

控制与决策

Control and Decision

切换网络拓扑上非线性多智能体系统的二分-分量一致性

黄宇权, 甘晓亮, 马忠军

引用本文:

黄宇权, 甘晓亮, 马忠军. 切换网络拓扑上非线性多智能体系统的二分-分量一致性[J]. *控制与决策*, 2025, 40(12): 3597-3604.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0140>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[布尔控制网络的集成集可控](#)

Ensemble set controllability of Boolean control networks

控制与决策. 2021, 36(9): 2187-2194 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1837>

[考虑主体心理行为的三边单向非循环稳定匹配](#)

Three-sided stable matching with one-way acyclic preference considering agent's psychological behavior

控制与决策. 2021, 36(3): 741-746 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1047>

[带输入饱和的不确定非线性系统自适应模糊触发式补偿控制](#)

Adaptive fuzzy trigger compensation control for uncertain nonlinear system with input saturation

控制与决策. 2021, 36(12): 3007-3014 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0907>

[基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识](#)

[Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering](#)

控制与决策. 2021, 36(12): 2946-2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

[基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制](#)

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97-104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

切换网络拓扑上非线性多智能体系统的二分-分量一致性

黄宇权¹, 甘晓亮^{2†}, 马忠军³

- (1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004;
2. 广西高校数据分析与计算重点实验室, 广西 桂林 541004;
3. 广西应用数学中心 (桂林电子科技大学), 广西 桂林 541004)

摘要: 二分-分量一致是指多智能体系统中具有相似特性智能体的部分分量会随时间推移趋于某个相同的值, 而剩余智能体的对应分量则趋于相反的值, 是一种弱于二分一致的动力学行为. 基于此, 研究切换网络拓扑上非线性多智能体系统的二分-分量一致性问题. 首先, 考虑有向符号图上的非线性多智能体网络系统, 在切换网络拓扑满足结构平衡条件的情况下, 控制协议也相应地进行切换; 然后, 通过设计合适的控制协议, 建立相应的偏差系统, 结合图论、稳定性理论和矩阵理论, 得到该多智能体系统在发生切换拓扑情况下实现二分-分量一致的充分条件; 最后, 通过数值模拟验证理论结果的可行性.

关键词: 非线性多智能体系统; 二分-分量一致性; 二分一致性; 部分分量一致性; 切换拓扑; 领导-跟随

中图分类号: O231.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0140

引用格式: 黄宇权, 甘晓亮, 马忠军. 切换网络拓扑上非线性多智能体系统的二分-分量一致性 [J]. 控制与决策, 2025, 40(12): 3597-3604.

Bipartite component consensus for nonlinear multi-agent systems on switched network topologies

HUANG Yu-quan¹, GAN Xiao-liang^{2†}, MA Zhong-jun³

- (1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;
2. Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin 541004, China;
3. Center for Applied Mathematics of Guangxi (GUET), Guilin 541004, China)

Abstract: Bipartite component consensus refers to a phenomenon in which, within a multi-agent system, the state components of agents with similar characteristics asymptotically converge to the same value, while the corresponding state components of the remaining agents converge to the opposite value. It is a dynamic behavior weaker than bipartite consensus. Therefore, the bipartite component consensus problem is investigated in the nonlinear multi-agent systems on switched network topologies. Firstly, considering the nonlinear multi-agent network system on signed directed graphs, and the control protocol switches accordingly if the switching network topology satisfies the structural balance condition. Then, by designing the appropriate control protocol, establishing the corresponding error system, combining the graph theory, stability theory and matrix theory, the sufficient conditions for the multi-agent system to realize the bipartite component consensus when the switching topology occurs are obtained. Finally, the feasibility of the theoretical results is verified by numerical simulation.

Keywords: nonlinear multi-agent systems; bipartite component consensus; bipartite consensus; partial component consensus; switching topologies; leader-following

0 引言

近年来, 得益于分布式控制在自动驾驶汽车、生物系统和机器人系统等复杂场景中展现出优秀的协同控制能力, 多智能体系统的分布式控制理论得到

了广泛的研究^[1-5]. 多智能体系统是由众多智能体及其相互作用组成的系统, 其中的一致性问题是分布式控制中的一个重要研究课题, 其核心是通过设计一个合适的控制协议, 使得多智能体系统中某些特

收稿日期: 2025-02-10; 录用日期: 2025-06-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62466011); 广西自然科学基金项目 (2023GXNSFBA026141); 广西科技计划项目 (桂科 AD23023002); 2023 年广西高校中青年骨干教师基础能力提升项目 (2023KY0216).

†通信作者. E-mail: ganxiaoliang21@163.com.

定的状态偏差(如位置偏差等)随时间推移趋于零.

值得注意的是,当前许多关于多智能体系统的研究均假设个体之间的相互作用为合作关系(或促进作用)^[6-9],即它们加权连接矩阵的元素均为非负数.然而,在实际应用中,智能体之间不仅有合作关系(或促进作用),同时可能存在着竞争关系(或抑制作用),例如具有催化和抑制作用的化学系统与信任-不信任网络等.竞争与合作的关系可以用符号图进行描述,其中智能体之间正的连接权重代表智能体的合作关系,负的连接权重代表竞争关系^[10].Alrafini^[11]在合作与竞争并存的网络上首次提出并研究了二分一致性问题.Li等^[12]深入探讨了有向符号图上一类受时滞和执行器故障影响的随机非线性多智能体系统,针对分布式动态输出反馈的二分一致性问题进行了研究.Wang等^[13]研究了有向符号网络上多智能体系统的有限时间二分一致性问题.Zhang等^[14]考虑固定和切换拓扑下异构线性多智能体系统的自适应二分事件触发输出一致性问题,提出全新的完全分布式二分事件触发补偿器,实现了该多智能体系统的二分事件触发一致性.

目前已有的很多一致性研究是针对多智能体系统中所有状态变量进行的.然而,在实际应用中,有时只需智能体中部分特定的变量达到一致即可,例如无人机与地面武装部队进行协同任务,只需其前进方向的位移分量实现一致.根据以上情况,吴彬彬等^[15]首次提出多智能体系统的部分分量一致性,构造牵制控制协议,运用稳定性理论,导出了一阶非线性多智能体系统实现部分分量一致性的充分条件.考虑到通信资源是有限的,周阳平等^[16]和于俊生等^[17]分别研究了多智能体系统在自适应间歇牵制控制和事件触发控制下的部分分量一致性问题.华彩凤等^[18]将二分一致性与部分分量一致性结合,基于多智能体系统结构平衡的情况设计一个自适应牵制控制协议,导出了多智能体系统二分-部分分量一致性的充分条件.

由于某些因素的影响,多智能体系统内各智能体之间的相互作用可能会发生变化,即系统的拓扑结构会发生改变,这种情况称为切换拓扑.Feng等^[19]研究了在切换拓扑下合作与竞争并存的异构多智能体系统中领导-跟随拟一致性问题.Lu等^[20]提出一种基于结构平衡的拓扑切换方法,研究了在随机切换拓扑下,二阶非线性多智能体系统的有限时间二分一致性问题.

受到上述文献启发,本文研究切换网络拓扑上一阶非线性多智能体系统的二分-分量一致性问题.

具体而言,本文的主要工作如下:

1) 对于拓扑切换会导致多智能体系统的不稳定性,从两个方面进行考虑:①考虑到多智能体系统发生切换拓扑的模式是有限的,因此可以建立不同切换模式下 Lyapunov 函数之间的联系;②使用时变 Lyapunov 函数处理非线性领导-跟随多智能体系统的二分-分量一致性问题,时变 Lyapunov 函数的结构包含切换拓扑的时间信息,可以更好地研究切换拓扑下多智能体系统的二分-分量一致性.此外,若时变 Lyapunov 函数中的时变矩阵退化成常数矩阵,则变为常用的时不变 Lyapunov 函数.

2) 根据现实应用的需要,如无人机编队执行任务时可能会受到天气或环境等因素的影响,导致智能体之间的通信拓扑发生切换,而目前现有的多智能体系统二分-分量一致性研究还未有考虑切换拓扑的情形,无法应对上述的突发情况,故提出切换拓扑下多智能体系统二分分量一致性是个必需认真对待的一个问题.将切换拓扑与多智能体系统二分-分量一致相结合,使得本文结果比现有结果更具有实际应用价值和理论指导的意义.

符号说明: R^n 表示 n 维欧几里得空间,对于列向量 $a \in R^n$, $\|a\| = \sqrt{a^T a}$. 对于矩阵 $A \in R^{n \times n}$, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, 其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大特征值. I_n 表示一个 n 阶单位矩阵, $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ 表示对角线元素为 h_i 的对角矩阵, \otimes 表示 Kronecker 积, \forall 表示任意, \exists 表示存在, \mathbb{N} 表示含 0 的自然数集合, $\exp(\cdot)$ 表示指数函数.

1 预备知识

考虑如下 n 维自治常微分方程组^[21]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1)$$

其中 $f(x) \in C[R^n, R^n]$, $f(x) \equiv 0$. 设 $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)^T \in R^n$, 令 $y = (x_1, \dots, x_m)^T \in R^m$, $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T \in R^{n-m}$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \|z\| = \left(\sum_{i=m+1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 1^[21] 若 $\forall \epsilon > 0$, $\forall t_0 \in R^+$, $\exists \rho(t_0, \epsilon)$, $\forall x_0 \in S_\rho := \{x \mid \|x\| < \rho\}$, 有 $\|y(t, t_0, x_0)\| < \epsilon$, 则称式 (1) 的平凡解关于部分变元 y 是稳定的.

定义 2^[21] 若 $\forall t_0 \in R^+$, $\exists \delta(t_0) > 0$, $\forall \epsilon > 0$, $\forall x_0 \in S_{\delta(t_0)} := \{x \mid \|x\| \leq \delta(t_0)\}$, $\exists T_0(t_0, x_0, \epsilon)$, 当 $t \geq t_0 + T_0$ 时, 有 $\|y(t, t_0, x_0)\| < \epsilon$, 则称式 (1) 的平凡解关于部分变元 y 是吸引的, 其中 $S_{\delta(t_0)}$ 称为关于 y 的吸引区域.

定义 3^[21] 若式 (1) 的平凡解关于部分变元 y 稳定且吸引, 则称式 (1) 的平凡解关于部分变元 y 渐近稳定.

定义 4^[21] 若函数 $\phi \in C[R^+, R^+]$ (或 $\phi \in C[(0, R), R^+]$) 是严格单调递增的连续函数, 且 $\phi(0) = 0$, 则称 ϕ 属于 K 类函数, 记为 $\phi \in K$.

引理 1^[21] 令 σ, ϕ 和 ψ 都是 K 类函数. 若存在函数 $V(t, x)$ 满足 $\sigma(\|y\|) \leq V(t, x) \leq \phi(\|y\|)$, 其导数 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} \leq -\psi(\|y\|)$, 则式 (1) 的平凡解关于 y 渐近稳定.

引理 2^[17] 设 A, B, C 和 D 都是合适维度的矩阵, 其中 C 是对称矩阵, Kronecker 积具有以下特性:

- 1) $(A + B) \otimes D = (A \otimes D) + (B \otimes D)$;
- 2) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;
- 3) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$.

引理 3^[15] 设 $\bar{C} = (\bar{c}_{ij}) \in R^{N \times N}$, $\bar{D} = (\bar{d}_{ij}) \in R^{n \times n}$, 则存在 nN 阶置换矩阵 $Q = Q_r \dots Q_1$, 其中 $Q_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 是第 1 类初等行变换矩阵 (即将单位矩阵的某两行进行对换后的矩阵), 使得 $Q(\bar{C} \otimes \bar{D})Q^{-1} = \bar{D} \otimes \bar{C}$.

用分段函数 $\omega(t) : [0, +\infty) \rightarrow S$ 表示切换信号, $S = \{0, 1, \dots, s\}$. 将时间区间 $[0, +\infty)$ 划分为一个非空、有界且不重叠的时间区间集合 $\{[t_p, t_{p+1}) \mid p \in \mathbb{N}\}$, 其中 $t_0 = 0$.

令 $G^{\omega(t)} = (V, E^{\omega(t)}, B^{\omega(t)})$ 为有向符号图, N 个跟随者构成的节点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, 边集为 $E^{\omega(t)} \subseteq V \times V$, 矩阵 $B^{\omega(t)} = (b_{ij}^{\omega(t)})_{N \times N}$. 假设有向图 $G^{\omega(t)}$ 中不存在自环和多边的情况, 故有 $b_{ii}^{\omega(t)} = 0$. $b_{ij}^{\omega(t)} = 0 \Leftrightarrow (i, j) \notin E^{\omega(t)}$ 表示智能体 v_i 不能从智能体 v_j 接收任何信息, 否则 $b_{ij}^{\omega(t)} \neq 0 \Leftrightarrow (i, j) \in E^{\omega(t)}$. 若耦合权重 $b_{ij}^{\omega(t)} > 0 (b_{ij}^{\omega(t)} < 0)$, 则表示智能体 v_i 与智能体 v_j 是合作关系 (竞争关系). 考虑到邻接矩阵 $B^{\omega(t)}$ 不再是非负矩阵, 其对应的 Laplace 矩阵表示为 $L^{\omega(t)} = (l_{ij}^{\omega(t)})_{N \times N}$, 其中

$$l_{ii}^{\omega(t)} = \sum_{k=1, k \neq i}^N |b_{ik}^{\omega(t)}|, \quad l_{ij}^{\omega(t)} = -b_{ij}^{\omega(t)} (i \neq j).$$

令集合 $E^{\omega(t)}$ 中的元素 $(v_i, v_j) \neq 0$ 表示 v_j 是 v_i 的邻居, 定义 $N_i^{\omega(t)} = \{v_j \mid (v_j, v_i) \in E^{\omega(t)}, i = 1, 2, \dots, N\}$ 为节点 v_i 的邻居.

注 1 由于邻接矩阵 $B^{\omega(t)}$ 内元素不一定非负, 其对应的 Laplace 矩阵的行和不一定为 0.

假设 1^[20] 假设图 $\tilde{G}^{\omega(t)}$ 由 N 个跟随者和 1 个领导者组成, 其中 $\tilde{G}^{\omega(t)}$ 包含一棵有向生成树, 领导者为

根节点. 即多智能体系统的领导者可以将控制信号传递给其余的智能体, 系统不存在孤立的智能体.

定义 5^[12] 如果节点集 V 可以划分为两个子集 V_1 和 V_2 , 其中 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 对于任意两个节点 $v_i, v_j \in V_k (k \in \{1, 2\})$, 有 $b_{ij}^{\omega(t)} \geq 0$, 而对于任意节点 $v_i \in V_k, v_j \in V_q, k \neq q, q \in \{1, 2\}$, 有 $b_{ij}^{\omega(t)} \leq 0$, 则称符号图是结构平衡的.

假设 2^[20] 假设通信拓扑 $G^{\omega(t)}$ 是结构平衡的. 即多智能体系统可以分为组内是合作交互, 组间是竞争交互的两个子集.

引理 4^[18] 如果有向图 $G^{\omega(t)}$ 是结构平衡的, 则存在矩阵 $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_N)$, 使得邻接矩阵 $B^{\omega(t)}$ 合同 (或相似) 于非负矩阵 $\bar{B}^{\omega(t)}$, 即有 $C^T B^{\omega(t)} C = \bar{B}^{\omega(t)}$, 其中: $c_i \in \{1, -1\}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 且易知 $C^{-1} = C, C^T = C$.

2 主要结果

考虑由 $(N + 1)$ 个智能体组成的非线性领导-跟随多智能体系统, 选择智能体 v_0 作为领导者, 多智能体系统的动力学描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + u_i(t), \\ \dot{x}_0(t) = f(x_0(t)). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_i(t) = (x_{i1}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in R^n (i \in \{1, 2, \dots, N\})$ 表示跟随智能体的状态向量; $f : R^n \rightarrow R^n$ 表示一个非线性的连续向量值函数, 表征智能体自身的内部动力学; $u_i(t)$ 为跟随智能体 v_i 的控制协议; $x_0(t) = (x_{01}(t), \dots, x_{0n}(t))^T \in R^n$ 表示领导智能体的状态向量.

考虑切换只发生在每个区间的初始时刻 t_p , 那么拓扑在下一个切换时刻 t_{p+1} 前都是不变的, 即 Laplace 矩阵 $L^{\omega(t)}$ 在区间 $[t_p, t_{p+1})$ 内是一个常数矩阵.

设控制协议的形式为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -M^{\omega(t)} \sum_{j \in N_i^{\omega(t)}} [|b_{ij}^{\omega(t)}| (x_i(t) - \text{sgn}(b_{ij}^{\omega(t)}) x_j(t))] - \\ & M^{\omega(t)} h_i^{\omega(t)} (x_i(t) - c_i x_0(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $H^{\omega(t)} = \text{diag}(h_1^{\omega(t)}, \dots, h_N^{\omega(t)})$, $h_i^{\omega(t)}$ 为牵制控制权重, $\text{sgn}(b_{ij}^{\omega(t)})$ 为符号函数, $c_i = 1 (v_i \in V_1), c_i = -1 (v_i \in V_2), i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $M^{\omega(t)} \in R^{n \times n}$ 为增益对角矩阵. 若智能体 v_i 可以接收领导者的信息, 则 $h_i^{\omega(t)} > 0$, 否则 $h_i^{\omega(t)} = 0$. 设 $\tilde{L}^{\omega(t)} := L^{\omega(t)} + H^{\omega(t)} \in R^N$.

引理 5^[19] 设 X, Y, Z 为相同维数的常矩阵, 对于 $0 \leq \lambda(t) \leq 1$, 如下两式等价:

$$X + (1 - \lambda(t))Y + \lambda(t)Z < 0, \quad (4)$$

$$X + Y < 0, X + Z < 0. \quad (5)$$

注2 引理5中要求矩阵小于零是指矩阵的特征值均小于0,即要求矩阵为负定矩阵.

假设3^[19] 存在常数 $\xi_1, \xi_2 > 0$, 使得 $\xi_1 \leq t_{p+1} - t_p \leq \xi_2, p \in \mathbb{N}$, 其中 $t_{p+1} - t_p$ 表示第 p 次拓扑的停留时间.

注3 假设3中, 对于 $\forall t \in [t_p, t_{p+1}), p, l \in \mathbb{N}$, 当 $p > l$ 时, 有 $(p - l)\xi_1 \leq t - t_l$ 成立.

定义二分一致偏差 $e_i(t) = x_i(t) - c_i x_0(t)$, 则偏差系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= f(x_i(t)) - c_i f(x_0(t)) - \\ &M^{\omega(t)} \sum_{j=1}^N l_{ij}^{\omega(t)} x_j(t) - M^{\omega(t)} h_i^{\omega(t)} e_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

将其写成向量形式

$$\dot{e}(t) = F(e(t)) - (\tilde{L}^{\omega(t)} \otimes M^{\omega(t)})e(t). \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} e(t) &= (e_1(t)^T, \dots, e_N(t)^T)^T \in R^{nN}, \\ e_i(t) &= (e_{i1}(t), \dots, e_{in}(t))^T = \\ &(x_{i1}(t) - c_i x_{01}(t), \dots, x_{in}(t) - c_i x_{0n}(t))^T, \\ F(e(t)) &= ((f(x_1(t)) - c_1 f(x_0(t)))^T, \dots, \\ &(f(x_N(t)) - c_N f(x_0(t)))^T)^T. \end{aligned}$$

根据引理3, 偏差系统(7)可以通过一系列初等变换重新排列矩阵分量, 将所需要研究的分量置换到前面, 从而使 Nn 维的原偏差系统转化为 nN 维的新偏差系统, 有

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - (M^{\omega(t)} \otimes \tilde{L}^{\omega(t)})\tilde{e}(t). \quad (8)$$

对于 $\forall v \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{e}_v(t) &= (\tilde{e}_{1v}(t), \dots, \tilde{e}_{Nv}(t))^T = \\ &(x_{1v}(t) - c_1 x_{0v}(t), \dots, x_{Nv}(t) - c_N x_{0v}(t))^T \in R^N, \\ \tilde{e}(t) &= (\tilde{e}_1(t)^T, \dots, \tilde{e}_n(t)^T)^T \in R^{nN}, \\ \tilde{F}(\tilde{e}(t)) &= (\tilde{f}_1^T, \dots, \tilde{f}_n^T)^T \in R^{nN}, \\ \tilde{f}_v^T &= (f_v(x_1(t)), f_v(x_2(t)), \dots, f_v(x_N(t)))^T - \\ &(c_1 f_v(x_0(t)), c_2 f_v(x_0(t)), \dots, \\ &c_N f_v(x_0(t)))^T \in R^N. \end{aligned}$$

定义6^[18] 如果存在 $1 \leq m \leq n$, 对于任意初始条件, 系统(2)的解满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{v=1}^m \|\tilde{e}_v(t)\| = 0, v = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

则称领导-跟随多智能体系统(2)关于前 m 个分量实现二分-分量一致, m 表示多智能体实现分量一致的分量个数, $\tilde{e}_v(t) = (\tilde{e}_{1v}(t), \dots, \tilde{e}_{Nv}(t))^T = (x_{1v}(t) -$

$$c_1 x_{0v}(t), \dots, x_{Nv}(t) - c_N x_{0v}(t))^T \in R^N.$$

注4 若定义6中的分量 $m = n$, 则系统的二分-分量一致性变为二分一致性.

根据引理4, 引入变换矩阵 $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_N)$. 对新偏差系统(8)进行规范状态变换, 令 $z(t) = (I_n \otimes C)\tilde{e}(t)$, 对其求导可得

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (I_n \otimes C)\dot{\tilde{e}}(t) = \\ &(I_n \otimes C)[\tilde{F}(\tilde{e}(t)) - (M^{\omega(t)} \otimes \tilde{L}^{\omega(t)})\tilde{e}(t) = \\ &(I_n \otimes C)\tilde{F}(\tilde{e}(t)) - (M^{\omega(t)} \otimes \tilde{L}^{\omega(t)})z(t). \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $z(t) = (z_1^T(t), \dots, z_n^T(t)) \in R^{nN}$, $\tilde{L}^{\omega(t)} = C^T \tilde{L}^{\omega(t)} C$. 则新偏差系统(8)的二分-分量一致性问题可等价于系统(10)的部分变元稳定性问题.

假设4^[18] 存在 $q > 0$, 对于任意 $x_i(t) \in R^n, x_0(t) \in R^n$, 非线性函数 $f(x_i(t))$ 满足

$$\|A[f(x_i(t)) - c_i f(x_0(t))]\| \leq q \|A[x_i(t) - c_i x_0(t)]\|,$$

其中 $A = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^m, 0, \dots, 0), 1 \leq m \leq n$.

注5 K_∞ 函数为无穷大的 K 类函数, 属于 K 类函数的一种特殊情形. $V^{(a)}(t) (a \in S)$ 是指切换信号集合 S 中拓扑 a 所对应的 Lyapunov 函数. 当 $t \in [t_p, t_{p+1})$ 时, 常数 $\delta^{\omega(t)} = \delta^{\omega(t_p)}, p \in \mathbb{N}$.

引理6 如果存在连续可微函数 $V^{\omega(t)} : R^{nN} \rightarrow [0, +\infty)$, K_∞ 函数 ϕ, ψ 以及常数 $\delta^{\omega(t)} > 0, \mu > 1$, 使得:

- 1) $\phi(\|y\|) \leq V^{\omega(t)}(t) \leq \psi(\|y\|)$;
- 2) $\dot{V}^{\omega(t)}(t) \leq -\delta^{\omega(t)} V^{\omega(t)}(t)$;
- 3) $V^{\omega(t)}(t) < \mu V^{\omega(a)}(t), a \in S$.

则对于 $t \in [t_{p+1} - t_p)$, 有

$$V^{\omega(t)}(t) \leq V^{\omega(t_0)}(t_0) \exp\left\{\left(-\delta_1 + \frac{\ln \mu}{\xi_1}\right)t\right\}. \quad (11)$$

其中: $\delta_1 = \min \delta^{\omega(t)}, t \in [0, +\infty)$.

证明 当 $t \in [t_p, t_{p+1})$ 时, 将引理6条件2)不等式两边对 t 进行积分, 可以得到

$$V^{\omega(t)}(t) \leq V^{\omega(t_p)}(t_p) \exp(-\delta^{\omega(t_p)}(t - t_p)). \quad (12)$$

根据引理6条件3) $V^{\omega(t)}(t) < \mu V^{\omega(a)}(t), a \in S$, 以及 $\omega(t) : [0, +\infty) \rightarrow S$, 容易得到 $V^{\omega(t_p)}(t_p) < \mu \lim_{t \rightarrow t_p^-} V^{\omega(t_{p-1})}(t)$.

对于 $t \in [t_{p-1}, t_p)$, 由式(12)易得 $\lim_{t \rightarrow t_p^-} V^{\omega(t_{p-1})}(t) \leq V^{\omega(t_{p-1})}(t_{p-1}) \exp(-\delta^{\omega(t_{p-1})}(t_p - t_{p-1}))$, 综上有

$$\begin{aligned} V^{\omega(t)}(t) &\leq \\ &\mu \exp(-\delta^{\omega(t_p)}(t - t_p) - \\ &\delta^{\omega(t_{p-1})}(t_p - t_{p-1})) \times V^{\omega(t_{p-1})}(t_{p-1}) \leq \\ &\mu^p \exp(-\delta_1 t) V^{\omega(t_0)}(t_0). \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $\mu^p = \exp(p \ln \mu)$, 根据注 3 可知, 当 $l = 0$ 时, $p \leq t/\xi_1$, 可得

$$V^{\omega(t)}(t) \leq \exp\left\{\left(-\delta_1 + \frac{\ln \mu}{\xi_1}\right)t\right\} V^{\omega(t_0)}(t_0). \quad (14)$$

引理 6 得证. \square

注 6 引理 6 的主要作用是令满足引理 6 条件 1) ~ 条件 3) 的函数 $V^{\omega(t)} : R^{nN} \rightarrow [0, +\infty)$ 可以化简为后续定理 1 的一般结果. 引理 6 的条件 1) 保证了函数 $V^{\omega(t)}$ 的正定; 条件 2) 根据定理 1 推导过程中所得到的不等式所构造; 条件 3) 可以建立不同切换拓扑下 Lyapunov 函数的联系, 通过适当地放缩, 可以得到不等式 (14), 不等式右边部分是收敛的.

定理 1 在满足假设 1 ~ 假设 4 的情况下, 如果存在常数 $\delta^{(k)} > 0, \mu > 1, m_{k,1} > 0, m_{k,2} > 0$, 正定矩阵 $P_{k,1}$ 和 $P_{k,2}, k \in S$, 使得系统 (2) 在切换拓扑下, 通过控制协议 (3) 满足条件:

- 1) $2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,l} + \delta^{(k)} P_{k,l} - (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,l} - P_{k,l} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) + \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_w} < 0, l, w = 1, 2;$
- 2) $m_{k,1} I_{Nn} \leq P_{k,1}, P_{k,2} \leq m_{k,2} I_{Nn};$
- 3) $P_{k,1} < \mu P_{a,1}, P_{k,2} < \mu P_{a,2}, a \in S;$
- 4) $\theta = -\delta_1 + \frac{\ln \mu}{\xi_1} < 0.$

则系统 (2) 在发生拓扑切换时能实现二分-分量一致.

证明 令 $P_{\omega(t)}(t) = [(1 - \alpha(t))P_{\omega(t),1} + \alpha(t)P_{\omega(t),2}]$, 其中 $\alpha(t) = \frac{t_{p+1} - t}{t_{p+1} - t_p}, t \in [t_p, t_{p+1})$, 易得 $\alpha(t_p) = 1, \alpha(t_{p+1}^-) = 0$.

为了简化方程, 对于 $\forall t \in [t_p, t_{p+1}), p \in \mathbb{N}$, 令 $\omega(t) = k \in S$, 则有 $\delta^{\omega(t)} = \delta^{(k)}$.

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V^{(k)}(t) = z^T(t) P_k(t) (A \otimes I_N) z(t) = z^T(t) [(1 - \alpha(t)) P_{k,1} + \alpha(t) P_{k,2}] (A \otimes I_N) z(t). \quad (15)$$

这里重申 $\bar{L}^{(k)} \in R^{N \times N}, A = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^m, 0, \dots, 0), 1 \leq m \leq n$. 对于 $\forall t \in [t_p, t_{p+1})$, 将 $V^{(k)}(t)$ 沿着式 (10) 的轨迹对 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(k)}(t) = & \dot{z}^T(t) P_k(t) (A \otimes I_N) z(t) + \\ & z^T(t) \dot{P}_k(t) (A \otimes I_N) z(t) + \\ & z^T(t) \dot{P}_k(t) (A \otimes I_N) z(t) = \\ & [(I_n \otimes C) \tilde{F}(\tilde{e}(t))]^T P_k(t) (A \otimes I_N) z(t) - \\ & z^T(t) (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_k(t) (A \otimes I_N) z(t) + \\ & z^T(t) P_k(t) (A \otimes I_N) [(I_n \otimes C) \tilde{F}(\tilde{e}(t))] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z^T(t) P_k(t) (A \otimes I_N) (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) z(t) + \\ & z^T(t) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{t_{p+1} - t_p} (A \otimes I_N) z(t). \end{aligned} \quad (16)$$

根据假设 4 有

$$\begin{aligned} & [(I_n \otimes C) \tilde{F}(\tilde{e}(t))]^T P_k(t) (A \otimes I_N) z(t) + \\ & z^T(t) P_k(t) (A \otimes I_N) [(I_n \otimes C) \tilde{F}(\tilde{e}(t))] \leq \\ & 2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} z^T(t) P_k(t) (A \otimes I_N) z(t). \end{aligned} \quad (17)$$

根据假设 3 易知 $\frac{1}{\xi_2} \leq \frac{1}{t_{p+1} - t_p} \leq \frac{1}{\xi_1}$, 故存在函数 $\eta(t) : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$, 使得

$$\begin{aligned} \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{t_{p+1} - t_p} = & (1 - \eta(t)) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_1} + \\ & \eta(t) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

根据式 (16) ~ (18), 以及矩阵 $M^{(k)}$ 为对角矩阵, 易得

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(k)}(t) \leq & z^T(t) \left[(1 - \alpha(t)) \left(2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,1} - \right. \right. \\ & (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,1} - P_{k,1} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \left. \right) + \\ & \alpha(t) \left(2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,2} - (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,2} - \right. \\ & \left. P_{k,2} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \right) + \eta(t) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_2} + \\ & \left. (1 - \eta(t)) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_1} \right] (A \otimes I_N) z(t). \end{aligned} \quad (19)$$

根据引理 5, 定理 1 的条件 1) 等价于

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha(t)) \left[2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,1} + \delta^{(k)} P_{k,1} - \right. \\ & (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,1} - P_{k,1} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \left. \right] + \\ & \alpha(t) \left[2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,2} + \delta^{(k)} P_{k,2} - \right. \\ & (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,2} - P_{k,2} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \left. \right] + \\ & \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_w} < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

由于 ξ_w 中的 $w = 1, 2$, 上式等价于

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha(t)) \left[2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,1} + \delta^{(k)} P_{k,1} - \right. \\ & (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,1} - P_{k,1} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \left. \right] + \\ & \alpha(t) \left[2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,2} + \delta^{(k)} P_{k,2} - \right. \\ & (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,2} - P_{k,2} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \left. \right] + \\ & (1 - \eta(t)) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_1} + \eta(t) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_2} < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

对不等式 (21) 进行移项, 可得

$$\begin{aligned}
 & (1 - \alpha(t)) \left[2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,1} - (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,1} - \right. \\
 & \left. P_{k,1} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \right] + \alpha(t) \left[2q \frac{m_{k,2}}{m_{k,1}} P_{k,2} - \right. \\
 & \left. (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)})^T P_{k,2} - P_{k,2} (M^{(k)} \otimes \bar{L}^{(k)}) \right] + \\
 & (1 - \eta(t)) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_1} + \eta(t) \frac{P_{k,1} - P_{k,2}}{\xi_2} < \\
 & - (1 - \alpha(t)) \delta^{(k)} P_{k,1} - \alpha(t) \delta^{(k)} P_{k,2}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

根据式 (19) 和 (22) 可以得到

$$\dot{V}^{(k)}(t) \leq -\delta^{(k)} V^{(k)}(t). \quad (23)$$

根据引理 6 可得

$$\begin{aligned}
 V^{(k)}(t) & \leq \exp \left\{ -\delta_1 t + \frac{\ln \mu}{\xi_1} t \right\} V^{(0)}(0) \leq \\
 & e^{\theta t} V^{(0)}(0), \quad (24)
 \end{aligned}$$

其中 $\delta_1 = \min_{k \in S} \delta^{(k)}$.

根据定理 1 的条件 4): $\theta < 0$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\exp(\theta t)$ 指数收敛于零, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V^{(k)}(t) = 0$, 满足

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{v=1}^m \tilde{e}_v(t) = 0$, 表明 $\tilde{e}_v(t)$ 随着时间推移将趋近于零 ($x_{iv}(t) - c_i x_{0v}(t) \rightarrow 0$). 当节点 $v_i \in V_1$ 时, 有 $x_{iv}(t) \rightarrow x_{0v}(t)$, 当 $v_i \in V_2$ 时, 有 $x_{iv}(t) \rightarrow -x_{0v}(t)$. 综上可知系统 (2) 实现了在切换拓扑下领导-跟随多智能体系统的二分-分量一致. □

注 7 若 $P_{\omega(t),1} = P_{\omega(t),2} = P_{\omega(t)}$, 则依赖于时间的 Lyapunov 函数 (15) 将变为时不变 Lyapunov 函数 $z(t)^T P_{\omega(t)} z(t)$, 故 $z(t)^T P_{\omega(t)} z(t)$ 可看作 Lyapunov 函数 (15) 的一个特例.

注 8 若使定理 1 的条件 1) 成立, 则必须令 $\bar{L}^{(k)}$ 为正定矩阵, 这样的 $\bar{L}^{(k)}$ 是可以找到的, 只需领导者对跟随者发出的通信耦合强度 $h_i^{(k)}$ 足够大即可.

注 9 若在所有连续时间区间 $[t_p, t_{p+1})$ ($p \in \mathbb{N}$) 中均有 $c_i \equiv 1$, 则上述切换拓扑下多智能体系统二分-分量一致性变为多智能体系统分量一致性.

注 10 根据定理 1 的条件 2) $m_{k1} I_{Nn} \leq P_{k,1}$, $P_{k,2} \leq m_{k,2} I_{Nn}$, 可以相应构造对角矩阵 $P_{k,1}, P_{k,2}$, 使对角线元素的值均在闭区间 $[m_{k1}, m_{k2}]$ 内. 同时取合适的常数 $\mu > 1$, 容易求解不等式组得到满足定理条件的 $P_{k,1}, P_{k,2}$.

3 数值模拟

考虑系统 (2) 中 $N=4, n=3, A=\text{diag}\{1, 1, 0\}$ 的情形, 即只考虑多智能体系统在切换拓扑下前两个分量的二分一致性问题 ($m=2$). 取第 i 个智能体的自身动力学 $f(x_i(t))$ 为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = \sin x_{i1}, \\ \dot{x}_{i2} = \sin x_{i2}, \\ \dot{x}_{i3} = -0.5 \cos x_{i2} + 0.5 x_{i3}. \end{cases} \quad (25)$$

当 $q=2$ 时, 假设 4 成立. 考虑通信拓扑图 G^1 和 G^2 , 其结构如图 1 所示. G^1 和 G^2 对应的切换信号为 1 和 2, 故有 $\omega(t) \in \{1, 2\}$.

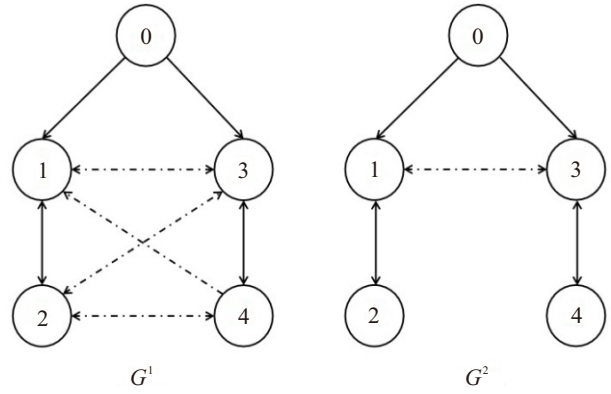


图1 多智能体系统的切换拓扑图

由图 1 可知, 系统的 Laplace 矩阵为

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

牵制矩阵 $H^{(1)} = \text{diag}(3, 0, 3, 0)$, $H^{(2)} = \text{diag}(6, 0, 6, 0)$, 增益矩阵 $M^{(1)} = \text{diag}(5, 5, 5)$, $M^{(2)} = \text{diag}(7, 7, 7)$, 引入变换矩阵 $C = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, 令 $m_{1,1}=0.6, m_{1,2}=0.9, m_{2,1}=0.61, m_{2,2}=0.92$, 取 $\mu=1.1, \delta_1=1.2, \xi_1=0.5$, 定理 1 的条件满足. 假设驻留时间为 0.5 s, 切换信号为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$, 通信拓扑以 0.5 s 为周期在 G^1 与 G^2 之间进行切换.

图 2 ~ 图 4 为系统的状态轨迹.

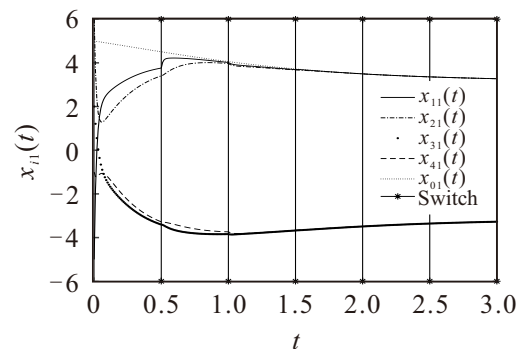


图2 智能体第 1 个分量 x_{i1} 随时间 t 的变化

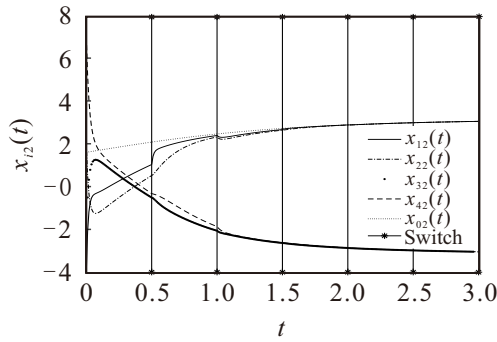
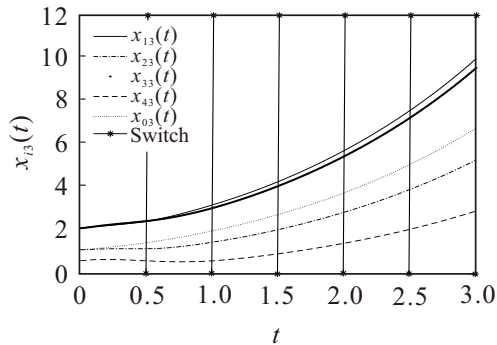
图3 智能体第2个分量 x_{i2} 随时间 t 的变化图4 智能体第3个分量 x_{i3} 随时间 t 的变化

图2和图3为多智能体系统中跟随者智能体与领导者智能体前两个分量的状态轨迹,其中 x_{ij} 为第 i 个智能体第 j 个分量的状态,Switch为发生拓扑切换的时间点.在满足定理条件的情况下,多智能体系统的前两个分量(领导者除外)在切换时会产生状态波动,但在实现二分-分量一致后再进行拓扑切换将不再有明显的状态波动.这是因为智能体之间相对关系是固定的,且系统在满足定理条件时具有较强的稳定性,故系统在实现二分分量一致性后状态轨迹趋于平滑.图4为系统中各智能体第3个分量没有施加二分一致的控制,故没有实现二分一致,且发生拓扑切换时不产生状态波动.

4 结论

本文基于有向符号图研究了切换拓扑下的非线性多智能体系统二分-分量一致性问题.通过设计合适的控制协议构建相应的偏差系统,根据矩阵理论将偏差系统的二分-分量一致性问题转化为系统的部分变元稳定性问题,结合稳定性理论设计了一个时变的Lyapunov函数,导出了该非线性多智能体系统在发生切换拓扑时达到二分-分量一致的充分条件.最后通过数值模拟,验证了结果的有效性.

参考文献 (References)

[1] Ning B D, Han Q L, Zuo Z Y, et al. Collective behaviors of mobile robots beyond the nearest neighbor rules with switching topology[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(5): 1577-1590.

[2] Tang Y, Xing X, Karimi H R, et al. Tracking control of networked multi-agent systems under new characterizations of impulses and its applications in robotic systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(2): 1299-1307.

[3] 周托, 刘全利, 王东, 等. 积分事件触发策略下的线性多智能体系统领导跟随一致性[J]. *控制与决策*, 2022, 37(5): 1258-1266.
(Zhou T, Liu Q L, Wang D, et al. Leader-following consensus for linear multi-agent systems based on integral-type event-triggered strategy[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(5): 1258-1266.)

[4] 王加朋, 杨家宁, 罗家祥. 切换拓扑下二阶多智能体混合事件触发固定时间一致性[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 775-784.
(Wang J P, Yang J N, Luo J X. Hybrid event-triggered fixed-time consensus for second-order multi agent systems under switching topologies[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(3): 775-784.)

[5] 苏忠蔚, 甘晓亮, 马忠军. 领导-跟随多智能体系统中的集合一致性[J]. *广西师范大学学报: 自然科学版*, DOI: 10.16088/j.issn.1001-6600.2024100101.
(Su Z W, Gan X L, Ma Z J. Set consensus of leader-following multi-agent system[J]. *Journal of Guangxi Normal University: Natural Science Edition*[J]. DOI: 10.16088/j.issn.1001-6600.2024100101.)

[6] Ren C E, Shi Z P, Du T. Distributed observer-based leader-following consensus control for second-order stochastic multi-agent systems[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 20077-20084.

[7] You X, Hua C C, Li K, et al. Fixed-time leader-following consensus for high-order time-varying nonlinear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(12): 5510-5516.

[8] Shi S L, Wang Z X, Song Q, et al. Leader-following quasi-bipartite synchronization of coupled heterogeneous harmonic oscillators via event-triggered control[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 427: 127172.

[9] Wang S M, Huang J. Adaptive leader-following consensus for multiple Euler-Lagrange systems with an uncertain leader system[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 30(7): 2188-2196.

[10] Zhao M, Peng C, Han Q L, et al. Cluster consensus of multiagent systems with weighted antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(11): 5609-5618.

[11] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935-946.

[12] Li Y F, Ding S X, Hua C C, et al. Distributed output-feedback bipartite consensus for stochastic nonlinear multiagent systems under directed switching networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(5): 2748-2757.

- [13] Wang H, Yu W W, Wen G H, et al. Finite-time bipartite consensus for multi-agent systems on directed signed networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, 65(12): 4336-4348.
- [14] Zhang H G, Cai Y L, Wang Y C, et al. Adaptive bipartite event-triggered output consensus of heterogeneous linear multiagent systems under fixed and switching topologies[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(11): 4816-4830.
- [15] 吴彬彬, 马忠军, 王毅. 领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性[J]. *物理学报*, 2017, 66(6): 5-11.
(Wu B B, Ma Z J, Wang Y. Partial component consensus of leader-following multi-agent systems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(6): 5-11.)
- [16] 周阳平, 甘晓亮, 刘雪雪, 等. 二阶多智能体系统在自适应间歇牵制控制下的部分分量一致性[J]. *控制与决策*, 2023, 38(10): 2996-3002.
(Zhou Y P, Gan X L, Liu X X, et al. Partial component consensus of second-order multi-agent systems via adaptive intermittent pinning control[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(10): 2996-3002.)
- [17] 于俊生, 马忠军, 李科赞. 事件触发控制下多智能体系统的部分分量一致性[J]. *广西师范大学学报: 自然科学版*, 2023, 41(4): 149-157.
(Yu J S, Ma Z J, Li K Z. Event-triggered control for partial component consensus of leader-following multi-agent systems[J]. *Journal of Guangxi Normal University: Natural Science Edition*, 2023, 41(4): 149-157.)
- [18] 华彩凤, 马忠军, 李科赞. 多智能体系统基于自适应控制下的二分-分量一致性[J]. *控制与决策*, 2024, 39(5): 1754-1760.
(Hua C F, Ma Z J, Li K Z. Adaptive pinning control for bipartite-partial component consensus of leader-following multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(5): 1754-1760.)
- [19] Feng J W, Wu Y K, Wang J Y, et al. Leader-following quasi-consensus of heterogeneous multiagent systems with switched cooperative-competitive interactions[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2023, 443: 133567.
- [20] Lu R X, Wu J, Zhan X S, et al. Finite-time bipartite consensus for second-order nonlinear multi-agent systems under random switching topologies[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(12): 4474-4478.
- [21] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 第2版. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001: 19-20, 321-322, 336-337.
(Liao X X. *Mathematical theory and application of stability*[M]. The 2nd edition. Wuhan: Central China Normal University Press, 2001: 19-20, 321-322, 336-337.)

作者简介

黄宇权 (1998-), 男, 硕士生, 主要研究方向为复杂网络上的群体动力学、多智能体系统一致性, E-mail: yuquanhuang152@163.com;

甘晓亮 (1987-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为多智能体系统一致性、微分方程定性理论, E-mail: ganxiaoliang21@163.com;

马忠军 (1973-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为复杂网络上的群体动力学、混沌同步和多智能体系统一致性, E-mail: mazhongjun@guet.edu.cn.