

控制与决策

Control and Decision

多集群博弈分布式事件触发在线学习算法及其应用

余芮, 王倩瑶, 杜凯新, 熊婧, 张先超

引用本文:

余芮, 王倩瑶, 杜凯新, 等. 多集群博弈分布式事件触发在线学习算法及其应用[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 257–266.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0298>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于观测器的网络化多智能体预测控制](#)

Observer-based networked multi-agent predictive control

控制与决策. 2021, 36(9): 2290–2296 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1801>

[基于零和博弈的多智能体网络鲁棒包容控制](#)

Robust containment control of multi-agent networks based on zero-sum game

控制与决策. 2021, 36(8): 1841–1848 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1348>

[基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制](#)

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks

控制与决策. 2021, 36(8): 1955–1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

[一种具有非线性动力学模型的智能电网快速分布式控制](#)

A fast distributed control of smart grids with nonlinear dynamic model

控制与决策. 2021, 36(8): 1849–1854 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1696>

[认知智能电网中基于能效优化的频谱分配策略](#)

Spectrum allocation strategy based on energy efficiency optimization in cognitive smart grid

控制与决策. 2021, 36(8): 1901–1910 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1448>

多集群博弈分布式事件触发在线学习算法及其应用

余芮^{1†}, 王倩瑶², 杜凯新³, 熊婧¹, 张先超¹

(1. 嘉兴大学 信息科学与工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 2. 同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804;
3. 同济大学 上海自主智能无人系统科学中心, 上海 200092)

摘要: 研究讨论一类具有协同竞争耦合特性的博弈问题, 结合动态环境特征, 构建考虑时变收益函数的多集群博弈模型. 基于时变通信网络拓扑结构, 提出一种离散时间分布式纳什均衡在线学习算法, 并通过引入事件触发机制实现通信资源优化: 1) 采用预设触发条件调控智能体信息交互; 2) 在降低通信频次的同时能够维持纳什均衡求解精度. 理论分析表明, 通过精巧地选择合适的时变步长 ($\alpha_t = \frac{1}{t^{2a_1}}, 0 < a_1 < \frac{1}{2}$) 和事件触发函数阈值 ($C_0\alpha_t, C_0 > 0$), 所设计算法能够有效克服时变环境下的传输误差和估计误差影响, 并严格证明其指数收敛特性. 能源互联网典型场景的仿真实验表明, 相较传统算法, 所提出方法在保证纳什均衡收敛精度的同时能有效降低通信次数, 验证了其工程有效性.

关键词: 分布式多集群博弈; 时变拓扑; 纳什均衡; 在线学习算法; 事件触发机制; 能源互联网系统

中图分类号: O225; TP13 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0298

引用格式: 余芮, 王倩瑶, 杜凯新, 等. 多集群博弈分布式事件触发在线学习算法及其应用 [J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 257-266.

Distributed event-triggered online learning algorithm for multi-cluster games and its application

YU Rui^{1†}, WANG Qian-yao², DU Kai-xin³, XIONG Jing¹, ZHANG Xian-chao¹

(1. School of Information Science and Engineering, Jiaying University, Jiaying 314001, China; 2. School of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 3. Shanghai Research Institute for Intelligent Autonomous Systems, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This study investigates a class of games with cooperative-competitive coupling characteristics. Incorporating dynamic environmental features, a multi-cluster game model with time-varying cost functions is constructed. Based on the time-varying communication network topology, a discrete-time distributed Nash equilibrium online learning algorithm is proposed, which optimizes communication resources through an event-triggered mechanism: 1) Preset event-triggered conditions are employed to regulate information interaction among agents; 2) The algorithm maintains Nash equilibrium solution accuracy while reducing communication frequency. Theoretical analysis demonstrates that by judiciously selecting time-varying step sizes ($\alpha_t = \frac{1}{t^{2a_1}}, 0 < a_1 < \frac{1}{2}$) and event-triggered function thresholds ($C_0\alpha_t, C_0 > 0$), the designed algorithm effectively mitigates transmission and estimation errors in time-varying environments, with its exponential convergence properties rigorously proven. Simulation experiments in a typical energy internet scenario show that compared to conventional algorithms, the proposed method effectively reduces communication frequency while ensuring Nash equilibrium convergence accuracy, validating its engineering efficacy.

Keywords: distributed multi-cluster games; time-varying topology; Nash equilibrium; online learning algorithm; event-triggered mechanism; energy internet system

0 引言

近年来, 非合作博弈理论因其在分布式决策中的重要作用而受到广泛研究, 并催生了多种高效的

分布式纳什均衡求解算法. 这些算法不仅在理论上不断取得突破, 同时也在智能电网、智能交通、无人系统协同控制等实际场景中得到深入研究和应用^[1-8].

收稿日期: 2025-03-24; 录用日期: 2025-07-31.

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2023YFC3305903).

责任编辑: 李少远.

[†]通信作者. E-mail: 2010464@tongji.edu.cn.

然而,在智能电网、医疗网络、能源网络、电力管理系统等复杂实际问题中,传统非合作博弈模型表现出明显的局限性.这类系统的显著特征在于,其智能体之间并非单纯的竞争关系,而是同时存在竞争与合作的双重交互特性.以分布式智能电网系统为例,其典型架构可抽象为一个双层模型:上层表现为多个微电网围绕中心发电厂的能源价格竞争模型,下层则体现为各微电网内部的能源协同分配模型.在此类复杂应用场景中,传统非合作博弈模型难以准确刻画系统特性,现有分布式纳什均衡求解算法也无法直接适用.

在实际问题研究需求的驱动下,一类多集群(或多联盟)博弈问题被提出,其结构及特点得到了系统性阐述^[9-11].在多集群博弈框架下,智能体作为决策主体被划分为不同集群,每个集群被视为虚拟的非合作博弈参与者.集群内部智能体通过协同合作优化局部代价函数,而集群之间则保持竞争关系.这种双层结构设计有效满足了多智能体系统中竞争与合作并存的复杂需求.文献[10]讨论了具有双积分器特性智能体之间多集群博弈的纳什均衡求解问题,并设计了反馈控制器引导物理过程达到广义纳什均衡;文献[11]针对多集群博弈中的纳什均衡求解问题,创新性地引入干扰图理论描述集群内部的交互关系,并基于此设计了高效的纳什均衡求解算法,显著降低了传统方法在通信开销和计算复杂度方面的成本.

现有关于多集群博弈分布式纳什均衡求解的研究大多基于静态环境假设,即智能体所处环境是时不变的^[12-15].这种理想化假设与实际情况存在显著差异.现实场景中,智能体往往处于动态环境中,需要考虑时变拓扑结构、时变收益函数或约束条件^[16-20].文献[16]在时变通信图下研究了动态环境中非合作博弈的分布式广义纳什均衡跟踪问题,其中成本函数和耦合约束函数是时变的;文献[19]针对智能体成本函数、聚合函数和约束都会随着时间的推移而变化的分布式聚合博弈问题,设计了一种具有恒定步长的分布式投影聚合跟踪算法,并应用于协作机器人系统中.这些实际需求推动了动态环境下多集群博弈问题分布式在线算法的研究.

现有的大多数分布式纳什均衡求解算法要求智能体连续地向邻居智能体传输信息.这种设定意味着智能体必须通过底层通信网络不断地观察并与其他智能体共享信息,这势必会消耗大量的网络通信资源及通信成本,且在现实网络环境中难以满足.近年来的研究表明^[21-26],事件触发机制在分布式纳什均

衡求解中展现出显著优势.该机制通过预设触发条件控制智能体间的信息交换,仅当满足特定条件时才进行通信,从而实现非连续通信下的分布式一致性收敛.文献[21]系统地分析了不同类型离散时间通信机制设定下分布式纳什均衡求解算法收敛性的实现;文献[22]在有向非平衡图下研究了带有事件触发通信机制的分布式离散时间纳什均衡求解问题,并应用于带约束电源管理系统.

基于上述研究现状和实际需求,本文致力于研究动态环境下多集群博弈分布式离散时间纳什均衡求解算法.同时,针对分布式系统网络结构动态变化和网络带宽受限的现实问题,本文基于时变网络拓扑,创新性地引入事件触发机制的在线学习算法.在众多实际应用场景中,引入时变网络拓扑和事件触发机制具有极为重要的价值.以微电网多集群博弈模型为例,引入动态拓扑结构的实际意义主要体现在能够实时适应物理网络的变化,例如设备的投切、线路故障以及天气突变导致的集群脱网等情况,确保博弈通信拓扑与电网物理连接始终保持同步,从而避免因网络失配而引发决策失效;而事件触发机制则是通过设定阈值控制通信与计算的激活时机,在降低系统通信开销的同时,还能维持响应的实时性.在实际系统中解决这两大问题的核心难点在于:一方面,动态拓扑需要在毫秒级的重构过程中维持博弈一致性,同时还要在重构速度与计算复杂度之间寻求平衡;另一方面,事件触发机制面临阈值敏感性与系统稳定性之间的矛盾,同时在异步博弈环境下还需保证纳什均衡的收敛性.

本文的主要贡献可概括为以下4个方面:首先,突破现有研究对静态环境的限制,将时变特性引入多集群博弈问题研究;其次,基于时变网络拓扑结构,提出一种分布式在线纳什均衡学习算法;除此之外,为应对网络带宽受限问题,在算法设计中创新性地引入事件触发机制,并通过严格的理论推导克服非连续通信对算法收敛性分析的挑战,从而证明算法的收敛性和有效性;最后,采用能源互联网系统作为典型应用场景进行仿真实验,并充分说明算法的有效性和实用性.

1 问题描述

用 $\Gamma([H], \Omega, F_t)$ 表示由 N 个智能体组成的 H 个集群间所进行的在线多集群博弈.其中: Ω 表示所有智能体的联合动作集; $F_t := (F_{1,t}, F_{2,t}, \dots, F_{H,t})$ 表示时刻 t 全局的收益函数集合, $F_{h,t}$ 表示集群 h 在时刻 t 的收益函数, $\forall h \in [H]$.每个集群 $h \in [H]$ 包含

N_h 个智能体, $N := \sum_{h=1}^H N_h$.

注意到, 每个集群都被视为参与非合作博弈的虚拟玩家, 但实际决策是由集群内的智能体做出的. 详细的相关概念表述如下: 集群 $h \in [H]$ 中智能体 i 的策略变量记为 $z_{hi,t} \in \mathbb{R}^{q_h}$. 集群 h 的策略集合记为 $z_{h,t} := \text{col}(z_{h1,t}, z_{h2,t}, \dots, z_{hN_h,t}) \in \mathbb{R}^{N_h q_h}$. 全局策略集合表示为 $z_t := \text{col}(z_{1,t}, \dots, z_{HN_H,t}) \in \mathbb{R}^q$, $q := \sum_{h=1}^H N_h q_h$. 在集群 h 内部, 除智能体 i 外, 所有其他智能体的策略集合定义为 $z_{-hi,t} := \text{col}(z_{11,t}, \dots, z_{h(i-1),t}, z_{h(i+1),t}, \dots, z_{HN_H,t}) \in \mathbb{R}^{q - q_h}$. 除集群 h 外, 全局的联合策略定义为 $z_{-h,t} := \text{col}(z_{1,t}, \dots, z_{h-1,t}, z_{h+1,t}, \dots, z_{H,t}) \in \mathbb{R}^{q - N_h q_h}$. 针对同一集群 h 内部, 所有智能体以协同最小化集群 h 的收益函数为目标. 动作集 $\Omega := \Omega^1 \times \dots \times \Omega^H$. 其中: $\Omega^h := \Omega_1^h \times \dots \times \Omega_{N_h}^h$, $\Omega_i^h \subseteq \mathbb{R}^{q_h}$ 为集群 $h \in [H]$ 中智能体 i 的私有动作集. 在集群 $h \in [H]$ 中, 智能体 i 的收益函数记为 $f_{hi,t}(z_t)$, 它是一个私有成本函数. 假设每个智能体的收益函数都是时变凸函数. 集群 h 的收益函数记为 $F_{h,t}(z_t) := (1/N_h) \sum_{i=1}^{N_h} f_{hi,t}(z_t)$, 全局收益函数集合为 $F_t := (F_{1,t}, F_{2,t}, \dots, F_{H,t})$. 集群 $h \in [H]$ 旨在选择一个使自身收益函数 $F_{h,t}$ 最小的可行策略 $z_{h,t}$. 对于时变多集群博弈 $\Gamma([H], \Omega, F_t)$, 其在每个 t 时刻的纳什均衡定义为如下形式.

定义 1^[27] 考虑时变多集群博弈 $\Gamma([H], \Omega, F_t)$, 若对于所有 $h \in [H]$, 有 $F_{h,t}(z_{h,t}^*, z_{-h,t}^*) \leq F_{h,t}(z_{h,t}, z_{-h,t}^*)$ 成立, 其中 $z_{h,t} \in \Omega^h$, 则在 t 时刻, 策略集合 $z_t^* = \text{col}(z_{1,t}^*, z_{2,t}^*, \dots, z_{H,t}^*)$ 被称为纳什均衡.

假设 1^[28-30] 每个私有动作集 Ω_i^h 对于 $\forall i \in [N_h]$, $h \in [H]$ 是非空的、紧凑的并且凸的.

假设 2 对于任意 $i, j \in [N_h]$, $h \in [H]$, 所有局部收益函数 $f_{hi,t}(z_t)$ 都是凸的且连续可微的, 梯度函数 $\nabla_{(hj)} f_{hi,t}(z_t) := \partial f_{hi,t}(z_{hj,t}, z_{-hj,t}) / \partial z_{hj,t} \in \mathbb{R}^{q_h}$ 是 L_i^h -利普希茨连续的.

定义 $L = \max_{h \in [H], i \in [N_h]} L_i^h$. 在假设 1 和假设 2 下, 存在正常数 P 和 K , 使得

$$z_{hi,t} \leq P, f_{hi,t}(z_t) \leq P, \nabla_{(hj)} f_{hi,t}(z_t) \leq K. \quad (1)$$

定义该多集群博弈 $\Gamma([H], \Omega, F_t)$ 伪梯度映射

$$M_t(z_t) := \text{col}(\nabla_1 F_{1,t}(z_t), \nabla_2 F_{2,t}(z_t), \dots, \nabla_H F_{H,t}(z_t)).$$

其中 $\nabla_h F_{h,t}(z_t) := (1/N_h) \sum_{i=1}^{N_h} \nabla_h f_{hi,t}(z_t)$ 包含

$$\nabla_h f_{hi,t}(z_t) := \text{col}(\nabla_{(h1)} f_{hi,t}(z_t), \nabla_{(h2)} f_{hi,t}(z_t), \dots, \nabla_{(hN_h)} f_{hi,t}(z_t)).$$

假设 3 映射 $M_t(z_t)$ 在集合 Ω 上关于常数 $\mu > 0$ 是强单调的.

本文的目标是设计一种分布式在线算法学习时变纳什均衡. 参考文献 [28-29] 中关于遗憾函数的定义, 这里采用动态遗憾, 定义如下: 对于每个集群 $h \in [H]$, 有

$$\text{Reg}_h(T) = \sum_{t=1}^T (F_{h,t}(z_{h,t}, z_{-h,t}^*) - F_{h,t}(z_{h,t}^*, z_{-h,t}^*)), \quad (2)$$

其中 T 为学习时间.

在文献 [28-29] 研究内容的启发下, 考虑避免问题剧烈波动, 需要假设以下累积量:

路径累积为

$$\Phi_T^* := \sum_{t=1}^T \|z_{t+1}^* - z_t^*\|; \quad (3)$$

梯度路径累积为

$$\Psi_T^* := \sum_{t=1}^T \|\nabla_h \mathcal{F}_{h,t+1}(z_t) - \nabla_h \mathcal{F}_{h,t}(z_t)\|_\infty. \quad (4)$$

对于上述多集群博弈问题, 采用两层通信框架和两种不同的时变通信图连接所有智能体. 第 1 层通信结构是同一集群中的智能体之间的集群内通信, 同一集群中的所有智能体基于通信图 \mathcal{G}_t^h , $h \in [H]$ 交互信息, 旨在协作最小化集群的收益函数. 第 2 层通信结构是所有智能体之间通过通信图 \mathcal{G}_t 进行全局通信. 注意到, 每个集群都被视为参与非合作博弈的虚拟玩家, 而实际决策是由每个集群中的智能体做出的.

假设 4^[31] (集群内通信图性质) 1) 对于任意时间 t 和任意集群 $h \in [H]$, 连接集群 h 中所有智能体的时变有向图 \mathcal{G}_t^h 是强连通的, 其加权邻接矩阵记为 \mathbf{C}_t^h ; 2) 对于任意时间 t 和任意集群 $h \in [H]$, \mathbf{C}_t^h 的对角线元素都是正的; 3) 对于任意时间 t 和任意集群 $h \in [H]$, \mathbf{C}_t^h 的非对角元素是非负的 (即所有元素 $[\mathbf{C}_t^h]_{ij} \geq 0$ 对于所有 i, j 成立), 当连通图 \mathcal{G}_t^h 中存在智能体 i 指向智能体 j 的边时, $[\mathbf{C}_t^h]_{ij} > 0$, 否则 $[\mathbf{C}_t^h]_{ij} = 0$; 4) 对于任意时间 t 和任意集群 $h \in [H]$, \mathbf{C}_t^h 具有双随机性质, 即 $\mathbf{1}_{N_h}^T \mathbf{C}_t^h = \mathbf{1}_{N_h}^T$ 和 $\mathbf{C}_t^h \mathbf{1}_{N_h} = \mathbf{1}_{N_h}$, 其中 N_h 是集群 h 的智能体数量.

假设 5 (集群间通信图性质) 1) 对于任意时间 t , 连接所有智能体 (跨集群) 的时变有向图 \mathcal{G}_t 是强连通的, 其加权邻接矩阵记为 \mathbf{R}_t ; 2) 对于任意时间 t , \mathbf{R}_t 的对角线元素都是正的; 3) 对于任意时间 t , \mathbf{R}_t 是

非负的 (即所有元素 $[\mathbf{R}_t]_{ij} \geq 0$ 对于所有 i, j 成立), 当连通图 \mathcal{G}_t 中存在智能体 i 指向智能体 j 的边时, $[\mathbf{R}_t]_{ij} > 0$, 否则 $[\mathbf{R}_t]_{ij} = 0$; 4) 对于任意时间 t , \mathbf{R}_t 具有双随机性质, 即 $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{R}_t = \mathbf{1}_N^\top$ 和 $\mathbf{R}_t \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$, 其中 N 是所有集群智能体数量之和.

假设 4 和假设 5 针对多集群博弈的双层通信架构: 集群内协同合作, 集群间非合作博弈, 适用于智能电网等分层决策场景. 时变有向拓扑模拟动态通信 (如移动节点链路切换), 其强连通性确保信息可达, 双随机矩阵保证权重平衡. 该架构的强耦合性同时增加了收敛分析难度: 1) 智能体需协调集群间博弈和集群内信息交换; 2) 传统单层一致性理论失效; 3) 需分层证明框架处理一致性与纳什均衡的耦合关系.

引理 1 在假设 4 和假设 5 下, 参考文献 [28] 中的内容, 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_h}$, 可以得到

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{R}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top}{N} \mathbf{x} \right\| &\leq \sigma_R \left\| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top}{N} \mathbf{x} \right\|, \\ \left\| \mathbf{C}^h \mathbf{y} - \frac{\mathbf{1}_{N_h} \mathbf{1}_{N_h}^\top}{N_h} \mathbf{y} \right\| &\leq \sigma_C \left\| \mathbf{y} - \frac{\mathbf{1}_{N_h} \mathbf{1}_{N_h}^\top}{N_h} \mathbf{y} \right\|. \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} 0 < \sigma_R &:= \left\| \mathbf{R} - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top}{N} \right\| < 1, \\ 0 < \sigma_C &:= \max_{h \in [H]} \left\| \mathbf{C}^h - \frac{\mathbf{1}_{N_h} \mathbf{1}_{N_h}^\top}{N_h} \right\| < 1. \end{aligned}$$

定义 \mathbf{R} 的子矩阵 $\mathbf{R}^{(-hi)} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$, 是从矩阵 \mathbf{R} 中删除集群 h 的节点 i 后得到的 \mathbf{R} 的子矩阵. 利用 Gershgorin 圆定理 [28] 可以证明对于每一个 $i \in [N_h], h \in [H]$, 有 $-1 < \lambda(\mathbf{R}^{(-hi)}) < 1$. 定义 $\eta_R := \max_{i \in [N_h], h \in [H]} |\lambda(\mathbf{R}^{(-hi)})| \in (0, 1)$.

2 算法设计

在部分决策信息设置中, 所有智能体只能与其邻居进行通信, 不能直接获得全局策略集合. 对于每个 $i \in [N_h], h \in [H]$, 智能体 i 对集群 $\tilde{h} \in [H]$ 中智能体 j 策略的估计表示为 $\mathbf{z}_{(\tilde{h}j)hi} \in \mathbb{R}^{q_{\tilde{h}}}$. 智能体 i 对集群 h 策略的估计表示为 $\mathbf{z}_{(h)hi} \in \mathbb{R}^{N_h q_h}$. 智能体 i 对其他集群策略的估计表示为 $\mathbf{z}_{(-h)hi} \in \mathbb{R}^{q - N_h q_h}$. 智能体 i 对其他智能体策略的估计表示为 $\mathbf{z}_{(-hi)hi} \in \mathbb{R}^{q - q_h}$. 智能体 i 对所有智能体策略的估计表示为 $\mathbf{z}_{hi} := \text{col}(\mathbf{z}_{(1)hi}, \mathbf{z}_{(2)hi}, \dots, \mathbf{z}_{(H)hi}) \in \mathbb{R}^q$. 整个集群 h 在 t 时刻的估计向量为 $\mathbf{z}_{h,t} := \text{col}(\mathbf{z}_{h1,t}, \mathbf{z}_{h2,t}, \dots, \mathbf{z}_{hN_h,t}) \in \mathbb{R}^{N_h q}$. 所有智能体在时刻 t 的估计向量表示为 $\mathbf{z}_t := \text{col}(\mathbf{z}_{11,t}, \dots, \mathbf{z}_{HN_H,t}) \in \mathbb{R}^{N^q}$.

为了缓解网络压力、降低网络传输量, 在算法中引入事件触发机制. 对于任意智能体 $i \in [N_h], j \in$

$[N_{\tilde{h}}], j \neq i$, 定义 $\hat{\mathbf{z}}_{(hi)\tilde{h}j,t}$ 为 t 时刻智能体 j 对智能体 i 估计值的传输变量, $\hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t} = \mathbf{z}_{(hi)\tilde{h}j,t} - \hat{\mathbf{z}}_{(hi)\tilde{h}j,t}$ 为实际估计变量与传输变量之间的误差量. 本文设计的事件触发函数如下:

$$f(\hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t}) = \|\hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t}\| - C_0 \alpha_t, \quad (6)$$

其中 $C_0 > 0$ 且 α_t 为算法设计的时变步长. 当 $f(\hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t}) > 0$ 时, 传输当前数据; 否则不传输当前数据. 所设计的事件触发函数中的阈值与时间相关, 可灵活适应博弈环境的动态变化, 避免频繁触发带来的资源浪费. 同时, 时间相关阈值的简单性和低计算复杂度使其易于实现和调试, 降低了对节点运算能力的要求, 提高了系统的实时性和响应速度.

需要特别强调的是, 在引入事件触发机制时必须排除 Zeno 行为. Zeno 行为是指系统在有限时间区间内发生无限次事件触发的现象, 表现为触发条件被连续不断地满足. 本文设计的分布式离散时间算法通过设置最小事件触发时间间隔 (该间隔不小于系统固有的离散时间步长), 从根本上避免了 Zeno 行为的产生.

受文献 [28-30] 中梯度跟踪技术的启发, 对于任意 $i, j \in [N_h], h \in [H]$, 在 t 时刻将智能体 i 用于估计集群 h 的梯度 $\nabla_h F_{h,t}(z_t)$ 的局部梯度跟踪变量进一步引入到算法中, 具体表示为 $\mathbf{y}_{(hi)hi,t} := \text{col}(\mathbf{y}_{(h1)hi,t}, \mathbf{y}_{(h2)hi,t}, \dots, \mathbf{y}_{(hN_h)hi,t}) \in \mathbb{R}^{N_h q_h}$, $\mathbf{y}_{(hj)hi,t}$ 为智能体 i 对 $\nabla_{(hj)} F_{h,t}(z_t) := (1/N_h) \sum_{i=1}^{N_h} \nabla_{(hj)} f_{hi,t}(z_t) \in \mathbb{R}^{q_h}$ 的局部跟踪估计, $\mathbf{y}_{(hi)hi,t} := \mathbf{y}_{hi,t}$. 这里初始化所有局部跟踪变量 $\mathbf{y}_{(hk)hi,1} = \nabla_{(hk)} f_{hi,1}(z_{hi,1})$.

对于集群 $h \in [H]$ 中的任意智能体 $i \in [N_h]$, 初始化 $\mathbf{z}_{(-h)hi,1} = \mathbf{0}_{q - q_h}$, 任意选取 $z_{hi,1} \in \Omega_i^h$, $\mathbf{y}_{(hj)hi,1} = \nabla_{(hj)} f_{hi,1}(z_{hi,1}) \in \mathbb{R}^{q_h}, \forall j \in [N_h]$. 当 $t \geq 1$ 时, 集群 $h \in [H]$ 中的每个智能体 $i \in [N_h]$ 执行如下更新:

$$\mathbf{z}_{(-h)hi,t+1} = \sum_{j \in [N_{\tilde{h}}], \tilde{h} \in [H]} \mathbf{R}_{ij,t}^{h\tilde{h}} \hat{\mathbf{z}}_{(-h)\tilde{h}j,t}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{(hk)hi,t+1} &= \sum_{j \in [N_{\tilde{h}}], \tilde{h} \in [H]} \mathbf{R}_{ij,t}^{h\tilde{h}} \hat{\mathbf{z}}_{(hk)\tilde{h}j,t} - \alpha_t \mathbf{y}_{(hk)hi,t}, \\ k &\in [N_h], k \neq i; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_{hi,t+1} = \text{proj}_{\Omega_i^h} [z_{hi,t} - \alpha_t \mathbf{y}_{hi,t}]; \quad (9)$$

$$z_{hi,t+1} = (1 - \alpha_t) z_{hi,t} + \alpha_t \tilde{\mathbf{z}}_{hi,t+1}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{(hk)hi,t+1} &= \sum_{j=1}^{N_h} C_{ij,t}^h \mathbf{y}_{(hk)hj,t} - \nabla_{(hk)} f_{hi,t}(z_{hi,t}) + \\ &\quad \nabla_{(hk)} f_{hi,t+1}(z_{hi,t+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

其中: C_{ij}^h 为矩阵 \mathbf{C}^h 中 (i, j) 位置的元素; 对于任意

$h \in [H]$, $R_{ij}^{h\tilde{h}}$ 为矩阵 $\mathbf{R}^{h\tilde{h}}$ 中 (i, j) 位置的元素; 时变步长 α_t 满足 $0 < \alpha_t < 1$ 和 $\alpha_0 = 1$.

在上述引入事件触发机制的时变多集群博弈在线学习算法中, 在线学习模块与事件触发机制通过深度耦合实现协同优化: 在线学习模块动态调整博弈策略, 应对时变环境和全局策略的不确定性, 而事件触发机制通过预设条件智能调控学习频率, 仅在特定时间序列激活策略更新, 从而避免冗余计算并降低通信开销. 这种协同机制在保证博弈均衡收敛性的同时, 显著提升了多集群博弈系统的计算效率和动态响应能力.

3 主要结果

引理 2^[29] 当假设 1 ~ 假设 5 成立时, 参考文献 [28-30] 中的引理可知, 对于集群 $h \in [H]$ 和 $t \in [T]$ 中的任何智能体 $i, k \in [N_h]$, 都存在 $\sum_{i=1}^{N_h} \mathbf{y}^{(hk)hi,t} = \sum_{i=1}^{N_h} \nabla_{(hk)} f_{hi,t}(\mathbf{x}_{hi,t})$.

对于任意智能体 $i \in [N_h], k \in [N_{\tilde{h}}], k \neq i$, 以及任意集群 $h, \tilde{h} \in [H]$, 定义 $e_{hi,t} := \text{col}(e_{(hi)11,t}, \dots, e_{(hi)h(i-1),t}, e_{(hi)h(i+1),t}, \dots, e_{(hi)HN_H,t}) \in \mathbb{R}^{(N-1)q_h}$, 且有 $e_{(hi)\tilde{h}k,t} = \mathbf{z}_{(hi)\tilde{h}k,t} - z_{hi,t}$.

引理 3 当假设 1 ~ 假设 5 成立时, 对于任意 $i \in [N_h], h \in [H]$ 以及 $t \in [T]$, 可以得出 $\|e_{hi,t}\| \leq (NP + \frac{3N_h K}{1-\sigma_C}) \sum_{s=0}^{t-1} (\eta_R)^s \alpha_{t-s-1} + \sum_{s=1}^{t-1} (\eta_R)^s \|\hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t-s}\|$.

证明 结合算法中迭代规则 (7)、(8) 和 (10), $z_{hi,t}$ 的估计误差可以分析如下: 对于任意智能体 $i \in [N_h], k \in [N_{\tilde{h}}], k \neq i$, 以及任意集群 $h, \tilde{h} \in [H]$, 有

$$\begin{aligned} & z_{(hi)\tilde{h}k,t+1} - z_{hi,t+1} = \\ & \sum_{j \in [N_{\tilde{h}}], \tilde{h} \in [H]} \mathbf{R}_{kj}^{\tilde{h}\tilde{h}} \hat{\mathbf{z}}_{(hi)\tilde{h}j,t} - \alpha_t \mathbf{y}_{(hi)\tilde{h}k,t} - z_{hi,t+1} = \\ & \sum_{j \in [N_{\tilde{h}}], \tilde{h} \in [H], j \neq i} \mathbf{R}_{kj}^{\tilde{h}\tilde{h}} (\hat{\mathbf{z}}_{(hi)\tilde{h}j,t} - z_{hi,t}) - \alpha_t \mathbf{y}_{(hi)\tilde{h}k,t} - \\ & (z_{hi,t+1} - z_{hi,t}) = \\ & \sum_{j \in [N_{\tilde{h}}], \tilde{h} \in [H], j \neq i} \mathbf{R}_{kj}^{\tilde{h}\tilde{h}} (\hat{\mathbf{z}}_{(hi)\tilde{h}j,t} - z_{hi,t}) - \alpha_t \mathbf{y}_{(hi)\tilde{h}k,t} - \\ & \alpha_t (\tilde{z}_{hi,t+1} - z_{hi,t}) = \\ & \sum_{j \in [N_{\tilde{h}}], \tilde{h} \in [H], j \neq i} \mathbf{R}_{kj}^{\tilde{h}\tilde{h}} (z_{(hi)\tilde{h}j,t} - z_{hi,t} + \hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t}) - \\ & \alpha_t \mathbf{y}_{(hi)\tilde{h}k,t} - \alpha_t (\tilde{z}_{hi,t+1} - z_{hi,t}), \end{aligned} \quad (12)$$

其中当 $\tilde{h} \neq h$ 时 $\mathbf{y}_{(hi)\tilde{h}k,t} = \mathbf{0}_{q_h}$.

定义 $\mathbf{Y}_{hi,t} = \left(\mathbf{0}_{\sum_{h=1}^{h-1} N_{\tilde{h}} q_h}, \mathbf{y}_{(hi)h1,t}, \dots, \mathbf{y}_{(hi)h(i-1),t}, \right.$

$$\left. \mathbf{y}_{(hi)h(i+1),t}, \dots, \mathbf{y}_{(hi)hN_h,t}, \mathbf{0}_{\sum_{\tilde{h}=h+1}^H N_{\tilde{h}} q_h} \right).$$

对于所有 $k \in [N], k \neq i$, 通过有界条件 (1) 可以得出

$$\begin{aligned} \|e_{hi,t+1}\| & \leq \|(\mathbf{R}^{(-hi)} \otimes \mathbf{I}_{q_h}) e_{hi,t}\| + \alpha_t \|\mathbf{Y}_{hi,t}\| + \\ & 2P\alpha_t + \|(\mathbf{R}^{(-hi)} \otimes \mathbf{I}_{q_h}) \hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t}\| \leq \\ & \eta_R \|e_{hi,t}\| + \alpha_t \|\mathbf{Y}_{hi,t}\| + 2P\alpha_t + \\ & \eta_R \|\hat{e}_{(hi)\tilde{h}j,t}\|. \end{aligned} \quad (13)$$

参考文献 [28] 的附录 A 中的推导过程, 可得

$$\|\mathbf{Y}_{hi,t}\| \leq \frac{3N_h K}{1-\sigma_C}. \quad (14)$$

至此引理 2 得证. \square

引理 4^[28] 当假设 1 ~ 假设 5 成立时, 对于集群 $h \in [H]$ 且 $t \in [T]$ 中的任意智能体 i , 可以得出

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_{hi,t} - \nabla_{(hi)} F_{h,t}(z_t)\| & \leq \\ & \sqrt{N} N_h L \left(\sum_{s=0}^{t-2} (\sigma_C)^s \|e_{hi,t-s}\| + \right. \\ & \left. \sum_{s=0}^{t-2} (\sigma_C)^s \|e_{hi,t-s-1}\| \right) + \\ & \sum_{s=0}^{t-2} (\sigma_C)^s \|\nabla_h \mathcal{F}_{h,t-s}(x_{t-s-1}) - \\ & \nabla_h \mathcal{F}_{h,t-s-1}(x_{t-s-1})\| + \\ & 2\sqrt{N} N_h (PL + K) \sum_{s=0}^{t-1} (\sigma_C)^s \alpha_{t-s-1} + \\ & \sqrt{N} L \|e_{hi,t}\|, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\nabla_{(hi)} F_{h,t}(z_t) := (1/N_h) \sum_{j=1}^{N_h} \nabla_{(hi)} f_{hj,t}(z_t)$.

引理 5 当假设 1 ~ 假设 5 成立时, 对于任意 $i \in [N], h \in [H]$ 以及 $2 \leq t \leq T$, 由算法生成的决策变量满足

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{t=2}^T \|x_t - x_t^*\|^2 \leq \\ & \frac{2NP^2}{\alpha_{T+1}^2} + \frac{2\sqrt{N}P}{\alpha_T^2} \Phi_T^* + \frac{2NP}{1-\sigma_C} \Psi_T^* + \\ & (B_1 + B_3 + B_4) \sum_{t=2}^T \sqrt{\alpha_{t-1}} + B_4. \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $B_1 = \frac{2P\sqrt{N}N_hNL}{1-\sigma_C} \left((NP + \frac{3N_h K}{1-\sigma_C}) \frac{2}{(1-\eta_R)} + \frac{2C_0}{(1-\eta_R)} \right)$, $B_3 = \frac{N}{2} K^2 \left(9 + \frac{18N_h}{1-\sigma_C} + \frac{9N_h^2}{(1-\sigma_C)^2} \right)$, $B_4 = 2B_1 + B_2$, $B_2 = \frac{8P\sqrt{N}N_hN(PL+K)}{1-\sigma_C}$.

证明 根据算法和有界条件 (1), 对于任意智能体 $i \in [N_h], h \in [H]$, 以及任何时刻的 $z_{hi,t} \in \Omega_i^h$, 可以得到

$$\begin{aligned} & \|z_{hi,t+1} - z_{hi,t+1}^*\|^2 = \\ & \|z_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*\|^2 + \langle z_{hi,t+1}^* + z_{hi,t}^* - 2z_{hi,t+1}, \\ & z_{hi,t+1}^* - z_{hi,t}^* \rangle \leq \\ & \|z_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*\|^2 + 4P\|z_{hi,t+1}^* - z_{hi,t}^*\|. \end{aligned} \quad (17)$$

基于 Jensen 不等式可知, 对于任何 $0 \leq \alpha_t \leq 1$ 和 $u, v \in \mathbb{R}^{q_h}$, 有 $\|(1 - \alpha_t)u + \alpha_tv\|^2 \leq (1 - \alpha_t)\|u\|^2 + \alpha_t\|v\|^2$. 关于式 (17) 右侧的第 1 项, 根据算法迭代规则可得

$$\begin{aligned} & \|z_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*\|^2 = \\ & \|(1 - \alpha_t)z_{hi,t} + \alpha_t\tilde{z}_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*\|^2 = \\ & \|(1 - \alpha_t)(z_{hi,t} - z_{hi,t}^*) + \alpha_t(\tilde{z}_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*)\|^2 \leq \\ & (1 - \alpha_t)\|z_{hi,t} - z_{hi,t}^*\|^2 + \alpha_t\|\tilde{z}_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

利用投影算子的非扩张性可知 $\|\text{proj}_{\Omega_i^h}[u] - \text{proj}_{\Omega_i^h}[v]\| \leq \|u - v\|$. 因此, 由式 (18) 右侧的第 2 项可以推出

$$\begin{aligned} & \alpha_t\|\tilde{z}_{hi,t+1} - z_{hi,t}^*\|^2 = \\ & \alpha_t\|\text{proj}_{\Omega_i^h}[z_{hi,t} - \alpha_t\mathbf{y}_{hi,t}] - \text{proj}_{\Omega_i^h}[z_{hi,t}^* - \\ & \alpha_t\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*)]\|^2 \leq \\ & \alpha_t\|z_{hi,t} - z_{hi,t}^* + \alpha_t(\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \mathbf{y}_{hi,t})\|^2 \leq \\ & \alpha_t\|z_{hi,t} - z_{hi,t}^*\|^2 + 2\alpha_t^2\langle z_{hi,t} - z_{hi,t}^*, \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \\ & \mathbf{y}_{hi,t} \rangle + \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \mathbf{y}_{hi,t}\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

对于式 (19) 右侧的第 2 项, 通过假设 2、假设 3、引理 4 和有界条件 (1) 可以得到

$$\begin{aligned} & 2\alpha_t^2\langle z_{hi,t} - z_{hi,t}^*, \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \mathbf{y}_{hi,t} \rangle = \\ & 2\alpha_t^2\langle z_{hi,t} - z_{hi,t}^*, \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \\ & \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) + \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t} \rangle = \\ & 2\alpha_t^2\langle z_{hi,t} - z_{hi,t}^*, \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) \rangle + \\ & 2\alpha_t^2\langle z_{hi,t} - z_{hi,t}^*, \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t} \rangle \leq \\ & -2\mu\alpha_t^2\|z_{hi,t} - z_{hi,t}^*\|^2 + 2\alpha_t^2\langle z_{hi,t} - z_{hi,t}^*, \\ & \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t} \rangle \leq \\ & -2\mu\alpha_t^2\|z_{hi,t} - z_{hi,t}^*\|^2 + 4P\alpha_t^2\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t}\| \leq \\ & -2\mu\alpha_t^2\|z_{hi,t} - z_{hi,t}^*\|^2 + \\ & 4P\sqrt{N}N_hL\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|e_{hi,t-s}\| + \\ & 4P\sqrt{N}N_hL\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|e_{hi,t-s-1}\| + \\ & 8P\sqrt{N}N_h(PL + K)\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-1}(\sigma_C)^s\alpha_{t-s-1} + \\ & 4P\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|\nabla_h\mathcal{F}_{h,t-s}(z_{t-s-1}) - \\ & \nabla_h\mathcal{F}_{h,t-s-1}(z_{t-s-1})\| + 4P\sqrt{N}L\alpha_t^2\|e_{hi,t}\|. \end{aligned} \quad (20)$$

对于式 (19) 右侧的第 3 项, 根据有界条件 (1) 和不等式 (14), 有

$$\begin{aligned} & \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \mathbf{y}_{hi,t}\|^2 = \\ & \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) + \\ & \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t}\|^2 = \\ & \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t)\|^2 + \\ & 2\alpha_t^3\langle \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t^*) - \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t), \nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \\ & \mathbf{y}_{hi,t} \rangle + \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t}\|^2 \leq \\ & 4K^2\alpha_t^3 + 4K\alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t}\| + \\ & \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t) - \mathbf{y}_{hi,t}\|^2 \leq \\ & 4K^2\alpha_t^3 + 4K\alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t)\| + 4K\alpha_t^3\|\mathbf{y}_{hi,t}\| + \\ & \alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t)\|^2 + 2\alpha_t^3\|\nabla_{(hi)}F_{h,t}(z_t)\|\|\mathbf{y}_{hi,t}\| + \\ & \alpha_t^3\|\mathbf{y}_{hi,t}\|^2 \leq \\ & \left(9NK^2 + \frac{18K^2NN_h}{1 - \sigma_C} + \frac{9NN_h^2K^2}{(1 - \sigma_C)^2}\right)\alpha_t^3. \end{aligned} \quad (21)$$

引入不等式 (18) ~ (21) 到 (17), 并求和, $i \in [N_h]$, $h \in [H]$, 式 (18) 可以重写为

$$\begin{aligned} & \|z_{t+1} - z_{t+1}^*\|^2 \leq \\ & (1 - 2\mu\alpha_t^2)\|z_t - z_t^*\|^2 + 4\sqrt{N}P\|z_{t+1}^* - z_t^*\| + \\ & 4P\sqrt{N}N_hNL\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|e_{hi,t-s}\| + \\ & 4P\sqrt{N}N_hNL\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|e_{hi,t-s-1}\| + \\ & 8P\sqrt{N}N_hN(PL + K)\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-1}(\sigma_C)^s\alpha_{t-s-1} + \\ & 4NP\alpha_t^2\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|\nabla_h\mathcal{F}_{h,t-s}(z_{t-s-1}) - \\ & \nabla_h\mathcal{F}_{h,t-s-1}(z_{t-s-1})\| + 4PN\sqrt{N}L\alpha_t^2\|e_{hi,t}\| + \\ & \left(9NK^2 + \frac{18K^2NN_h}{1 - \sigma_C} + \frac{9NN_h^2K^2}{(1 - \sigma_C)^2}\right)\alpha_t^3. \end{aligned} \quad (22)$$

由于路径长度 (3) 可知, 从 $t = 2$ 到 $t = t$ 的总和为

$$\begin{aligned} & 2\mu\sum_{t=2}^T\|z_t - z_t^*\|^2 \leq \\ & \sum_{t=2}^T\frac{1}{\alpha_t^2}[\|z_t - z_t^*\|^2 - \\ & \|z_{t+1} - z_{t+1}^*\|^2] + \frac{4\sqrt{N}P}{\alpha_T^2}\Phi_T^* + \\ & 4P\sqrt{N}N_hNL\sum_{t=2}^T\sum_{s=0}^{t-2}(\sigma_C)^s\|e_{hi,t-s}\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4P\sqrt{N}N_hNL \sum_{t=2}^T \sum_{s=0}^{t-2} (\sigma_C)^s \|e_{hi,t-s-1}\| + \\
 & 8P\sqrt{N}N_hN(PL+K) \sum_{t=2}^T \sum_{s=0}^{t-1} (\sigma_C)^s \alpha_{t-s-1} + \\
 & 4NP \sum_{t=2}^T \sum_{s=0}^{t-2} (\sigma_C)^s \|\nabla_h \mathcal{F}_{h,t-s}(z_{t-s-1}) - \\
 & \nabla_h \mathcal{F}_{h,t-s-1}(z_{t-s-1})\| + \\
 & 4PN\sqrt{N}L \sum_{t=2}^T \|e_{hi,t}\| + \\
 & \left(9 + \frac{18N_h}{1-\sigma_C} + \frac{9N_h^2}{(1-\sigma_C)^2}\right) NK^2 \sum_{t=2}^T \alpha_t. \quad (23)
 \end{aligned}$$

接下来, 不等式 (23) 右侧未处理项将被分析和解决. 通过分裂和缩放方法, 可以得出

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=2}^T \frac{1}{\alpha_t^2} [\|z_t - z_t^*\|^2 - \|z_{t+1} - z_{t+1}^*\|^2] = \\
 & \sum_{t=2}^T \left[\frac{1}{\alpha_t^2} \|z_t - z_t^*\|^2 - \frac{1}{\alpha_{t+1}^2} \|z_{t+1} - z_{t+1}^*\|^2 \right] + \\
 & \sum_{t=2}^T \left[\frac{1}{\alpha_{t+1}^2} \|z_{t+1} - z_{t+1}^*\|^2 - \frac{1}{\alpha_t^2} \|z_{t+1} - z_{t+1}^*\|^2 \right] \leq \\
 & \frac{1}{\alpha_2^2} \|z_2 - z_2^*\|^2 + \\
 & 4P^2 \sum_{t=2}^T \left(\frac{1}{\alpha_{t+1}^2} - \frac{1}{\alpha_t^2} \right) \leq \frac{4NP^2}{\alpha_{T+1}^2}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

参考文献 [28-30] 中推导思路, 采用双求和项方法可以得出

$$\begin{aligned}
 & \mu \sum_{t=2}^T \|z_t - z_t^*\|^2 \leq \\
 & \frac{2NP^2}{\alpha_{T+1}^2} + \frac{2\sqrt{N}P}{\alpha_T^2} \Phi_T^* + \\
 & \frac{2P\sqrt{N}N_hNL}{1-\sigma_C} \sum_{t=2}^T \|e_{hi,t}\| + \\
 & \frac{2P\sqrt{N}N_hNL}{1-\sigma_C} \sum_{t=2}^T \|e_{hi,t-1}\| + \\
 & \frac{8P\sqrt{N}N_hN(PL+K)}{1-\sigma_C} \sum_{t=2}^T \alpha_{t-2} + \\
 & \frac{2NP}{1-\sigma_C} \Psi_T^* + 2PN\sqrt{N}L \sum_{t=2}^T \|e_{hi,t}\| + \\
 & \left(9 + \frac{18N_h}{1-\sigma_C} + \frac{9N_h^2}{(1-\sigma_C)^2}\right) \frac{N}{2} K^2 \sum_{t=2}^T \alpha_t. \quad (25)
 \end{aligned}$$

引入事件触发条件 (6), 可以得出

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=2}^T \|e_{hi,t}\| \leq \\
 & \left(NP + \frac{3N_hK}{1-\sigma_C}\right) \sum_{t=2}^T \sum_{s=0}^{t-1} (\eta_R)^s \alpha_{t-s-1} + \\
 & \sum_{t=2}^T \sum_{s=1}^{t-1} (\eta_R)^s \|\hat{e}_{(hi)\bar{h}j,t-s}\| \leq \\
 & \left(NP + \frac{3N_hK}{1-\sigma_C}\right) \frac{2}{(1-\eta_R)} \sum_{t=2}^T \alpha_{t-2} + \\
 & \frac{2}{(1-\eta_R)} \sum_{t=2}^T \|\hat{e}_{(hi)\bar{h}j,t-2}\| \leq \\
 & \left(NP + \frac{3N_hK}{1-\sigma_C}\right) \frac{2}{(1-\eta_R)} \sum_{t=2}^T \alpha_{t-2} + \\
 & \frac{2}{(1-\eta_R)} C_0 \sum_{t=2}^T \alpha_{t-2}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

此外, 通过引理 3 和梯度路径长度 (4), 式 (25) 可以被表述为

$$\begin{aligned}
 & \mu \sum_{t=2}^T \|z_t - z_t^*\|^2 \leq \\
 & \frac{2NP^2}{\alpha_{T+1}^2} + \frac{2\sqrt{N}P}{\alpha_T^2} \Phi_T^* + \frac{2NP}{1-\sigma_C} \Psi_T^* + B_1 \sum_{t=2}^T \alpha_{t-1} + \\
 & (2B_1 + B_2) \sum_{t=2}^T \alpha_{t-2} + B_3 \sum_{t=2}^T \alpha_t. \quad (27)
 \end{aligned}$$

基于 $\alpha_t \leq \alpha_{t-1} \leq \sqrt{\alpha_{t-1}}$, 引理 5 得证. \square

定理 1 当假设 1 ~ 假设 5 成立时, 对于集群 $h \in [H]$ 中的任意智能体 $i \in [N_h]$, 学习时间 T 和由算法生成的序列 $\{x_{hi,1}, x_{hi,2}, \dots, x_{hi,T}\}$, 基于以下设计参数 $\alpha_t = \frac{1}{t^{2a_1}}$, 可以得到

$$\begin{aligned}
 & \text{Reg}_h(T) = \\
 & \mathcal{O}(T^{\max\{1-\frac{a_1}{2}\}}) + \mathcal{O}(T^{\{a_1+\frac{1}{2}\}} \sqrt{\Phi_T^*}) + \mathcal{O}(T^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Psi^*}), \quad (28)
 \end{aligned}$$

其中 $0 < a_1 < 1/2$.

证明 需要注意

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^T \frac{1}{t^{2a}} \leq 1 + \int_1^T \frac{1}{t^{2a}} dt \leq \\
 & 1 + \frac{T^{1-2a} - 1}{1-2a} \leq \frac{T^{1-2a}}{1-2a} \quad (29)
 \end{aligned}$$

对于任何正常数 $a \neq 1$ 和正整数 $T > 2$ 成立. 考虑到设计参数 α_{t-1} 可以得到

$$\sum_{t=2}^T \sqrt{\alpha_{t-1}} \leq \frac{T^{1-a_1}}{1-a_1}, \quad (30)$$

以及

$$\left(\frac{1}{\alpha_T}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\alpha_{T+1}}\right)^2 = (T+2)^{2a_1} \leq 2T^{2a_1}. \quad (31)$$

根据设计的动态遗憾可得

$$\begin{aligned} \text{Reg}_h(T) = & (F_{h,1}(x_{h,1}, x_{-h,1}^*) - F_{h,1}(x_{h,1}^*, x_{-h,1}^*)) + \\ & \sum_{t=2}^T (F_{h,t}(x_{h,t}, x_{-h,t}^*) - F_{h,t}(x_{h,t}^*, x_{-h,t}^*)) \leq \\ & K \|x_{h,1} - x_{h,1}^*\| + K \sum_{t=2}^T \|x_{h,t} - x_{h,t}^*\| \leq \\ & 2N_h PK + K \sqrt{T \sum_{t=2}^T \|x_t - x_t^*\|^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

通过计算得出

$$\begin{aligned} \text{Reg}_h(T) = & \mathcal{O}\left(\sqrt{(B_5 + B_6 \Phi_T^*)T^{2a_1+1} + (B_7 \Psi_T^* + B_8)T + B_9 T^{2-a_1}}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} B_5 = \frac{4NK^2 P^2}{\mu}, \quad B_6 = \frac{4\sqrt{N}PK^2}{\mu}, \\ B_7 = \frac{2NPK^2}{\mu(1-\sigma_C)}, \quad B_8 = \frac{B_4 K^2}{\mu}, \\ B_9 = \frac{(B_1 + B_3 + B_4)K^2}{\mu}. \quad \square \end{aligned}$$

推论 1 当假设 1~假设 5 成立时, 算法实现了次线性有界遗憾, 如果 $\sqrt{\Phi_T^*}$ 和 $\sqrt{\Psi_T^*}$ 是次线性增长, 则当 $a_1 = \frac{1}{3}$ 时, 其最优界为

$$\text{Reg}_h(T) = \mathcal{O}(T^{\frac{5}{6}}) + \mathcal{O}(T^{\frac{5}{6}}\sqrt{\Phi_T^*}) + \mathcal{O}(T^{\frac{1}{2}}\sqrt{\Psi_T^*}). \quad (34)$$

4 仿真实例

在本节中, 将能源互联网系统作为典型应用案例进行讨论, 并进行相应的数值模拟研究. 设想一个能源互联网系统负责管理众多区域, 每个区域都配备有众多能源设施, 这些设施共同构成了一个能源子网. 每个子网可视为一个独立的集群, 而子网内的设施可视为博弈模型中的实际参与者. 接下来, 这些子网作为竞争主体参与到非合作博弈中, 子网内的设施通过合作以优化所属于网的运营成本.

在能源互联网系统中, 其拓扑结构易受线路故障、分布式能源间歇性投切、负荷波动及利益竞争等复杂因素影响, 需动态调整. 引入动态拓扑结构可增强系统鲁棒性和灵活性, 却也带来了诸多挑战. 各集群需本地感知拓扑变化并快速响应, 且在分布式环境下, 确保全局信息同步至关重要. 此外, 传统时间

触发机制(周期性通信)在分布式系统中易导致资源浪费, 而事件触发机制仅在满足预设条件时通信, 更契合资源受限的能源互联网需求. 然而, 在多集群博弈中, 局部事件触发可能引发全局信息不同步, 需克服由此带来的全局误差影响.

假设系统内存在 $[H] = \{1, 2, 3, 4\}$ 个子网, 而每个子网中包含 $N_h = 5, h \in [H]$ 个设备, 总设备数量 $N = 20$. 设备之间为时变环状网络拓扑图, 且保证任意时刻子网内部连通图和全局连通图强连通, 并且其邻接矩阵具有双随机性, 满足假设 4 和假设 5. 在 t 时刻, 采用的集群内部环状连通图的邻接矩阵为

$$\mathcal{G}_t^h = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & B \\ B & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

集群间环状连通图的邻接矩阵为

$$\mathcal{G}_t = \begin{bmatrix} A & B & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & * & \star & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & * & \star & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & * & B \\ B & \bullet & \bullet & \bullet & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{20 \times 20}.$$

其中: $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin(t)$, $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(t)$, * 代表重复元素 A , \star 代表重复元素 B , \bullet 代表重复元素 0 .

每个子网内设施 $i \in N_h, h \in [H]$ 的任意时刻 t 的收益函数为 $f_{i,t}(x_t) = C_{i,t}(x_{hi,t}) + x_{hi,t}P_t(x_t)$, $C_{i,t}(x_t) = x_{hi,t} \sum_{j=1}^N x_{h'j,t}$ 为地区政府的能源政策, 代表当地能源价格受其他集群(地区)总体决策的影响程度, $P_t(x_{hi,t}) = -p_1 x_{hi,t} \sin(t) - p_2 i x_{hi,t} + x_{hi,t}^2$. 其中: $p_1 = 1, p_2 = -1.8$ 为常数. 需要注意的是, 地区政府的能源政策受到运输成本、工业发展水平和其他实际因素的影响. 此外, 每个设备 $i \in N_h, h \in [H]$ 的约束条件为 $x_{hi,t} \in [0, 10]$. 设备的收益函数和约束条件满足假设 1~假设 3.

在离线和集中设置下, 可以计算出任意时刻 t 的纳什均衡为 $x_{hi,t}^* = P_{\Omega_t^h}(\tau_{hi,t})$. 其中: 对于每个子网内设施 $i \in N_h, h \in [H]$, $\tau_{hi,t} := -\frac{p_2}{14} \sum_{i \in h} i + \frac{p_2}{2} i + \frac{1}{27} p_1 \sin(t) - \frac{10}{9} p_2$. 在在线和分布式场景中, 算法变量的初始化设置为 $x_{hi,1} \in [0, 40]$, $\mathbf{x}_{(-h)hi,1} = \mathbf{0}_{q-q_h}$, $a_1 = 1/3, C_0 = 1$.

对于任意集群 $h \in [H]$, 子网动态遗憾 $\text{Reg}_h(T)/T$ 的轨迹如图 1 所示.

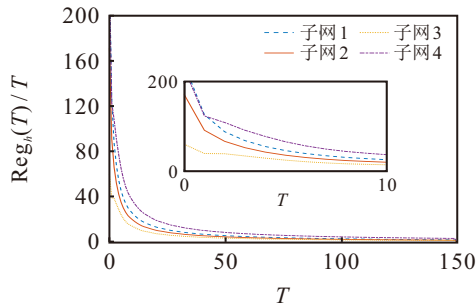


图1 对于任意集群 $h \in [H]$, 子网动态遗憾 $\text{Reg}_h(T)/T$ 的轨迹

从图1可以看出, 随着迭代次数的增加, 子网 $\text{Reg}_h(T)/T$ 逐渐减小到 0, 即对于任意子网 $h \in [H]$ 的动态遗憾是次线性增加的, 这与本文理论结果是一致的. 当 $T = 5000$ 时, 设备之间状态量传输平均次数 (即事件触发次数) $k = 2347$, 通信次数降低率 $\frac{T-k}{T} \times 100\% = 53.06\%$, 这充分验证了引入事件触发机制算法的有效性. 需要指出的是, 通信次数降低的具体幅度受系统参数、算法参数及触发条件阈值等多重因素影响, 并非恒定值, 会随实际应用场景和算法设计的不同而变化.

5 结论

本文研究了针对动态环境下具有时变收益函数的多集群博弈问题, 提出了一种基于事件触发机制的分布式在线学习算法. 通过构建时变拓扑结构下的多集群博弈模型, 创新性地解决了合作-竞争混合型多智能体系统的纳什均衡求解问题. 算法设计具有以下特点: 首先, 引入事件触发机制, 通过设计具有自适应阈值的触发函数, 实现了智能体间的按需通信, 显著降低了系统通信频次和网络带宽压力; 其次, 构建了时变收益函数的在线估计模块, 有效提升了算法对动态环境的适应能力; 最后, 建立了严格的收敛性分析框架, 克服了事件触发机制带来的非周期性通信挑战. 理论分析验证了该算法在动态环境下的有效性. 通过能源互联网系统的典型场景仿真进一步说明该算法在降低通信负载的同时仍能保证均衡解的收敛性, 同时验证了其理论结果和工程应用潜力. 未来工作将基于有向生成树网络架构, 深入钻研时变多集群博弈的在线学习算法, 同时着力对事件触发机制开展优化设计, 一方面精准改进阈值判定逻辑, 另一方面创新性地引入多层次触发策略, 全方位提升系统效能和响应精准度.

参考文献 (References)

[1] Gadjov D, Pavel L. A passivity-based approach to Nash equilibrium seeking over networks[J]. *IEEE*

Transactions on Automatic Control, 2019, 64(3): 1077-1092.

- [2] Tatarenko T, Shi W, Nedić A. Geometric convergence of gradient play algorithms for distributed Nash equilibrium seeking[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(11): 5342-5353.
- [3] Bianchi M, Belgioioso G, Grammatico S. Fast generalized Nash equilibrium seeking under partial-decision information[J]. *Automatica*, 2022, 136: 110080.
- [4] Zhu Y N, Yu W W, Wen G H, et al. Distributed Nash equilibrium seeking in an aggregative game on a directed graph[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(6): 2746-2753.
- [5] 李基贺, 纪志坚. 基于博弈的二阶多智能体系统分组编队[J]. *控制与决策*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1415. (Li J H, Ji Z J. Game-based group formation control of second-order multi-agent systems[J]. *控制与决策*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1415.)
- [6] 王启明, 万璇, 方鸣, 等. 基于动态非合作博弈的智能网联汽车超车行为决策研究[J]. *控制与决策*, 2025, 40(7): 2300-2312. (Wang Q M, Wan X, Fang M, et al. Decision-making research on overtaking behavior of connected and automated vehicles based on dynamic non-cooperative game[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(7): 2300-2312.)
- [7] Pisarski D, Canudas-de-Wit C. Nash game-based distributed control design for balancing traffic density over freeway networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2016, 3(2): 149-161.
- [8] Deng Z H. Distributed algorithm design for aggregative games of Euler-Lagrange systems and its application to smart grids[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(8): 8315-8325.
- [9] Brettschneider D, Hölker D, Roer P, et al. Cluster-based distributed algorithm for energy management in smart grids[J]. *Computer Science-Research and Development*, 2016, 31(1): 17-23.
- [10] Ye M, Hu G, Lewis F L. Nash equilibrium seeking for n -coalition noncooperative games[J]. *Automatica*, 2018, 95: 266-272.
- [11] Ye M J, Hu G Q, Lewis F L, et al. A unified strategy for solution seeking in graphical N -coalition noncooperative games[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4645-4652.
- [12] Zeng X L, Chen J, Liang S, et al. Generalized Nash equilibrium seeking strategy for distributed nonsmooth multi-cluster game[J]. *Automatica*, 2019, 103: 20-26.
- [13] Zimmermann J, Tatarenko T, Willert V, et al. Gradient-tracking over directed graphs for solving leaderless multi-cluster games[J/OL]. 2021, arXiv: 2102.09406.
- [14] Ye M J, Hu G Q, Xu S Y. An extremum seeking-based approach for Nash equilibrium seeking in N -cluster noncooperative games[J]. *Automatica*, 2020, 114:

- 108815.
- [15] Meng M, Li X X. On the linear convergence of distributed Nash equilibrium seeking for multi-cluster games under partial-decision information[J]. *Automatica*, 2023, 151: 110919.
- [16] Bai H M, Xu W Y, Yang S F, et al. Distributed inertial online game algorithm for tracking generalized Nash equilibria[J]. *Chaos*, 2023, 33(10): 103115.
- [17] Yang G, Ho C K, Guan Y L. Dynamic resource allocation for multiple-antenna wireless power transfer[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(14): 3565-3577.
- [18] 葛明峰, 李一凡, 刘智伟, 等. 面向时变目标协同跟踪的多自主无人船分层有限时间优化调控[J]. *控制与决策*, 2025, 40(1): 279-284.
(Ge M F, Li Y F, Liu Z W, et al. Hierarchical finite-time optimization regulation of multiple autonomous surface vehicles for time-varying target cooperative tracking[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(1): 279-284.)
- [19] Carnevale G, Camisa A, Notarstefano G. Distributed online aggregative optimization for dynamic multirobot coordination[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(6): 3736-3743.
- [20] Yao S Q, Xie S Y, Li T. Online distributed optimization algorithm with dynamic regret analysis under unbalanced graphs[J]. *Automatica*, 2025, 174: 1-10.
- [21] Yu R, Tang Y T, Yi P, et al. Distributed Nash equilibrium seeking dynamics with discrete communication[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, 35(3): 4347-4353.
- [22] Yu R, Meng M, Li L. Event-triggered distributed Nash equilibrium seeking over directed graphs and its application to power management[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(17): 13261-13283.
- [23] 李志勇, 谈世磊. 基于周期事件触发机制的分布式资源分配算法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(2): 563-571.
(Li Z Y, Tan S L. Periodic event-triggered mechanism based distributed resource allocation algorithm[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(2): 563-571.)
- [24] Long J, Yu D X, Cheong K H, et al. Fully distributed event-triggered Nash equilibrium seeking for networked mean field games[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2025, 55(2): 876-885.
- [25] Chen X M, Huo W, Wu Y C, et al. An efficient distributed Nash equilibrium seeking with compressed and event-triggered communication[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, 70(3): 2035-2042.
- [26] 郭志军, 曾令伟, 洪宝源, 等. 动态事件触发通信下分布式预定时间非光滑约束优化算法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(6): 2031-2040.
(Guo Z J, Zeng L W, Hong B Y, et al. Distributed non-smooth constrained optimization: A predefined-time and dynamic event-triggered approach[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(6): 2031-2040.)
- [27] Basar T, Olsder G J. *Dynamic noncooperative game theory*[M]. The 2nd edition. Philadelphia: SIAM, 1999: 96.
- [28] Yu R, Meng M, Li L. Distributed online learning for leaderless multicluster games in dynamic environments[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2024, 11(3): 1548-1561.
- [29] Yu R, Meng M, Li L, et al. Distributed learning for online multi-cluster games over directed graphs[J]. *Neurocomputing*, 2024, 603: 1-10.
- [30] Lu K H, Li G Q, Wang L. Online distributed algorithms for seeking generalized Nash equilibria in dynamic environments[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(5): 2289-2296.
- [31] Belgioioso G, Nedić A, Grammatico S. Distributed generalized Nash equilibrium seeking in aggregative games on time-varying networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(5): 2061-2075.

作者简介

余芮 (1994-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为分布式优化与博弈、非线性系统控制, E-mail: 2010464@tongji.edu.cn;

王倩瑶 (1992-), 女, 博士, 主要研究方向为分布式估计算法, E-mail: wangqian Yao@tongji.edu.cn;

杜凯新 (1997-), 女, 博士生, 主要研究方向为分布式优化和博弈, E-mail: dukx@tongji.edu.cn;

熊婧 (1993-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为决策规划技术, E-mail: samanthaxxx@zjxu.edu.cn;

张先超 (1984-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为感知通信计算协同网络、智能计算、数字健康, E-mail: zhangxianchao@zjxu.edu.cn.