A positive system method[C]. Chinese Automation Congress. Jinan, 2017: 1625-1629.
- [34] Nguyen K S, Le V N. Exponential stability analysis for a class of switched nonlinear time-varying functional differential systems[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2022, 44: 101177.
- [35] Hale J K, Verduyn L S M. *Introduction to functional-differential equations*[M]. Berlin: Springer, 1993.
- [36] Zhang L X, Gao H J. Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time[J]. *Automatica*, 2010, 46(5): 953-958.

作者简介

张娜 (1984-), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为切换系统稳定性、医学图像处理与分析, E-mail: sms_zhangn@ujn.edu.cn;

孙元功 (1975-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为混杂动态系统分析与镇定控制、多智能体系统一致性分析与协同控制、微(差)分方程定性理论, E-mail: ss_sunyg@ujn.edu.cn.