

控制与决策

Control and Decision

连续时间马尔可夫链的近似互模拟

乔沙, 冯俊娥, 李景叶

引用本文:

乔沙, 冯俊娥, 李景叶. 连续时间马尔可夫链的近似互模拟[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 101–111.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0308>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于PID参数整定的线性自抗扰控制参数整定

[Tuning of linear active disturbance rejection controllers based on PID tuning rules](#)

控制与决策. 2021, 36(7): 1592–1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1408>

基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型

[Multi-component system state space partition model based on Markov process](#)

控制与决策. 2021, 36(2): 418–428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

基于多维泰勒网的超前d步预测模型

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network

控制与决策. 2021, 36(2): 345–354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger

控制与决策. 2021, 36(10): 2467–2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

连续时间马尔可夫链的近似互模拟

乔沙¹, 冯俊娥^{2†}, 李景叶³

(1. 中国石油大学(北京)理学院, 北京 102249; 2. 山东大学数学学院, 济南 250100;
3. 中国石油大学(北京)油气资源与探测国家重点实验室, 北京 102249)

摘要: 连续时间马尔可夫链 (CT-MCs) 是在随机建模中发挥重要作用的基本模型, 其约简问题是需要重点研究的问题之一. 并发理论和计算机科学中的互模拟是研究约简问题的一个重要工具, 近年来, 人们基于互模拟研究了 CT-MCs 的约简问题. 然而, 受现实因素的影响, 所构建的 CT-MCs 的数据往往不精确. 为了克服此问题且为了更好地约简 CT-MCs, 基于近似互模拟研究了 CT-MCs 的约简问题. 首先给出 CT-MCs 的近似互模拟定义, 把差值在给定阈值范围内的状态行为仍然认为是等价的而不要求完全相同; 为研究 CT-MCs 的可控性, 给出近似向前-向后互模拟的定义, 其既考虑状态的前邻域状态又考虑后邻域状态. 其次, 给出计算为等价关系的极大近似向前-向后互模拟的算法以及包含在此等价关系中的最大可控商集的算法. 最后, 构造 CT-MCs 的商, 其为状态较少的 CT-MCs, 并给出 CT-MCs 的渐近稳定性是其商渐近稳定的充分必要条件; 构造 CT-CMCs 的商, 其为状态较少的 CT-CMCs, 并给出 CT-CMCs 的渐近稳定性和可控性分别是其商渐近稳定性和可控性的充分必要条件.

关键词: 连续时间马尔可夫链; 互模拟; 可控性; 模型约简; 稳定性

中图分类号: O231 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0308

引用格式: 乔沙, 冯俊娥, 李景叶. 连续时间马尔可夫链的近似互模拟 [J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 101-111.

Approximate bisimulations for continuous-time Markov chains

QIAO Sha¹, FENG Jun-e^{2†}, LI Jing-ye³

(1. College of Science, China University of Petroleum, Beijing 102249, China; 2. School of Mathematics, Shandong University, Ji'nan 250100, China; 3. State Key Laboratory of Petroleum Resources and Prospecting, China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: Continuous-time Markov chains (CT-MCs) is a basic mathematical model, which plays a central role in stochastic modeling. The reduction problem is one of the important research questions. Bisimulation introduced in concurrency and computer science is a commonly used tool in reduction. Recently, the scale reductions of CT-MCs and continuous-time control Markov chains (CT-CMCs) have been investigated based on bisimulations. However, the data used to construct CT-MCs is often imprecision by reality. To overcome this problem and better reduce CT-MCs, approximate bisimulations are introduced to study the reduction problem of CT-MCs. Firstly, giving the definition of ϵ -bisimulation of CT-MCs, where $\epsilon \in [0, 1]$, which considers the two states of which behaviors with the difference not exceeding ϵ as equivalent rather than being the same. For CT-CMCs, the notion of ϵ -forward-backward bisimulation is introduced to analysis the controllability, which not only considers the successor neighborhoods but also the predecessor neighborhoods. Then, the algorithms for the maximal ϵ -forward-backward bisimulation which is an equivalence relation are provided and the maximum controllable quotient set contained in the equivalence relation is computed. Finally, the quotients of CT-MCs are constructed, which are CT-MCs with fewer states, and the consistency between the asymptotic stabilities of a CT-CMC and its quotient is obtained. The quotients of CT-CMCs are constructed, which are CT-CMCs with fewer states, and the consistencies between a CT-CMC and its quotient in asymptotic stabilities and controllabilities are developed.

Keywords: continuous-time Markov chains; bisimulation; controllability; model reduction; stability

收稿日期: 2025-03-26; 录用日期: 2025-07-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12301589, 62273201, 62172048, 62303170); 山东省泰山学者基金项目 (tstp20221103); 中国石油大学(北京)科研基金资助项目 (2462024YJRC024); 油气资源与工程全国重点实验室基金项目 (PRE/DX-2508); 中国石油天然气集团有限公司关键核心技术攻关项目 (2024ZG21).

†通信作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.

0 引言

连续时间马尔可夫链 (CT-MCs) 作为一种常用的基本数学模型, 在化学^[1]、生物学^[2] 等自然学科, 以及排队论^[3]、人工智能^[4] 等工程学科的随机建模中发挥着核心作用. 具体而言, 可用于刻画生物网络^[5] 的随机性, 例如通过齐次 MCs 模拟流行病的传播过程^[6]; 刻画基因调控网络, 例如描述布尔网络的状态空间的演化^[7-8], 布尔网络是一类极其重要的数学模型^[9], 其预测长期行为的能力, 可刻画基因调控网络的定性行为; 构建排队模型, 例如通过二维马尔可夫链拓展 M/M/K/K 排队模型^[10], 用于分析公共充电建设的性能; 马尔可夫链也用于强化学习^[11]和深度学习^[12], 例如基于连续时间马尔可夫博弈, 提出深度学习, 用于研究多交叉口交通信号灯问题^[4]等.

渐近收敛性分析是研究马尔可夫链的核心问题之一^[13]. 文献 [14-15] 研究了吸收离散时间马尔可夫链 (DT-MCs) 的渐近收敛性. 文献 [16-17] 用李雅普诺夫函数研究了 DT-MCs 的稳定性. 与 DT-MCs 相比, CT-MCs 的转移速率矩阵保持不变而不是转移概率矩阵保持不变, 其可克服 DT-MCs 在微观时间尺度上描述系统演化的局限性. Guo 等^[18] 研究了 CT-MCs 形式的连续时间概率逻辑网络, 因其转移概率矩阵的非奇异性, 故提出了渐近稳定性, 给出子集渐近稳定性条件, 基于控制不变子集给出了连续时间概率逻辑控制网络在采样数据反馈下渐近镇定的充要条件. 进一步, Zhu 等^[19] 利用李雅普诺夫函数, 研究了吸收 CT-MCs 和集吸收 CT-MCs 的渐近收敛性.

CT-CMCs 可用于刻画逻辑控制网络^[18]、有限域网络^[20]、有限自动机^[21] 等数学模型. Li 等^[22] 基于输入相关的转移矩阵, 研究了 CT-CMCs 形式的连续时间概率逻辑控制网络的可控性; 接着, Li 等^[23] 又研究了在分段常函数和右连续控制下的连续时间概率逻辑控制系统, 通过提出采样不变子集和最大采样不变子集, 研究其渐近可控性.

对于大型布尔控制网络, Li 等^[24] 研究了约简问题, 基于互模拟约简了布尔控制网络, 并验证了约简的布尔控制网络控制性保持不变; 之后又将该项工作推广到概率布尔网络^[25], 此处的布尔网络可以看成 DT-MCs. Lin 等^[26] 基于互模拟约简了大型 CT-MCs, 构造了状态较少的 CT-MCs 的商, 其为渐近稳定性和渐近可控性保持不变的 CT-MCs. Cardelli 等^[27] 研究了不确定性 CT-MCs 的 lumpability, 并对其进行逻辑和算法刻画. 近来, Gao 等^[28] 基于互模拟研究了

非线性反馈移位寄存器的约简问题. 对系统的约简将有效降低大规模系统研究的复杂度.

现实环境中存在很多行为不等价, 为比较行为差值较小的系统行为, 很多工作采用近似的思想研究问题^[29-32], 比如在比较两个系统行为时, 常常采用近似互模拟^[29-30]. 近似互模拟可用于度量行为不等价的两个系统的相似度, 而不是简单判定为不等价 (互模拟), 因此, 近似互模拟具有更强的鲁棒性和灵活性. Girard 等^[33] 指出近似互模拟是计算机科学和控制理论之间的桥梁, 近似互模拟在 DT-MCs^[34-35]、CT-MCs^[36-37]、马尔可夫过程^[38]、概率自动机^[39]、模糊系统^[30,32] 等领域被广泛研究.

文献 [38] 在马尔可夫过程中提出了近似互相似, 并对其进行了固定点理论刻画和 Hennessy-Milner 性质研究. 文献 [34] 给出了 DT-MCs 的弱互相似的近线性时间算法; 为考虑概率自动机发散性行为 (无限内部循环), He 等^[39] 引入了散度敏感弱概率互模拟; Fatmi 等^[35] 研究了标记 MCs 的鲁棒概率互相似; Lin 等^[36] 用弱 “V” 范数度量两个 CT-MCs 的有限时间状态分布的距离, 度量的是分布的总差异, 而分量差异由文献 [37] 引入近似概率互模拟进行了刻画, 但其要求任意分量 (转移速率分布) 之间的差异由阈值 ϵ 限定. 本文给出 CT-MCs 的 ϵ -互模拟并研究 CT-MCs 的约简问题. ϵ -互模拟要求存在转移速率 (分量) 之间的差异由阈值 ϵ 限定即可, 且不要求转移速率之和相等 (互模拟, Lumpability)^[22, 27], 与互模拟^[22] 和 Lumpability^[27] 相比, 其得到的等价关系更大, 进而约简的 CT-MCs 更小.

本文主要工作如下:

1) 给出 CT-MCs 的近似互模拟, 研究其基本性质.

2) 基于为等价关系的近似互模拟构造 CT-MCs 的商, 然后给出 CT-MCs 与其商之间的近似互模拟, 用于刻画 CT-MCs 与其商的等价性, 给出 CT-MCs 与其商之间渐近稳定性的一致性.

3) 首次给出 CT-CMCs 的近似向前-向后互模拟, 其既考虑此状态的前邻域状态又考虑后邻域状态. 先给出计算极大近似向前-向后互模拟的算法, 再给出计算为等价关系的极大近似向前-向后互模拟的算法. 引入可控类的概念, 其为状态集的一个子集, 且其中任意两个状态都可以互相到达, 然后给出包含在此等价关系中的最大可控商集的算法.

4) 给出 CT-CMCs 与其商渐近稳定性和可控性的一致性.

1 预备知识

1.1 符号

$\text{Row}_i(A)$ 和 $[A]_{i,j}$ 分别表示矩阵 A 的第 i 行和第 (i, j) 元素. $\Delta_n := \{\delta_n^i | 1 \leq i \leq n\}$, δ_n^i 为单位矩阵 I_n 的第 i 列; δ_n^0 为 n 维零向量 $\mathbf{0}$. \mathbb{P}^n 为 n 维概率向量集合, 其元素为非负且和为1. $[\mathbf{a}] := \{\delta_n^{i_1} | \mathbf{a} = a_{i_1} \delta_n^{i_1} + a_{i_2} \delta_n^{i_2} + \dots + a_{i_m} \delta_n^{i_m}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m} > 0\}$; $[\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}] := \{[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2], \dots, [\mathbf{a}_n]\}$.

1.2 CT-MCs 和 CT-CMCs 模型

本文考虑取值于 Δ_n 的 n 个状态的 CT-MCs, 其动态可表示为转移概率矩阵 (TPM) $\mathbf{P}(t) \in \mathbb{P}^{n \times n}$, 即

$$[\mathbf{P}(t)]_{i,j} := P\{x(\tau+t) = \delta_n^i | x(\tau) = \delta_n^j\}.$$

假设时变 TPM $\mathbf{P}(t)$ 具有性质: 1) $\mathbf{P}(0) = I_n$; 2) 对于任意正整数 τ, ν , $\mathbf{P}(\tau+\nu) = \mathbf{P}(\tau)\mathbf{P}(\nu)$; 3) 其元素是以 t 为自变量的连续可微变量, 则有 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) = I_n$, 且可定义 CT-MCs 的转移速率矩阵 (TRM) $\mathcal{Q} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{\mathbf{P}}(t)$. \mathcal{Q} 是唯一确定的, 且有: 1) $[\mathcal{Q}]_{i,i} \leq 0, 1 \leq i \leq n$; 2) $[\mathcal{Q}]_{i,j} \geq 0, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$; 3) $\sum_{i=1}^n [\mathcal{Q}]_{i,j} = 0, 1 \leq j \leq n$. 由此可得 CT-MCs 的一般微分等式表达式 $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathcal{Q}\mathbf{P}(t)$, 这里 $\mathbf{P}(t) = e^{\mathcal{Q}t}\mathbf{P}(0) = e^{\mathcal{Q}t}$. 令状态 $x(t)$ 的概率分布向量 (PDV) 为 $p(t) \in \mathbb{P}^n$, 有

$$[p(t)]_i := \mathbb{P}\{x(t) = \delta_n^i\}, 1 \leq i \leq n.$$

$p(t)$ 为如下方程组的解:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \mathcal{Q}p(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

其中: p_0 为初始状态的概率分布向量, $p(t) = \mathbf{p}(t; p_0) = e^{\mathcal{Q}t}p_0$. 注意到 TPM $\mathbf{P}(t)$ 和 PDV $p(t)$ 由 TRM \mathcal{Q} 决定, 因此接下来, TRM 为 \mathcal{Q} 、链大小为 n 的 CT-MC 可用 (Δ_n, \mathcal{Q}) 表示, \mathcal{Q} 也可由转移速率图 (TRG) $G := (V, E)$ 表示, 即 $V := \{i | 1 \leq i \leq n\}$, $E := \{(i, r, j) | [\mathcal{Q}]_{i,j} = r \neq 0\}$.

控制序列记为 $U_0^t: \mu(0), \mu(1), \dots, \mu(t) \subseteq \Delta_m$, 若起始状态为 $x_0^c \in \Delta_n$, 则经过 t 时间和控制序列 U_0^t 之后到达状态 $x^c(t; U_0^t, x_0^c)$, 此状态的 PDV $p^c(t)$ 为

$$[p^c(t)]_i := \mathbb{P}\{x^c(t; U_0^t, x_0^c) = \delta_n^i\}, 1 \leq i \leq n.$$

从而, 可定义 CT-CMCs 的 TPM 为 $\mathbf{P}^c(t) := [\mathbf{P}_1^c(t), \mathbf{P}_2^c(t), \dots, \mathbf{P}_m^c(t)] \in \mathbb{P}^{n \times nm}$, 其中

$$[\mathbf{P}_\rho^c(t)]_{i,j} := \mathbb{P}\{x(\tau+t) = \delta_n^i | x(\tau) = \delta_n^j, \mu(\nu) = \delta_m^\rho, \nu \in [\tau, \tau+t]\}, 1 \leq \rho \leq n.$$

相应的, TRM 为 $\mathcal{Q}^c = [\mathcal{Q}_1^c, \mathcal{Q}_2^c, \dots, \mathcal{Q}_m^c]$, 其中 $\mathcal{Q}_\rho^c :=$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{\mathbf{P}}_\rho^c(t)$. $\mathbf{P}_\rho^c(t)$ 与 TPM $\mathbf{P}(t)$ 的性质相同, \mathcal{Q}_ρ^c 与 TRM \mathcal{Q} 的性质相同, 即

$$\dot{\mathbf{P}}_\rho^c(t) = \mathcal{Q}_\rho^c \mathbf{P}_\rho^c(t), \mathbf{P}_\rho^c(t) = e^{\mathcal{Q}_\rho^c t} I_n = e^{\mathcal{Q}_\rho^c t}.$$

给定初始 PDV $p_0 \in \mathbb{P}^n$, 则 t 时间后到达的 PDV $p(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \mathcal{Q}\mu(t)p(t), \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

即 $p(t) = \mathbf{p}(t; U_0^t, p_0) = e^{\mathcal{Q}(\sum_{i=0}^t \mu(i))} p_0$. 与 CT-MCs 类似, 以 $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 记输入 TRM 为 \mathcal{Q}^c 、链大小为 n 、输入控制大小为 m 的 CT-CMCs.

更多相关知识请见文献 [18,26] 及其参考文献.

2 CT-MCs 的约简

为了比较 CT-MCs 状态的行为, 进而约简 CT-MCs, 本文先给出 CT-MCs 的近似互模拟, 构建约简的 CT-MCs, 然后分析其渐近稳定性.

2.1 CT-MCs 的近似互模拟

本文给出 CT-MCs 的近似互模拟, 其不要求互相相似的两个状态转移速率之和相等, 放松了互模拟^[23]和 Lumpability^[27]的条件.

定义 1 令 $A = (\Delta_n, \mathcal{Q}_1)$ 和 $B = (\Delta_m, \mathcal{Q}_2)$ 为两个 CT-MCs, $\epsilon \in [0, 1]$. 称一个二元关系 $R_\epsilon \subseteq \Delta_n \times \Delta_m$ 为 A 与 B 之间的 ϵ -互模拟, 如果对于任意 $(x, y) \in R_\epsilon$, 有:

- 1) 由 $x_1^T \mathcal{Q}_1 x > 0$ 可得 $y_1^T \mathcal{Q}_2 y > 0$, 使得 $|x_1^T \mathcal{Q}_1 x - y_1^T \mathcal{Q}_2 y| \leq \epsilon, (x_1, y_1) \in R_\epsilon$;
- 2) 由 $y_1^T \mathcal{Q}_2 y > 0$ 可得 $x_1^T \mathcal{Q}_1 x > 0$, 使得 $|x_1^T \mathcal{Q}_1 x - y_1^T \mathcal{Q}_2 y| \leq \epsilon, (x_1, y_1) \in R_\epsilon$.

由定义 1 可知, 即使行为 $x_1^T \mathcal{Q}_1 x$ 与 $y_1^T \mathcal{Q}_2 y$ 不相等, 只要差值不大于 ϵ , 则认为这两个行为是匹配的, 即等价的; ϵ 越小, 则行为越等价. 通过调整 ϵ 的大小满足不同的需求, 这考虑了现实环境引起的误差, 因而其具有比互模拟^[22]和 Lumpability^[27]更好的鲁棒性和灵活性. 若存在一个 ϵ -互模拟 R_ϵ , 使得 $(x, y) \in R_\epsilon$, 则称 x 与 y 为 ϵ -互相相似的. 最大的 ϵ -互模拟称为 ϵ -互相相似. 如果 $A = B$, 则称 R_ϵ 为 A 的 ϵ -互模拟. 所有 ϵ -互模拟统称为近似互模拟, 由其定义可得如下命题.

命题 1 设 $R_{\epsilon_1}^1$ 和 $R_{\epsilon_2}^2$ 为 CT-MC (Δ_n, \mathcal{Q}) 的两个近似互模拟, 有:

- 1) 对于任意 $\epsilon \in [0, 1]$, $I = \{(x, x) | x \in \Delta_n\}$ 是一个 ϵ -互模拟;
- 2) $(R_{\epsilon_1}^1)^{-1}$ 是一个 ϵ_1 -互模拟;
- 3) $R_{\epsilon_1}^1 \cup R_{\epsilon_2}^2$ 是一个 $(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$ -互模拟, $R_{\epsilon_1}^1 \cap R_{\epsilon_2}^2$ 是一个 $(\epsilon_1 \vee \epsilon_2)$ -互模拟;

4) 合成关系 $R_{\epsilon_1}^1 \circ R_{\epsilon_2}^1$ 是一个 $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ -互模拟.

近似互模拟具有自反性, 对称性, 但不一定具有传递性, 因此不一定是等价关系. 显然, 0-互相似是一个等价关系.

2.2 CT-MCs 的商

一个二元关系 $R \subseteq \Delta_n \times \Delta_{\tilde{n}}$ 可由相应的矩阵 $\gamma_R \in \mathbb{L}^{\tilde{n} \times n}$ 表示为 $(\delta^i, \tilde{\delta}^i) \in R$, 当且仅当 $[\gamma_R]_{i, \tilde{i}} = 1$, 则给定一个矩阵 $\gamma \in \mathbb{L}^{\tilde{n} \times n}$, 可得相应的一个二元关系 $R_\gamma = \{(x, \tilde{y}) \in \Delta_n \times \Delta_{\tilde{n}} | \tilde{y} = \gamma x\}$. 不引起混淆的情况下, 可将 γ_R 简写为 γ .

设 $R \subseteq \Delta_n \times \Delta_n$, 状态 x 关于 R 的后邻域记为 $\vec{R}_x = \{y | (x, y) \in R\}$. 称 $\tilde{R} = \{\vec{R}_x | x \in \Delta_n\}$ 为 Δ_n 关于等价关系 R 的等价类的集合, $\tilde{n} = |\tilde{R}|$ 为 Δ_n 关于等价关系 R 的等价类的个数. 定义一个双射 $S: \Delta_n \rightarrow \tilde{R}, \tilde{x} \rightarrow \vec{R}_y, \tilde{x} \in \Delta_{\tilde{n}}, y \in \Delta_n$. 令

$$\mathcal{T} = \{(y, \tilde{x}) \in (\Delta_n, \Delta_{\tilde{n}}) | y \in S(\tilde{x})\}, \quad (1)$$

则有 $\gamma_{\mathcal{T}} \in \mathbb{L}^{\tilde{n} \times n}$, 以及 $R_{\gamma_{\mathcal{T}}} = \{(y, \tilde{x}) \in \Delta_n \times \Delta_{\tilde{n}} | \tilde{x} = \gamma_{\mathcal{T}} y\}$. 令 $\Delta_{\tilde{n}}$ 为状态集合, 定义转移速率矩阵 \tilde{Q} 为 $\tilde{Q}_{i,j} = \tilde{\delta}_i^T \gamma_{\mathcal{T}} Q \gamma_{\mathcal{T}}^T \tilde{\delta}_j$, $1 \leq i, j \leq \tilde{n}$, 则 $\tilde{Q}_{i,j}$ 为矩阵 Q 的元素集合. 构建新的 CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$, 称为 CT-MC (Δ_n, Q) 的商. 由如下命题可知, \mathcal{T} 是 (Δ_n, Q) 与 $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 之间的一个 ϵ -互模拟.

命题 2 给定 CT-MC (Δ_n, Q) . 设 R_ϵ 为其 ϵ -互模拟且为等价关系, CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 为相应的商, 则式 (1) 定义的 \mathcal{T} 为 (Δ_n, Q) 与 $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 之间的 ϵ -互模拟.

证明 对于任意 $(y, \tilde{x}) \in \mathcal{T}, y \xrightarrow{r} y_1$, 存在 $\tilde{x}_1 = \gamma_{\mathcal{T}} y_1$, 使得 $\tilde{x} \xrightarrow{r} \tilde{x}_1$ 且 $|r - r_1| \leq \epsilon, (y_1, \tilde{x}_1) \in \mathcal{T}$. 反之, 对于任意 $\tilde{x} \xrightarrow{r} \tilde{x}_1$, 由 \tilde{Q} 的构造可知 $y \in \gamma_{\mathcal{T}} \tilde{x}$, 且存在 $y_1 \in \gamma_{\mathcal{T}} \tilde{x}_1$, 使得 $y \xrightarrow{r} y_1, |r - r_1| \leq \epsilon$ 且 $(y_1, \tilde{x}_1) \in \mathcal{T}$. 由定义 1, \mathcal{T} 为 (Δ_n, Q) 与 $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 之间的 ϵ -互模拟. \square

2.3 CT-MCs 的渐近稳定性

下面先给出文献 [26] 中 CT-MCs 渐近稳定性的等价性定义, 再研究 CT-MCs 的渐近稳定性.

定义 2 给定状态分布 $p_0 \in \mathbb{P}^n$, 称 CT-MC (Δ_n, Q) 渐近稳定于 p_0 , 如果对于任意 $p_1 \in \mathbb{P}^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{(p(t; p_1) \cap p_0) > \mathbf{0}\} = 1.$$

命题 3 给定一个 CT-MC (Δ_n, Q) , R_ϵ 为其 ϵ -互模拟且为等价关系, CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 为相应的商, 则对于任意 $p_0 \in \mathbb{P}^n, \tilde{p}_0 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$ 和 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} [\gamma p(t; p_0)] &= [\tilde{p}(t; \gamma p_0)], \\ [p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] &= [\gamma^T \tilde{p}(t; \tilde{p}_0)]. \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} [\gamma p(t; p_0)] &= [\gamma e^{Qt} p_0] = \\ &= \left[\gamma \left(I + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} (Qt)^s \right) p_0 \right] = \\ &= \left[\gamma \left(I + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} ((\gamma^T \gamma Q \gamma^T \gamma)^s t) \right) p_0 \right] = \\ &= \left[\gamma \left(I + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \gamma^T (\gamma Q \gamma^T)^s \gamma \right) p_0 \right]. \end{aligned}$$

由 γ 的定义可得

$$\begin{aligned} [\gamma \gamma^T \tilde{p}_0] &= [\tilde{p}_0] = \\ &= \left[\left(I + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} (\tilde{Q}t)^s \right) \gamma p_0 \right] = \\ &= [e^{\tilde{Q}t} \gamma p_0] = [\tilde{p}(t; \gamma p_0)]. \end{aligned}$$

类似地, 可得 $[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}(t; \tilde{p}_0)]$. \square

命题 4 给定一个 CT-MC (Δ_n, Q) , R_ϵ 为其 ϵ -互模拟且为等价关系, CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 为相应的商, $\tilde{p}_1 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$, 则对于任意 $\tilde{p}_0 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$ 和任意 $t > 0$, 有

$$\mathbb{P}\{[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]\} = \mathbb{P}\{[\tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_1]\}.$$

证明 由 $[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]$ 得 $[\gamma p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma \gamma^T \tilde{p}_1]$. 由命题 3 可知 $[\tilde{p}(t; \gamma \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma \gamma^T \tilde{p}_1]$, 进而由 γ 的定义可知 $[\tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_1]$, 因此

$$\mathbb{P}\{[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]\} \leq \mathbb{P}\{[\tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_1]\}.$$

另外, 由 $[\tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_1]$ 可得 $[\gamma^T \tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]$. 由命题 3 可知 $[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]$, 从而 $\mathbb{P}\{[\tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_1]\} \leq \mathbb{P}\{[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]\}$.

综上, 有

$$\mathbb{P}\{[p(t; \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_1]\} = \mathbb{P}\{[\tilde{p}(t; \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_1]\}.$$

成立. \square

下面给出 CT-MCs 与其商渐近稳定性的一致性.

定理 1 给定一个 CT-MC (Δ_n, Q) , R_ϵ 为其 ϵ -互模拟且为等价关系, CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 为相应的商, $\tilde{p}_0 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$. CT-MC (Δ_n, Q) 渐近稳定于 $\gamma^T \tilde{p}_0$ 当且仅当 CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 渐近稳定于 \tilde{p}_0 .

证明 如果对于任意 $\tilde{p}_1 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$, 由命题 4 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{p(t; \gamma^T \tilde{p}_1) \cap \gamma^T \tilde{p}_0 > \mathbf{0}\} = 1,$$

当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\tilde{p}(t; \tilde{p}_1) \cap \tilde{p}_0 > \mathbf{0}\} = 1,$$

则由定义 2, CT-MC (Δ_n, Q) 渐近稳定于 $\gamma^T \tilde{p}_0$ 当且仅当 CT-MC $(\Delta_{\tilde{n}}, \tilde{Q})$ 渐近稳定于 \tilde{p}_0 . \square

3 CT-CMCs 的约简

为便于研究 CT-CMCs 的可控性, 与 CT-MCs 不

同的是, 本节基于更强的互模拟 (称为近似向前-向后互模拟), 研究 CT-CMCs 的约简问题. 首先, 给出 CT-CMCs 的近似向前-向后互模拟定义, 极大近似向前-向后互模拟的计算算法; 然后, 构造约简的 CT-CMCs; 最后, 研究其渐近稳定性和可控性.

3.1 CT-CMCs 的近似互模拟

在比较状态行为时, 互模拟只要求状态可到达的行为互等价, 这样忽略了可到达状态的行为, 不便于研究 CT-CMCs 的可控性. 为此, 本文给出 CT-CMCs 的近似向前-向后互模拟, 既考虑了状态可到达的行为, 又考虑了可到达状态的行为, 且不要求互相似状态的转移速率之和相等.

定义 3 令 $A = (\Delta_n, \Delta_m, Q_1^c)$ 和 $B = (\Delta_{\bar{n}}, \Delta_{\bar{m}}, Q_2^c)$ 为两个 CT-CMCs, $\epsilon \in [0, 1]$. 称一个二元关系 $R_\epsilon \subseteq \Delta_n \times \Delta_m$ 为 AB 之间的 ϵ -向前-向后互模拟, 如果对于任意 $(x, y) \in R_\epsilon$, 下面条件成立:

1) 对于任意 $x^T Q_1^c \mu x > 0$, 存在 $y^T Q_2^c \eta y > 0$, 使得 $|x^T Q_1^c \mu x - y^T Q_2^c \eta y| \leq \epsilon$, $(x', y') \in R_\epsilon$; 对于任意 $x^T Q_1^c \mu x'' > 0$, 存在 $y^T Q_2^c \eta' y'' > 0$, 使得 $|x^T Q_1^c \mu x'' - y^T Q_2^c \eta' y''| \leq \epsilon$, $(x'', y'') \in R_\epsilon$.

2) 对于任意 $y^T Q_2^c \mu y > 0$, 存在 $x^T Q_1^c \eta x > 0$, 使得 $|x^T Q_1^c \mu x - y^T Q_2^c \eta y| \leq \epsilon$, $(x', y') \in R_\epsilon$; 对于任意 $y^T Q_2^c \mu y'' > 0$, 存在 $x^T Q_1^c \eta' x'' > 0$, 使得 $|x^T Q_1^c \mu x'' - y^T Q_2^c \eta' y''| \leq \epsilon$, $(x'', y'') \in R_\epsilon$.

注 1 由定义 1 和定义 3 可知, ϵ -向前-向后互模拟为 ϵ -互模拟, 反之不然, 因此其为更强的 ϵ -互模拟. 若存在一个 ϵ -向前-向后互模拟 R_ϵ 使得 $(x, y) \in R_\epsilon$, 则称 x 和 y 为 ϵ -向前-向后互相似. 若 $A = B$, 则称 R_ϵ 为 CT-CMC A 的 ϵ -向前-向后互模拟.

为了判断两个状态 x, y 是否是 ϵ -向前-向后互相似, 本文给出极大近似向前-向后互模拟的计算算法, 这为后面计算等价关系的近似向前-向后互模拟提供了理论支撑.

算法 1 包含在二元关系 S 中的极大 ϵ -向前-向后互模拟.

输入: CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$, $S \subseteq \Delta_n \times \Delta_m$;

输出: R_ϵ , 包含在二元关系 S 中的极大 ϵ -向前-向后互模拟.

初始化: 二元关系 $R_\epsilon^i = \emptyset$, $i > 1$, $R_\epsilon^1 = S$, 函数 L (或 R), $\Delta_n \times \Delta_n \times \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \emptyset$, $(x, y, z, \mu) \rightarrow \emptyset$, 记为 $L_{(x,y)}^{(z,\cdot)}(\mu) = L_{(x,y)}^{(\cdot,z)}(\mu) = \emptyset$ (或 $R_{(x,y)}^{(z,\cdot)}(\mu) = R_{(x,y)}^{(\cdot,z)}(\mu) = \emptyset$), $x, y, z \in \Delta_n$, $\mu \in \Delta_m$, $j = 1$.

1) repeat

2) $j = j + 1$;

3) foreach $(x, y) \in R_\epsilon^j$ do
 4) foreach $z_1^T Q^c \mu x > 0$, $x^T Q^c \mu z_2 > 0$ do
 5) foreach $z_1^T Q^c \eta y > 0$, $y^T Q^c \eta z_2' > 0$ do
 6) if $|z_1^T Q^c \mu x - z_1^T Q^c \eta y| \leq \epsilon$, $(z_1, z_1') \in R_\epsilon^j$,
 7) then $L_{(x,y)}^{(z_1,\cdot)}(\mu) = L_{(x,y)}^{(z_1',\cdot)}(\mu) \cup \{(x, y)\}$;
 8) end if
 9) if $|x^T Q^c \mu z_2 - y^T Q^c \eta z_2'| \leq \epsilon$, $(z_2, z_2') \in R_\epsilon^j$,
 10) then $R_{(x,y)}^{(z_2,\cdot)}(\mu) = R_{(x,y)}^{(z_2',\cdot)}(\mu) \cup \{(x, y)\}$;
 11) end if
 12) end for
 13) if $L_{(x,y)}^{(z_1,\cdot)}(\mu) = \emptyset$ or $R_{(x,y)}^{(z_2,\cdot)}(\mu) = \emptyset$
 14) then break
 15) $R_\epsilon^{j+1} = R_\epsilon^j$
 16) end if
 17) end for
 18) foreach $w_1^T Q^c \eta y > 0$, $y^T Q^c \eta w_2 > 0$ do
 19) foreach $w_1^T Q^c \mu x > 0$, $x^T Q^c \mu w_2' > 0$,
 20) if $|w_1^T Q^c \mu x - w_1^T Q^c \eta y| \leq \epsilon$,
 $(w_1', w_1) \in R_\epsilon^j$,
 21) then $L_{(x,y)}^{(\cdot,w_1)}(\eta) = L_{(x,y)}^{(\cdot,w_1')}(\eta) \cup \{(x, y)\}$;
 22) end if
 23) if $|x^T Q^c \mu w_2' - y^T Q^c \eta w_2| \leq \epsilon$,
 $(w_2', w_2) \in R_\epsilon^j$,
 24) then $R_{(x,y)}^{(\cdot,w_2)}(\eta) = R_{(x,y)}^{(\cdot,w_2')}(\eta) \cup \{(x, y)\}$;
 25) end if
 26) end for
 27) if $L_{(x,y)}^{(\cdot,w_1)}(\eta) = \emptyset$ or $R_{(x,y)}^{(\cdot,w_2)}(\eta) = \emptyset$
 28) then break
 29) $R_\epsilon^{j+1} = R_\epsilon^j$
 30) else $R_\epsilon^{j+1} = R_\epsilon^{j+1} \cup (x, y)$
 31) end for
 32) end for
 33) until $R_\epsilon^{j+1} = R_\epsilon^j$;
 34) return R_ϵ^{j+1} .

步骤 4) ~ 步骤 17) 对应定义 3 中 1), 若不停止, 则 (x, y) 满足条件 1), 步骤 18) ~ 步骤 32) 对应定义 3 中 2), 若不停止, 则 (x, y) 满足条件 2), 故输出为 ϵ -向前-向后互模拟.

算法 1 的时间复杂度 令 $a = \bigvee_{x \in \Delta_n} \{ | \{ z \in \Delta_n \mid z^T Q^c \mu x > 0, \mu \in \Delta_m \} | \vee | \{ x \in \Delta_n \mid z^T Q^c \mu x > 0, \mu \in \Delta_m \} | \}$. 因为 $|R_\epsilon^j| \leq n^2$, 所以步骤 6) ~ 步骤 8)、步骤 9) ~ 步骤 11) 的时间复杂度至多为 $O(m^2 n^2)$, 则步骤 5) ~ 步骤 12) 的时间复杂度为 $O(2am^2 n^2)$, 步骤 4) ~ 步骤 17) 的时间复杂度为 $O(4a^2 m^2 n^2)$.

类似地, 步骤 18) ~ 步骤 31) 的时间复杂度为 $O(4a^2m^2n^2)$. 步骤 3) ~ 步骤 32) 构成的循环重复至多 n^2 , 因此步骤 3) ~ 步骤 33) 的时间复杂度为 $O(8a^2m^2n^4)$. 由 R_ϵ^1 至多有 n^2 个元素, $R_\epsilon^{j+1} \subseteq R_\epsilon^j$, 故步骤 1) ~ 步骤 33) 重复至多 n^2 次. 综上, 算法 1 的时间复杂度为 $O(8a^2m^2n^6)$.

下面命题给出算法 1 的合理性.

命题 5 令 $\{R_\epsilon^j\}_{j \geq 1}$ 为算法 1 定义的关系序列.

1) $R_\epsilon^{j+1} \subseteq R_\epsilon^j, j \geq 1$.

2) 存在正整数 k^* , 使得 $k \geq k^*$ 时, 有 $R_\epsilon^k = R_\epsilon^{k+1}$.

3) 设 l 为满足 $R_\epsilon^l = R_\epsilon^{l+1}$ 的最小正整数, 则 R_ϵ^l 是关于 $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$ 包含在 S 中的极大的 ϵ -向前-向后互模拟.

证明 1) 由初始化 $R_\epsilon^j = \emptyset, j \geq 1$, 步骤 3) 和步骤 31) ~ 步骤 35), 可知 $R_\epsilon^{j+1} \subseteq R_\epsilon^j$. 1) 得证.

2) 由于 CT-CMC 含有 n 个状态和 m 个控制, 至多经过有限次, 设为 k^* 次, 即得 $R_\epsilon^{k^*+1} = R_\epsilon^{k^*}$.

3) 先证明 R^l 为包含在 S 中的 ϵ -向前-向后互模拟. 对于任意 $(x, y) \in R^l$, 有 $(x, y) \in R^{l+1}$. 对于任意 $z_1^T Q^c \mu x > 0$, 由步骤 15) ~ 步骤 18) 可知 $L_{(x,y)}^{(z_1, \cdot)}(\mu) = \{(x, y)\}$, 再由步骤 5) ~ 步骤 9) 可知, 存在 $z_1^T Q^c \eta y > 0$ 使得 $|z_1^T Q^c \mu x - z_1^T Q^c \eta y| \leq \epsilon, (z_1, z_1') \in R_\epsilon^l$.

类似地, 对于 $x^T Q^c \mu z_2 > 0$, 由步骤 15) ~ 步骤 18) 可知 $R_{(x,y)}^{(z_2, \cdot)}(\mu) = \{(x, y)\}$, 再由步骤 5), 步骤 11) ~ 步骤 15) 可知, 存在 $y^T Q^c \eta z_2' \geq 0$ 使得 $|x^T Q^c \mu z_2 - y^T Q^c \eta z_2'| \leq \epsilon, (z_2, z_2') \in R_\epsilon^l$. 定义 3 中 1) 成立. 类似地, 2) 也成立, 故 R^l 为包含在 S 中的 ϵ -向前-向后互模拟.

下面证明 R^l 为包含在 S 中的极大 ϵ -向前-向后互模拟. 用反证法, 假设 R^l 为包含在 S 中的 ϵ -向前-向后互模拟, 且 $R^l \subset R'$, 则由命题 5 中 1) 可知, 存在 $r < l$, 使得 $R^r = R'$, 则算法 1 输出 R^r , 可得 $R^l = R^r$, 与 $R^l \subset R' = R^r$ 矛盾, 故 $R^l \subseteq R'$, 即 R^l 为包含在 S 中的极大 ϵ -向前-向后互模拟. \square

由定义 3 可知, 极大 ϵ -向前-向后互模拟不唯一. 通过计算极大 ϵ -向前-向后互模拟, 可判断两个状态的互相似性. 对于任意 $x, y \in \Delta_n$, 若存在一个极大 ϵ -向前-向后互模拟 R_ϵ , 使得 $(x, y) \in R_\epsilon$, 则状态 x 和 y 为 ϵ -向前-向后互相似的.

3.2 CT-CMCs 的商

本节构造 CT-CMCs 的商. 当基于等价关系构造商时, 等价关系越大构造的商越小. 为了构造更小的商, 给出包含在二元关系 S 中为等价关系的极大 ϵ -向前-向后互模拟的算法.

算法 2 包含在二元关系 S 中为等价关系的极大 ϵ -向前-向后互模拟.

输入: CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c), S \subseteq \Delta_n \times \Delta_n$;

输出: \mathcal{E}_ϵ , 包含在二元关系 S 中为等价关系的极大 ϵ -向前-向后互模拟.

初始化: 向量 $P_i = \emptyset = Q, i \geq 2, P_1 = (p_1, p_2, \dots, p_s), \{p_i\}_{1 \leq i \leq s}$ 为状态集 Δ_n 关于等价关系 \mathcal{E}_0 的等价划分, $Q = \emptyset$ 为 s 维向量. $V(P_i)$ 为向量 P_i 的维数, $V(Q_i)$ 为向量 Q_i 的维数, $l = 1$.

1) repeat

2) $j = j + 1$;

3) $j = 1$;

4) foreach $1 \leq i \leq V(P_j)$ do

5) if $i \notin \bigcup_{1 \leq h < i} Q[h]$ then

6) foreach $i < k \leq V(P_j)$ do

7) if there exists $x_i \in \{p_i \cup p_k\}$ such that

8) $p_i \cup p_k \subseteq (\vec{R}_\epsilon)_{x_i}$

9) then $P_{j+1}[l] = p_i \cup p_k$;

10) $Q[i] = Q[i] \cup \{i, k\}$;

11) break

12) end if

13) end for

14) if $Q[i] = \emptyset$

15) then $P_{j+1}[l] = p_i$,

16) $Q[i] = Q[i] \cup \{i\}$,

17) $l = l + 1$;

18) end if

19) end if

20) end for

21) until $P_{j+1} = P_j$;

22) return P_j .

由定义 3 可知, \mathcal{E}_0 为等价关系. \mathcal{E}_ϵ 的元素为 \mathcal{E}_0 中的元素或元素的并. 步骤 4) ~ 20) 循环一次, 只对 \mathcal{E}_0 的能合并元素中的两个合并, 得到新的等价类 P_{j+1} , 如此循环, 直到不能合并为止 (步骤 21)), 最后输出 \mathcal{E}_ϵ .

算法 2 的时间复杂度 步骤 7) ~ 步骤 12) 的时间复杂度为 $O(n)$, 步骤 6) ~ 步骤 13) 至多循环 sn 次, 步骤 5) ~ 步骤 19) 的时间复杂度至多为 $O(s^2n)$, 步骤 4) ~ 步骤 20) 所形成的循环至多循环 s 次, 故需时间复杂度为 $O(s^3n)$. 由 $V(P_j) = s, V(P_{j+1}) \leq V(P_j)$, 可知步骤 1) ~ 步骤 22) 至多循环 s 次. 综上, 算法 2 的时间复杂度为 $O(s^4n)$.

与命题 5 的证明类似, 可说明算法 2 的合理性.

命题 6 对于算法 2 定义的 $\{R_\epsilon^j\}_{j \geq 1}$, 有:

1) $P_{j+1} \subseteq P_j, j \geq 1$;

2) 存在正整数 k^* , 使得 $k \geq k^*$ 时, 有 $P_k = P_{k+1}$;

3) 设 l 为满足 $P_l = P_{l+1}$ 的最小正整数, 则 P_l 是关于 $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$ 包含在 S 中为等价关系的极大 ϵ -向前-向后互模拟.

为研究 CT-CMCs 的渐近稳定性与可控性, 本文给出可控商集的概念. 给定一个 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$, 如果对于任意 $x, y \in G$, x 可到达 y , 则称 $G \subseteq \Delta_n$ 为可控类. 设 $D \subseteq \Delta_n \times \Delta_n$ 为一个等价关系, 对应的商集为 $D = \{D_i | i \geq 1\}$. 若 D_i 为可控类, 则称 D 为可控商集. $i \geq 1$. 下面给出最大可控商集的计算算法.

算法 3 包含在等价关系 D 中的最大可控商集.

输入: 一个 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$, 等价关系 $D \subseteq \Delta_n \times \Delta_n$;

输出: $\text{ConSet}(D)$, 包含在等价关系 D 中的最大可控商集.

初始化: $H_D[i] = \emptyset, i \geq 1; H_D[i, j] = \emptyset, i \geq 2, D' = \Delta_n, p_{H_D[i, j]}$ 为包含 $H_D[i, j]$ 的等价类 D 中的元素, $i = j = 1$.

- 1) repeat
- 2) $i = i + 1$;
- 3) $H_D[i, 1] = \{x\}, x \in D'$;
- 4) repeat
- 5) $j = j + 1$
- 6) foreach $x' \in p_{H_D[i, 1]} \setminus H_D[i, j]$
- 7) if there exists $x \in H_D[i, j]$ such that
- 8) $(x Q^c x') \wedge (x' Q^c x) > 0$
- 9) then $H_D[i, j + 1] = H_D[i, j] \cup \{x'\}$
- 10) end if
- 11) end for
- 12) until $H_D[i, j + 1] = H_D[i, j]$;
- 13) $D' = D' \setminus H_D[i, j]$;
- 14) $\text{ConSet}(D) = \text{ConSet}(D) \cup H_D[i, j]$;
- 15) until $D' = \emptyset$;
- 16) return $\text{ConSet}(D)$.

对于 $x \in D'$, 在其等价类 $[D]_x$ 中寻找与其互可达的状态集 (步骤 6) ~ 步骤 11), 构成包含在 D 内的一个最大可控类, 则可得到等价类为一个或多个可控类的并. 步骤 1) ~ 步骤 15) 每循环一次得到一个最大可控类, 直到遍历所有状态 (步骤 15)), 输出 $\text{Conset}(D)$.

算法 3 的时间复杂度 步骤 7) 的时间复杂度

至多为 $O(n)$, 由 $D' = \Delta_n$ 可知, 步骤 6) ~ 步骤 10) 的时间复杂度至多为 $O(n^2)$. 由步骤 9) 可知, $H_D[i, j] \subseteq H_D[i, j + 1], i \geq 1, j \geq 1$, 故步骤 4) ~ 步骤 14) 至多循环 n 次, 其时间复杂度至多为 $O(n^3)$. 再由步骤 13), 步骤 15) 可知步骤 1) ~ 步骤 15) 至多循环 n 次, 其时间复杂度至多为 $O(n^4)$, 故算法 2 的时间复杂度为 $O(n^4)$.

下面的命题给出了算法 3 的合理性.

命题 7 算法 3 所得到的 $\text{ConSet}(D)$ 为最大可控商集.

证明 对于 $A \in \text{ConSet}(D)$, 由步骤 6) ~ 步骤 10) 以及可控类的定义得到 A 为可控类, 由步骤 4) 和步骤 12) 可知 A 为最大的可控类, 故 $\text{ConSet}(D)$ 为最大可控商集. \square

令 D 为 0-向前-向后互相似所诱导的等价类, $\text{ConSet}(D)$ 为包含在 D 下的最大可控商集, 下面基于 $\text{ConSet}(D)$ 构造 CT-CMCs $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$ 的商 $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{Q}^c)$. 令 $\tilde{n} = |\text{ConSet}(D)|$, 对于 \tilde{m} 和 \tilde{Q}^c , 先构造 CT-CMCs $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$ 与其商 $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{Q}^c)$ 之间的二元关系, 即

$$\tilde{R}_\epsilon = \{(x, \delta_n^i) | x \in S(\delta_n^i)\} \subseteq \Delta_n \times \Delta_{\tilde{n}}. \quad (2)$$

令 γ_1 为 \tilde{R}_ϵ 诱导的矩阵, 有

$$F = \{\gamma_1 Q^c \mu \gamma_1^T | \mu \in \Delta_m\} = \{\tilde{Q}_\epsilon^c | i \geq 1\}.$$

令 $\tilde{m} = |F|$, $\tilde{Q}^c = (\tilde{Q}_1^c, \tilde{Q}_2^c, \dots, \tilde{Q}_{\tilde{m}}^c)$. 定义控制关系矩阵 $\gamma^c \in \mathbb{L}^{\tilde{m} \times m}$: $[\gamma^c]_{ij} = 1$ 当且仅当 $\gamma^c \delta_m^j = \delta_{\tilde{m}}^i$, 且 $\gamma Q^c \delta_m^j \gamma^T = \tilde{Q}_m^c \delta_m^j, 1 \leq i \leq \tilde{m}, 1 \leq j \leq m$.

值得指出的是, 若输出控制集 Δ_m 只有一个元素, 则算法 1 ~ 算法 3 均适用于 CT-MCs. 下面说明 CT-MCs 与其商是 ϵ -向前-向后互相似的, 进而得出所构造的商是合理的.

命题 8 给定一个 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$, R_ϵ 为其 ϵ -互模拟且为等价关系, CT-CMC $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{Q}^c)$ 为由 $\text{ConSet}(R_\epsilon)$ 所诱导的商, 则式 (2) 定义的 \tilde{R}_ϵ 为 $(\Delta_n, \Delta_m, Q^c)$ 与 $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{Q}^c)$ 之间的 ϵ -向前-向后互模拟.

证明 对于 $(x, \tilde{y}) \in \tilde{R}_\epsilon, \mu \in \Delta_m, x \xrightarrow{\alpha\mu} x_1$, 有

$$\tilde{y} = \gamma_1 x, \text{ 且 } \tilde{y}_1 = \gamma_1 x_1, \tilde{\eta} = \gamma^c \mu. \quad (3)$$

由 \tilde{Q}^c 的定义, 可得 $\tilde{y}_1^T \tilde{Q}^c \tilde{\eta} \tilde{y} = \tilde{y}_1^T \gamma_1 Q^c (\gamma^c)^T \tilde{\eta} \gamma_1^T \tilde{y}$. 由式 (3) 可得 $x \in \gamma_1^T \tilde{y}, x_1 \in \gamma_1^T \tilde{y}_1, \mu \in (\gamma^c)^T \tilde{\eta}$. 从而, 由 $x \xrightarrow{\alpha\mu} x_1$ 可得 $\tilde{y} \xrightarrow{\alpha\tilde{\eta}} \tilde{y}_1$, 使得 $|\tilde{y}_1^T Q^c \mu x - \tilde{y}_1^T \tilde{Q}^c \tilde{\eta} \tilde{y}| \leq \epsilon, (x_1, \tilde{y}_1) \in \tilde{R}_\epsilon$. 类似地, 由 $x_1 \xrightarrow{\alpha\mu} x$ 可得 $\tilde{y}_1 \xrightarrow{\alpha\tilde{\eta}} \tilde{y}$. 同样的方法, 可证另一方向. \square

注 2 基于包含在极大等价近似向前-向后互模

拟的最大可控商集构造的 CT-CMCs 的商, 若其是可控的, 则近似向前-向后互模拟可保证可控商集之间的可控性, 可控商集可保证可控类中状态的可控性, 从而可得 CT-CMCs 是可控的. 以上结论将在下一节说明.

3.3 CT-CMCs 的渐近稳定性

下面先给出文献 [26] 中 CT-CMCs 的渐近稳定性的等价性定义, 再研究 CT-CMCs 的渐近稳定性.

定义 4 给定状态分布 $p_0 \in \mathbb{P}^n$, 称 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 渐近稳定于 p_0 , 如果对于任意状态分布 $p_1 \in \mathbb{P}^n$, 存在控制序列 $\mathcal{U}_0^t \subseteq \Delta_m$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\mathbf{p}(t; \mathcal{U}_0^t, p_1) \cap p_0 > 0\} = 1.$$

命题 9 令 R_ϵ 是 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 为等价关系的 ϵ -向前-向后互模拟, $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 为其商, 则对于任意 $\tilde{p}_0 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$, $t > 0$, 有

$$[\gamma_1 \mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma_1^T \tilde{p}_0)] = [\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)], \quad (4)$$

$$[\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma_1^T \tilde{p}_0)] = [\gamma_1^T \tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)]. \quad (5)$$

证明 有

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)] &= [e^{\tilde{\mathcal{Q}}^c \left(\sum_{i=0}^t \tilde{\mu}^i \right)} \tilde{p}_0] = \\ & \left[\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\tilde{\mathcal{Q}}^c \left(\sum_{i=0}^t \tilde{\mu}^i \right) \right)^s \right) \tilde{p}_0 \right] = \\ & \left[\left(\gamma_1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \gamma_1 \left(\gamma_1^T \tilde{\mathcal{Q}}^c \left(\sum_{i=0}^t \tilde{\mu}^i \right) \gamma_1 \right)^s \right) \gamma_1^T \tilde{p}_0 \right] = \\ & \left[\gamma_1 \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\mathcal{Q}^c \left(\sum_{i=0}^t (\gamma^c)^T \tilde{\mu}^i \right) \right)^s \right) \gamma_1^T \tilde{p}_0 \right] = \\ & [\gamma_1 e^{\mathcal{Q}^c \left(\sum_{i=0}^t (\gamma^c)^T \tilde{\mu}^i \right)} \gamma_1^T \tilde{p}_0] = \\ & [\gamma_1 \mathbf{p}(t, (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma_1^T \tilde{p}_0)]. \end{aligned}$$

同理 $[\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma_1^T \tilde{p}_0)] = [\gamma_1^T \tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)]$. \square

命题 10 给定 CT-CMCs $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 和 $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$, \tilde{R}_ϵ 是 $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 与 $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 之间的极大 ϵ -向前-向后互模拟, 对于任意 $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$, $t > 0$, 有

$$\mathbb{P}\{\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)\} = [\gamma^T \tilde{p}_0] \leq$$

$$\mathbb{P}\{\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)\} = [\tilde{p}_1].$$

证明 由 $[\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma^T \tilde{p}_0]$ 可得

$$[\gamma \mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\gamma \gamma^T \tilde{p}_0],$$

从而

$$[\gamma \mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)] = [\tilde{p}_0].$$

由式 (4) 可知 $\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0) = \tilde{p}_0$, 因此

$$\mathbb{P}\{\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)\} = [\gamma^T \tilde{p}_0] \leq$$

$$\mathbb{P}\{\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)\} = [\tilde{p}_1].$$

同理, 可得

$$\mathbb{P}\{\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)\} = [\gamma^T \tilde{p}_0] \geq$$

$$\mathbb{P}\{\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)\} = [\tilde{p}_1].$$

综上所述

$$\mathbb{P}\{\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_0)\} = [\gamma^T \tilde{p}_0] =$$

$$\mathbb{P}\{\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)\} = [\tilde{p}_1]. \quad \square$$

下面给出 CT-CMCs 是渐近稳定的, 当且仅当 CT-CMCs 的商是渐近稳定的.

定理 2 给定 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$, R_ϵ 为其 ϵ -互模拟且为等价关系, CT-CMC $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 为相应的商, $\tilde{p}_0 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$. CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 渐近稳定于 $\gamma^T \tilde{p}_0$, 当且仅当 CT-CMC $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 渐近稳定于 \tilde{p}_0 .

证明 对于任意 $\tilde{p}_1 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$, 由命题 10 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\mathbf{p}(t; (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma^T \tilde{p}_1)\} = [\gamma^T \tilde{p}_0] = 1,$$

当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\tilde{\mathbf{p}}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_1)\} = [\tilde{p}_0] = 1$. 故由定义 4 和命题 9, CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 渐近稳定于 $\gamma^T \tilde{p}_0$ 当且仅当 CT-CMC $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 渐近稳定于 \tilde{p}_0 . \square

3.4 CT-CMCs 的可控性

本部分先给出 CT-MCs 的渐近可控性的定义 [26], 再基于 ϵ -向前-向后互模拟研究 CT-CMCs 的可控性.

定义 5 [26] 给定 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$, 称状态 $x_1 \in \Delta_n$ 可从状态 x_0 以一定可能性渐近可达, 如果存在控制序列 $\tilde{\mathcal{U}}_0^t \subseteq \Delta_m$, 使得

$$x_1^T \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{p}(t; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, x_0) \right) > 0.$$

由于 CT-CMCs 的每个状态都是稳定状态的情况并不常见, 下面给出 CT-CMCs 的可控性是 CT-CMCs 商的可控性的充分必要条件.

定义 6 称 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 是以一定可能性渐近可控的, 如果对于任意状态对 $(x, z) \in \Delta_n \times \Delta_n$, 状态 z 从状态 x 以一定可能性渐近可达.

定理 3 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 为可控的当且仅当 CT-CMC $(\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_m, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 为可控的.

证明 (\Rightarrow) 假设 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 为可控的. 对于任意 $\tilde{p}_0 \in \mathbb{P}^{\tilde{n}}$, $\text{Row}_i(\tilde{p}_0) > 0$, $1 \leq i \leq \tilde{n}$. 对于 i , 存在 $1 \leq i_1 \leq n$, 使得 $\delta_n^i = \gamma \delta_n^{i_1}$, 即存在 $p_1 \in \gamma^T \tilde{p}_0$ 满足 $\text{Row}_{i_1}(p_1) > 0$. 对于任意 $1 \leq j \leq \tilde{n}$, 存在 $1 \leq i_2 \leq n$, 使得 $\delta_n^j = \gamma \delta_n^{i_2}$. 对于 i_2 , 因为 CT-CMC $(\Delta_n, \Delta_m, \mathcal{Q}^c)$ 为可控的, 所以存在 $t > 0$, $\mathcal{U}_0^t \subseteq \Delta_m$, 使得

$\text{Row}_{i_2}(\mathbf{p}(t, \mathcal{U}_0^t, p_1)) > 0$, 进而可得

$$\text{Row}_j(\gamma \mathbf{p}(t', \mathcal{U}_0^t, p_1)) > 0,$$

$$\text{Row}_j(\tilde{\mathbf{p}}(t', \gamma^c \mathcal{U}_0^t, \gamma p_1)) = \text{Row}_j(\tilde{\mathbf{p}}(t'; \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_0)) > 0.$$

(\Leftarrow) 假设 CT-CMC $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 为可控的. 对于任意 $p_0 \in \mathbb{P}^n$, 存在 $\text{Row}_{i_1}(p_0) > 0$. 对于 $1 \leq i_1 \leq n$, 存在 $1 \leq i_1 \leq \tilde{n}$, 使得 $\gamma \delta_n^i = \delta_{\tilde{n}}^{i_1}$, 存在 $\tilde{p}_1 = \gamma p_0$ 使得 $\text{Row}_{i_1}(\tilde{p}_1) > 0$. 对于任意 $1 \leq j \leq n$, 存在 $1 \leq i_2 \leq \tilde{n}$, 使得 $\gamma \delta_n^j = \delta_{\tilde{n}}^{i_2}$.

情形 1: 若 $i_1 \neq i_2$, 则由 $\text{Row}_{i_1}(\gamma p_0) = \text{Row}_{i_1}(\tilde{p}_1) > 0$, 可得 CT-CMC $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 为可控的, 所以对于 i_2 , 存在 $t > 0, \tilde{\mathcal{U}}_0^t \subseteq \Delta_{\tilde{m}}$, 使得 $\text{Row}_{i_2}(\tilde{\mathbf{p}}(t, \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \tilde{p}_1)) > 0$, 由式 (5) 可知, 存在 $p_2 \in \lfloor \gamma^T \tilde{\mathbf{p}}(t, \tilde{\mathcal{U}}_0^t, \gamma p_0) \rfloor = \lfloor \mathbf{p}(t, (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, p_0) \rfloor$, 使得 $\text{Row}_j(p_2) > 0$.

情形 2: 若 $i_1 = i_2$, 则由 CT-CMC $(\Delta_{\tilde{n}}, \Delta_{\tilde{m}}, \tilde{\mathcal{Q}}^c)$ 的构建和可控商集的定义可知, 存在 $t > 0, \tilde{\mathcal{U}}_0^t$, 使得存在 $p_2 \in \lfloor \mathbf{p}(t, (\gamma^c)^T \tilde{\mathcal{U}}_0^t, p_0) \rfloor > 0$ 满足 $\text{Row}_j(p_2) > 0$. \square

4 算例分析

本文考虑一个改编于文献 [18,26] 的生物学例子 p53-Mdm2, 它是蛋白质 p53 对 DNA 损伤反应的模型.

假设 p53-Mdm2 具有 4 个变量: 蛋白质 p53, 细胞质, 细胞核, DNA 损伤, 分别记为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 其分别取值于 $\Delta_3, \Delta_2, \Delta_2, \Delta_2$, 则 p53-Mdm2 具有 24 个状态; 设控制变量为 u, v , 在控制变量 u 下的状态转移由图 1 中粉色标记的有向边表示, 在控制变量 v 下的状态转移由蓝色标记的有向边表示. 其中有向边的标记表示转移速率. p53-Mdm2 模型可定义为 CT-CMC $\mathcal{M} = (\Delta_{24}, \Delta_2, \mathcal{Q}^c)$, 其中 Δ_{24} 为状态集, Δ_2 为控制变量集, \mathcal{Q}^c 为转移速率矩阵. 其转移速率由图 1 表示.

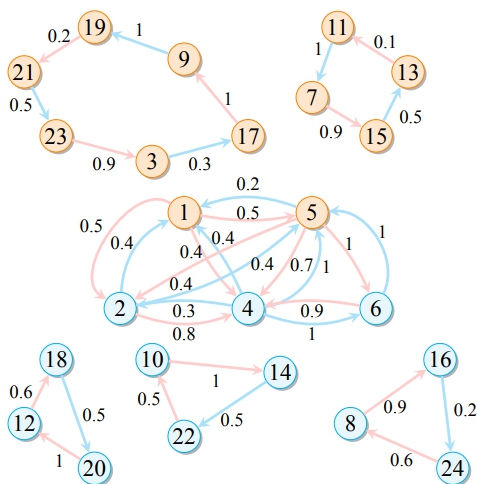


图1 CT-CMC $(\Delta_{24}, \Delta_2, \mathcal{Q}^c)$ 的 TRG

给定初始二元关系 $R_0 = \{S_1, \Delta_{24} \setminus S_1\}$, 其为 CT-CMC 状态集的划分, S_1 为图 1 中橙色点集, $\Delta_{24} \setminus S_1$ 为蓝色点集. 令 $\epsilon = 0.95$, 计算包含在 R_0 中为等价关系的极大 0.95-向前-向后互模拟, 进而得到极小的 CT-CMC 商. 由算法 1 可得 $R^0 = R_0$, 以及

$$R^1 = \{\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}, \{3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}\},$$

$$R^2 = \{\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}, \{3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}\},$$

由 $R^1 = R^2$ 可得输出为 R^1 , 从而包含在 R_0 中为等价关系的极大 0.9-向前-向后互模拟为 R^1 . 由算法 3 可得包含在 R^1 中为等价关系的极大可控商集为

$$\begin{aligned} \text{ConSet}(R^1) = & \\ & \{\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{8, 16, 24\}, \{10, 14, 22\}, \\ & \{12, 18, 20\}, \{3, 9, 17, 19, 21, 23\}, \\ & \{7, 11, 13, 15\}\}. \end{aligned}$$

而文献 [26] 中包含在等价关系 R_0 中的最大互模拟为

$$\begin{aligned} R' = & \\ & \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{8, 16, 24\}, \{10, 14, 22\}, \\ & \{12, 18, 20\}, \{3, 9, 17, 19, 21, 23\}, \\ & \{7, 11, 13, 15\}\}. \end{aligned}$$

基于 $\text{ConSet}(R^1)$ 构造的商 $\tilde{\mathcal{M}}_1 = (\Delta_7, \Delta_2, \tilde{\mathcal{Q}}_1^c)$ 和 \mathcal{M} 都不具有渐近稳定性和可控性; 由 $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ 诱导的子图及其商均具有渐近稳定性和可控性. 同理可得, 基于 R' 构造的商 $\tilde{\mathcal{M}}_2 = (\Delta_{11}, \Delta_2, \tilde{\mathcal{Q}}_2^c)$ 和 \mathcal{M} 在渐近稳定性和可控性方面具有一致性. 由此可得, 在商中点对应的原点集 (可控类) 诱导的子图均具有渐近稳定性和可控性的条件下, $\tilde{\mathcal{M}}_1$ 所含状态比 $\tilde{\mathcal{M}}_2$ 更少.

5 结论

本文基于近似互模拟研究了 CT-MCs 的约简问题, 给出了近似互模拟具有自反性和对称性, 关于交和并的封闭性. 对近似向前-向后互模拟进行了算法刻画. 基于近似互模拟构造了 CT-MCs 的商, 其与 CT-MCs 是近似互相相似的, 且在渐近稳定性方面具有一致性. 给出最大可控商集的算法刻画, 构造了 CT-CMCs 的商, 其与 CT-CMCs 是近似互相相似的, 且在渐近稳定性和可控性方面具有一致性.

下一步将对 CT-MCs 和 CT-CMCs 的近似互模拟、近似向前-向后互模拟进行固定点理论、模态逻辑刻画; 将以上工作推广到时变^[40] 或不确定^[27] CT-MCs 和 CT-CMCs.

参考文献 (References)

- [1] Gillespie D T. Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions[J]. *The Journal of physical chemistry*, 1977, 81(25): 2340-2361.
- [2] Hajiaghayi M, Kirkpatrick B, Wang L, et al. Efficient continuous-time Markov chain estimation[C]. *Proceedings of 31st International Conference on MachineLearning*. 2014: 638-646.
- [3] Kemeny J G, Snell J L. *Finite Markov chains*[M]. Berlin: Springer, 1976.
- [4] Aragon-GómezR B, Clempner J. Traffic-signalcontrol reinforcement learning approach for continuous-time Markov games[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, 89: 103415.
- [5] Allen L J. *An introduction to stochastic processes with applications to biology*[Z]. CRC Press, 2010.
- [6] Xu Z, Zhang H, Huang Z. A continuous Markov-chain model for the simulation of COVID-19 epidemic dynamics[J]. *Biology: Basel*, 2022, 11(2): 190.
- [7] Shmulevich I, Dougherty E R, Kim S, et al. Probabilistic Boolean Networks: A rule-based uncertainty model for gene regulatory networks[J]. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261-274.
- [8] 徐勇, 苟志丽, 王金环, 等. 布尔控制网络的集成集可控[J]. *控制与决策*, 2021, 36(9): 2187-2194. (Xu Y, Gou Z L, Wang J H, et al. Ensemble set controllability of Boolean control networks[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(9): 2187-2194.)
- [9] 冯俊娥, 赵荣, 孙菁涵, 等. 逻辑动态系统拓扑结构的多角度分析[J]. *控制与决策*, 2025, 40(9): 2625-2638. (Feng J E, Zhao R, Sun J H, et al. Multi-perspective analysis of topological structure of logical dynamical systems[J]. *Control and Decision*. 2025, 40(9): 2625-2638.)
- [10] Esmailirad S, Ghiasian A, Rabiee A. An extended M/M/K/K queueing model to analyze the profit of a multiservice electric vehicle charging station[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(4): 3007-3016.
- [11] Ortner R. Regret bounds for reinforcement learning via Markov chain concentration[J]. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2020, 67: 115-128.
- [12] Cheng X, Jin Z, Yang H L. Optimal insurance strategies: A hybrid deep learning Markov chain approximation approach[J]. *Astin Bulletin*, 2020, 50(2): 1-29.
- [13] Ching W K, Ng M K. *Markov chains: Models, algorithms and applications*[M]. New York: Springer, 2006.
- [14] Zhao Y, Cheng D Z. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks[J]. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(1): 1-14.
- [15] Guo Y Q, Zhou R, Wu Y, et al. Stability and set stability in distribution of probabilistic Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(2): 736-742.
- [16] Meng M, Xiao G, Cheng D. Self-triggered scheduling for Boolean control networks[J]. *IEEE Trans Cybern*, 2022, 52(9): 8911-8921.
- [17] Chen B, Cao J D, Lu G, et al. Lyapunov functions for the set stability and the synchronization of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 67(11): 2537-2541.
- [18] Guo Y Q, Li Z T, Liu Y, et al. Asymptotical stability and stabilization of continuous-time probabilistic logic networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(1): 279-291.
- [19] Zhu S Y, Li Y Y, Cao J D, et al. Lyapunov-type criteria of absorbing continuous-time Markov chains[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 67(4): 2422-2428.
- [20] Wang J, Feng J E, Yu Y Y, et al. Synchronous networks over finite fields[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(11): 6907-6912.
- [21] Xu Q, Zhang Z, Yan Y, et al. Security and privacy with k -step opacity for finite automata via a novel algebraic approach[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2021, 43(16): 3606-3614.
- [22] Li Z T, Guo Y Q, Gui W H. Asymptotical feedback controllability of continuous-time probabilistic logic control networks[C]. 2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation. Singapore, 2020: 1223-1228.
- [23] Li Z T, Guo Y Q, Gui W H. Asymptotical controllability of continuous-time probabilistic logic control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(4): 2769-2776.
- [24] Li R, Zhang Q, Chu T G. Reduction and analysis of Boolean control networks by bisimulation[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, 59(2): 1033-1056.
- [25] Li R, Zhang Q, Chu T G. Bisimulations of probabilistic Boolean networks[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, 6(5): 2631-2657.
- [26] Lin L, Cao J D, Lam J, et al. A bisimulation-based foundation for scale reductions of continuous-time Markov chains[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(9): 5743-5758.
- [27] Cardelli L, Grosu R, Larsen K G, et al. Algorithmic minimization of uncertain continuous-time Markov chains[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(11): 6557-6572.
- [28] Gao Z, Feng J E. Bisimulations of nonlinear feedback shift registers[J]. *International Journal of Control*, 2025, 98(1): 208-219.
- [29] Yang C, Li Y M. ϵ -bisimulation relations for fuzzy automata[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(4): 2017-2029.
- [30] Qiao S, Zhu P, Feng J E. Fuzzy bisimulations for

- nondeterministic fuzzy transition systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023, 31(7): 2450-2463.
- [31] Sun C L, Li H T. Parallel fuzzy relation matrix factorization towards algebraic formulation, universal approximation and interpretability of MIMO hierarchical fuzzy systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2022, 450: 68-86.
- [32] Cao Y Z, Sun S X, Wang H Q, et al. A behavioral distance for fuzzy-transition systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, 21(4): 735-747.
- [33] Girard A, Pappas G J. Approximate bisimulation: A bridge between computer science and control theory[J]. *European Journal of Control*, 2011, 17(5/6): 568-578.
- [34] Jansen D N, Groote J F, Timmers F, et al. A near-linear-time algorithm for weak bisimilarity on Markov chains[C]. *The 31st International Conference on Concurrency Theory*. Vienna, 2020, 8: 1-20.
- [35] Fatmi S Z, Kiefer S, Parker D, et al. Robust probabilistic bisimilarity for labelled Markov chains[J/OL]. 2025, arXiv: 2505.15290.
- [36] Lin N, Liu Y Y. Perturbation analysis for continuous-time Markov chains in a weak sense[J]. *Journal of Applied Probability*, 2024, 61(4): 1278-1300.
- [37] Spork T, Baier C, Kluppelholz, et al. Approximate probabilistic bisimulation for continuous-time Markov chains[J/OL]. 2025, arXiv: 2505.15587.
- [38] Zhou C L. Approximating bisimilarity for Markov processes[J]. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2013, 298: 427-440.
- [39] He K L, Wu H Y, Chen Y X. On divergence-sensitive weak probabilistic bisimilarity[J]. *Information and Computation*, 2023, 292: 105033.
- [40] 马颢洲, 刘冉. 基于时变马尔可夫链的在线医疗服务医生排班研究[J]. *控制与决策*, 2025, 40(4): 1172-1180. (Ma J Z, Liu R. A study of physician scheduling for online medical service system based on time-varying Markov chains[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(4): 1172-1180.)

作者简介

乔沙 (1989-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为不确定性近似推理, E-mail: sqiao@cup.edu.cn;

冯俊娥 (1971-), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为逻辑动态系统分析与控制, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn;

李景叶 (1978-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为地震储层预测与动态监测、智能地球物理技术与软件开发, E-mail: lijingye@cup.edu.cn.