

控制与决策

Control and Decision

多步随机观测滞后系统极大极小鲁棒Kalman估计

杨春山, 赵颖

引用本文:

杨春山, 赵颖. 多步随机观测滞后系统极大极小鲁棒Kalman估计[J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 93-100.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0397>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[Fal函数的改进及3种新型非线性扩张状态观测器](#)

Advanced fal function and three novel nonlinear extended state observers

控制与决策. 2021, 36(7): 1655-1662 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1652>

[有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制](#)

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

控制与决策. 2021, 36(3): 599-608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

[测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计](#)

Moving horizon estimation for stochastic uncertain system with missing measurements

控制与决策. 2021, 36(2): 450-456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0648>

[基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型](#)

Multi-component system state space partition model based on Markov process

控制与决策. 2021, 36(2): 418-428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

[基于向量集逆区间滤波的故障观测器设计](#)

Vector set inversion interval filtering based fault observer design

控制与决策. 2021, 36(12): 2973-2981 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0212>

多步随机观测滞后系统极大极小鲁棒 Kalman 估计

杨春山[†], 赵颖

(桂林航天工业学院 人工智能学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 研究具有不确定噪声方差和多步随机观测滞后系统的极大极小鲁棒 Kalman 估计问题. 采用一组概率已知的 Bernoulli 分布随机变量描述传感器到估值器的多步随机观测滞后; 利用 Hadamard 乘积改进虚拟噪声方法, 将原系统转化为仅带不确定虚拟噪声方差的系统; 基于极大极小鲁棒估计原理, 设计鲁棒稳态 Kalman 预报器、滤波器和平滑器; 利用 Lyapunov 方程方法、Geršgorin 圆盘定理和矩阵初等变换证明所设计估值器的鲁棒性, 即对所有容许的不确定性, 确保实际估计误差方差有最小上界, 并证明保守和实际估值器的精度关系. 最后通过 F-404 航空发动机系统仿真验证所提出方法的有效性.

关键词: 多步随机观测滞后; Hadamard 乘积; Lyapunov 方程; Geršgorin 圆盘定理; 极大极小鲁棒估计

中图分类号: O231.1 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0397

引用格式: 杨春山, 赵颖. 多步随机观测滞后系统极大极小鲁棒 Kalman 估计 [J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 93-100.

Minimax robust Kalman estimation for system with multistep random measurement delays

YANG Chun-shan[†], ZHAO Ying

(School of Artificial Intelligence, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: The minimax robust Kalman estimation problem is addressed for systems with uncertain noise variance and multistep random measurement delays. A set of Bernoulli distributed random variables with known probability is used to describe the multistep random measurement delays from sensors to estimators. The Hadamard product is used to improve the fictitious noise method, then the original system is converted into one only with uncertain fictitious noise variance. The robust steady-state Kalman predictor, filter and smoother are designed based on the minimax robust estimation principle. The robustness is proved using the Lyapunov equation method, Geršgorin circle theorem and matrix elementary transformation. For all admissible uncertainties, the actual estimation error variance is guaranteed to have minimal upper bound. The accuracy relation of conservative and actual estimators is proved. A simulation example of the F-404 aircraft engine system illustrates the effectiveness of the proposed method.

Keywords: multistep random measurement delays; Hadamard product; Lyapunov equation; Geršgorin circle theorem; minimax robust estimation

0 引言

在网络控制系统中随机滞后普遍存在, 如再入目标跟踪系统中, 复杂的传输网络及有限的信号处理能力极易引发随机观测滞后. 因此, 针对随机观测滞后系统开展状态估计问题研究非常必要且有意义^[1-2]. Kalman 滤波广泛应用于目标跟踪、卫星测控及多智能体系统状态估计等领域^[3-4]. 经典 Kalman 滤波要求噪声方差精确已知, 但不确定噪声方差系统在电气工程和航空航天等领域应用广泛.

针对系统噪声方差完全或部分未知的情形, 可

以设计自适应或自校正 Kalman 滤波器^[5-7]. 文献 [5] 引入自适应矩阵对观测噪声进行自适应调整和修正, 在确保滤波器不发散的前提下设计了自适应无迹 Kalman 滤波. 文献 [6] 利用相关方法辨识部分未知噪声统计, 提出了自校正解耦 Kalman 滤波器, 并利用动态误差系统分析方法证明其收敛性. 文献 [7] 针对未知模型参数和衰减观测率系统, 利用相关方法辨识描述衰减观测现象随机变量的统计信息, 设计了自校正滤波器. 自适应或自校正滤波器需要大量数据, 处理速度较慢, 且对网络随机不确定性敏

收稿日期: 2025-04-16; 录用日期: 2025-09-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62263009); 广西自然科学基金项目 (GXNSFAA069941, GXNSFAA069180).

责任编辑: 张文安.

[†]通信作者. E-mail: ycszy1999@guat.edu.cn.

$$\begin{aligned} D_a(t) &= B_a \theta_a(t), \\ B_a &= [H, \dots, H, I_m, \dots, I_m], \\ \theta_a(t) &= \text{diag}(\theta_0(t)I_n, \dots, \theta_d(t)I_n, \\ &\quad \theta_1(t)I_m, \dots, \theta_d(t)I_m). \end{aligned} \quad (11)$$

根据式(4), 随机变量 $\xi_k(t)$ 有统计特性

$$\begin{aligned} E[\xi_k(t)] &= \beta_k, \quad E[\xi_k^2(t)] = \beta_k, \\ E[(\xi_k(t) - \beta_k)^2] &= \beta_k(1 - \beta_k), \\ E[\xi_k(t)\xi_l(t)] &= \beta_k\beta_l, \quad k \neq l. \end{aligned} \quad (12)$$

根据式(6)和(12), 随机变量 $\theta_k(t)$ 有统计特性

$$\begin{aligned} E[\theta_0(t)] &= \bar{\theta}_0 = \beta_0; \\ E[\theta_k(t)] &= \bar{\theta}_k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \beta_i)\beta_k, \quad 1 \leq k \leq d; \\ E[(\theta_k(t) - \bar{\theta}_k)(\theta_l(t) - \bar{\theta}_l)] &= \begin{cases} \bar{\theta}_k(1 - \bar{\theta}_k), & k = l; \\ -\bar{\theta}_k\bar{\theta}_l, & k \neq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

因此, $\theta_a(t)$ 和 $D_a(t)$ 有统计特性

$$\begin{aligned} E[\theta_a(t)] &= \bar{\theta}_a = \\ &\text{diag}(\bar{\theta}_0 I_n, \dots, \bar{\theta}_d I_n, \bar{\theta}_1 I_m, \dots, \bar{\theta}_d I_m), \\ E[D_a(t)] &= H_a = B_a \bar{\theta}_a. \end{aligned} \quad (14)$$

定义偏差

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_k(t) &= \theta_k(t) - \bar{\theta}_k, \quad k = 0, 1, \dots, d, \\ \tilde{\theta}_a(t) &= \theta_a(t) - \bar{\theta}_a, \quad \tilde{D}_a(t) = D_a(t) - H_a. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_a(t) &= \\ &\text{diag}(\tilde{\theta}_0(t)I_n, \dots, \tilde{\theta}_d(t)I_n, \tilde{\theta}_1(t)I_m, \dots, \tilde{\theta}_d(t)I_m), \\ \tilde{D}_a(t) &= B_a \tilde{\theta}_a(t). \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 扩维系统(9)和(10)可进一步转化为

$$x_a(t+1) = \Phi_a x_a(t) + \Gamma_a w_a(t), \quad (16)$$

$$y(t) = H_a x_a(t) + v_a(t). \quad (17)$$

其中虚拟观测噪声 $v_a(t)$ 为

$$v_a(t) = \tilde{D}_a(t)x_a(t) + \theta_0(t)v(t). \quad (18)$$

引理 1^[11] Lyapunov 方程 $F = AFA^T + U$, 其中 A 为稳定矩阵. 如果 $U \geq 0$, 则方程存在唯一半正定解 $F \geq 0$.

引理 2^[16] $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ 是对角随机变量矩阵, $B \in \mathfrak{R}^n$ 是实矩阵, 则有

$$E[ABA^T] = \begin{bmatrix} E[a_1^2] & E[a_1 a_2] & \dots & E[a_1 a_n] \\ E[a_2 a_1] & E[a_2^2] & \dots & E[a_2 a_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[a_n a_1] & E[a_n a_2] & \dots & E[a_n^2] \end{bmatrix} \odot B.$$

引理 3^[17] 如果 A 和 B 是半正定矩阵, 则其 Hadamard 乘积 $A \odot B$ 是半正定矩阵.

引理 4 在假设 1 ~ 假设 3 下, 有:

1) $x(t)$ 的保守和实际稳态非中心二阶矩 X 和 \bar{X} 分别满足 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} X &= \Phi X \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \\ \bar{X} &= \Phi \bar{X} \Phi^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T. \end{aligned} \quad (19)$$

且 $\Delta X = X - \bar{X}$ 是半正定的, 即

$$\Delta X \geq 0. \quad (20)$$

2) $w_a(t)$ 的保守和实际的方差分别为

$$Q_a = \text{diag}(Q, R), \quad \bar{Q}_a = \text{diag}(\bar{Q}, \bar{R}). \quad (21)$$

且 $\Delta Q_a = Q_a - \bar{Q}_a$ 是半正定的, 即

$$\Delta Q_a \geq 0. \quad (22)$$

3) $x_a(t)$ 的保守和实际稳态非中心二阶矩 X_a 和 \bar{X}_a 分别满足 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} X_a &= \Phi_a X_a \Phi_a^T + \Gamma_a Q_a \Gamma_a^T, \\ \bar{X}_a &= \Phi_a \bar{X}_a \Phi_a^T + \Gamma_a \bar{Q}_a \Gamma_a^T. \end{aligned} \quad (23)$$

且 $\Delta X_a = X_a - \bar{X}_a$ 是半正定的, 即

$$\Delta X_a \geq 0. \quad (24)$$

4) $v_a(t)$ 的保守和实际的噪声方差分别为

$$\begin{aligned} R_a &= B_a(\Omega \odot X_a)B_a^T + \bar{\theta}_0 R, \\ \bar{R}_a &= B_a(\Omega \odot \bar{X}_a)B_a^T + \bar{\theta}_0 \bar{R}. \end{aligned} \quad (25)$$

实对称分块矩阵 Ω 的每个子块均是常数矩阵, 且 $\Delta R_a = R_a - \bar{R}_a$ 是半正定的, 即

$$\Delta R_a \geq 0. \quad (26)$$

$w_a(t)$ 和 $v_a(t)$ 的保守和实际的相关矩阵分别为

$$\begin{aligned} S_a &= [O_{m \times r} \quad \bar{\theta}_0 R]^T, \\ \bar{S}_a &= [O_{m \times r} \quad \bar{\theta}_0 \bar{R}]^T. \end{aligned}$$

证明 定义 $\Delta Q = Q - \bar{Q}$, $\Delta R = R - \bar{R}$. 由式(5)有

$$\Delta Q \geq 0, \quad \Delta R \geq 0.$$

将保守和实际系统状态 $x(t)$ 分别代入 $E[x(t)x^T(t)]$, 可得式(19). 由引理 1 易得不等式(20)成立. 类似可得式(21) ~ (24)成立.

将保守和实际的虚拟观测噪声 $v_a(t)$ 分别代入 $E[v_a(t)v_a^T(t)]$, 利用引理 2 和式(13)可得(25). 根据 Hadamard 乘积分配律, 可得

$$\Delta R_a = B_a(\Omega \odot \Delta X_a)B_a^T + \bar{\theta}_0 \Delta R.$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0)1_n & -\bar{\theta}_0\bar{\theta}_1 1_n & \dots & -\bar{\theta}_0\bar{\theta}_d 1_n & -\bar{\theta}_0\bar{\theta}_1 1_{n \times m} & \dots & -\bar{\theta}_0\bar{\theta}_d 1_{n \times m} \\ -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0 1_n & \bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1)1_n & \dots & -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_d 1_n & \bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1)1_{n \times m} & \dots & -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_d 1_{n \times m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_0 1_n & -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_1 1_n & \dots & \bar{\theta}_d(1-\bar{\theta}_d)1_n & -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_1 1_{n \times m} & \dots & \bar{\theta}_d(1-\bar{\theta}_d)1_{n \times m} \\ -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0 1_{m \times n} & \bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1)1_{m \times n} & \dots & -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_d 1_{m \times n} & \bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1)1_m & \dots & -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_d 1_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_0 1_{m \times n} & -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_1 1_{m \times n} & \dots & \bar{\theta}_d(1-\bar{\theta}_d)1_{m \times n} & -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_1 1_m & \dots & \bar{\theta}_d(1-\bar{\theta}_d)1_m \end{bmatrix}.$$

对 \$\Omega\$ 进行初等合同变换, 消去重复值并将非零元素交换至左上角, 可得

$$T_1 \Omega T_1^T = \text{diag}(\Omega^*, O_{n_a-d-1}), \quad T_1 = \prod_{i=1}^{n_a-1} U_i,$$

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0) & -\bar{\theta}_0\bar{\theta}_1 & \dots & -\bar{\theta}_0\bar{\theta}_d \\ -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0 & \bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1) & \dots & -\bar{\theta}_1\bar{\theta}_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_0 & -\bar{\theta}_d\bar{\theta}_1 & \dots & \bar{\theta}_d(1-\bar{\theta}_d) \end{bmatrix}.$$

其中: \$n_a = (n+m)d+n\$, \$U_i \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}\$ 是某种类型的非奇异初等矩阵. 现证明实对称矩阵 \$\Omega^*\$ 的半正定性.

如果 \$0 < \beta_k < 1\$, 则 \$0 < \bar{\theta}_k < 1\$. 由

$$1 - \sum_{k=0}^d \bar{\theta}_k = \prod_{k=0}^d (1 - \beta_k) > 0,$$

对于矩阵 \$\Omega^*\$ 的每个主对角元素, 有

$$\Omega_{ii}^* > \sum_{j=1, j \neq i}^{d+1} |\Omega_{ij}^*|, \quad i = 1, 2, \dots, d+1.$$

因此 \$\Omega^*\$ 是严格对角占优的. 由 Geršgorin 圆盘定理^[17] 可得, \$\Omega^*\$ 的所有特征值为正实数, 即 \$\Omega^* > 0\$.

如果 \$\beta_k = 0\$, 则由式 (13) 可知 \$\bar{\theta}_k = 0\$, 其所在的行和列的值均为零. 通过行列交换, \$\Omega^*\$ 变换为

$$T_2 \Omega^* T_2^T = \text{diag}(\Omega_1^*, 0),$$

其中 \$T_2 \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}\$ 是非奇异初等矩阵.

如果 \$\beta_k = 1\$, 由式 (13) 可知 \$\bar{\theta}_i = 0, i = k+1, \dots, d\$, 则 \$\Omega^* = \text{diag}(\Omega_2^*, O_{d-k})\$. 易知 \$\Omega_1^*\$ 或 \$\Omega_2^*\$ 也是严格对角占优的, 且主对角元素大于零的实对称矩阵, 则 \$\Omega_1^*\$ 或 \$\Omega_2^*\$ 是正定矩阵.

综合以上结果可得 \$\Omega^* \ge 0\$, 从而引出 \$\Omega \ge 0\$. 由式 (24) 和引理 3 可得不等式 (26) 成立. 将保守和实际的 \$w_a(t)\$ 和 \$v_a(t)\$ 代入 \$E[w_a(t)v_a^T(t)]\$, 可分别得到保守和实际的相关矩阵. \$\square\$

3 鲁棒稳态 Kalman 估值器

3.1 鲁棒稳态 Kalman 预报器

对于带虚拟噪声方差保守上界 \$Q_a, R_a\$ 和相关阵 \$S_a\$ 的最坏情形系统 (16) 和 (17), 在假设 1 ~ 假设 3 下, 基于极大极小鲁棒估计原理, 保守的 Kalman 一

步预报器为

$$\hat{x}_a(t+1|t) = \Psi_{pa} \hat{x}_a(t|t-1) + K_{pa} y(t), \quad (27)$$

$$\Psi_{pa} = \Phi_a - K_{pa} H_a, \quad Q_{\varepsilon a} = H_a P_a(-1) H_a^T + R_a, \\ K_{pa} = [\Phi_a P_a(-1) H_a^T + \Gamma_a S_a] Q_{\varepsilon a}^{-1}. \quad (28)$$

\$P_a(-1)\$ 满足保守的稳态 Riccati 方程

$$P_a(-1) = \Phi_a P_a(-1) \Phi_a^T - F_a Q_{\varepsilon a}^{-1} F_a^T + \Gamma_a Q_a \Gamma_a^T, \\ F_a = [\Phi_a P_a(-1) H_a^T + \Gamma_a S_a]^T. \quad (29)$$

注 2 在保守的一步预报器 (27) 中, 将保守的观测替换为实际观测, 可得实际的一步预报器.

定义预报误差 \$\tilde{x}_a(t+1|t) = x_a(t+1) - \hat{x}_a(t+1|t)\$. 将式 (16) 和 (27) 代入上式, 有

$$\tilde{x}_a(t+1|t) = \Psi_{pa} \tilde{x}_a(t|t-1) - \Gamma_a \eta(t). \quad (30)$$

其中扩维的噪声 \$\eta(t)\$ 和矩阵 \$\Gamma_a\$ 为

$$\eta^T(t) = [w_a^T(t) \quad v_a^T(t)], \quad \Gamma_a = [\Gamma_a \quad -K_{pa}].$$

由引理 4, \$\eta(t)\$ 的保守和实际的噪声方差分别为

$$M = \begin{bmatrix} Q_a & S_a \\ S_a^T & R_a \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_a & \bar{S}_a \\ \bar{S}_a^T & \bar{R}_a \end{bmatrix}, \quad (31)$$

则保守和实际的一步预报误差方差也分别满足

$$P_a(-1) = \Psi_{pa} P_a(-1) \Psi_{pa}^T + \Gamma_a M \Gamma_a^T, \\ \bar{P}_a(-1) = \Psi_{pa} \bar{P}_a(-1) \Psi_{pa}^T + \Gamma_a \bar{M} \Gamma_a^T. \quad (32)$$

基于一步预报器, 有保守和实际的多步预报器

$$\hat{x}_a(t|t+N) = \Phi_a^{-N-1} \hat{x}_a(t+N+1|t+N), \quad (33)$$

以及保守和实际的多步 (\$N \le -2\$) 预报误差方差

$$P_a(N) = \Phi_a^{-N-1} P_a(-1) \Phi_a^{-(N-1)T} + \\ \sum_{j=2}^{-N} \Phi_a^{-N-j} \Gamma_a Q_a \Gamma_a^T \Phi_a^{-(N-j)T}, \\ \bar{P}_a(N) = \Phi_a^{-N-1} \bar{P}_a(-1) \Phi_a^{-(N-1)T} + \\ \sum_{j=2}^{-N} \Phi_a^{-N-j} \Gamma_a \bar{Q}_a \Gamma_a^T \Phi_a^{-(N-j)T}. \quad (34)$$

3.2 鲁棒稳态 Kalman 滤波器和平滑器

基于 Kalman 一步预报器 \$\hat{x}_a(t|t-1)\$, 可得保守和实际 Kalman 滤波器 (\$N=0\$) 和平滑器 (\$N>0\$) 为

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t|t+N) &= \hat{x}_a(t|t-1) + \sum_{j=0}^N K_a(j)\varepsilon_a(t+j), \\ \varepsilon_a(t+j) &= y(t+j) - H_a\hat{x}_a(t+j|t+j-1), \\ K_a(j) &= P_a(-1)(\Psi_{pa}^T)^j H_a^T Q_{\varepsilon a}^{-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

保守和实际的滤波和平滑方差 $P_a(N)$ 、 $\bar{P}_a(N)$ 满足

$$\begin{aligned} P_a(N) &= \Psi_N P_a(-1) \Psi_N^T + \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}] M [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}]^T, \\ \bar{P}_a(N) &= \Psi_N \bar{P}_a(-1) \Psi_N^T + \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}] \bar{M} [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}]^T. \end{aligned} \quad (36)$$

当 $N > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \Psi_N &= I_{n_a} - \sum_{j=0}^N K_a(j) H_a \Psi_{pa}^j, \\ K_\rho^{vN} &= \sum_{j=\rho+1}^N K_a(j) H_a \Psi_{pa}^{j-\rho-1} K_{pa} - K_a(\rho), \\ K_\rho^{wN} &= - \sum_{j=\rho+1}^N K_a(j) H_a \Psi_{pa}^{j-\rho-1} \Gamma_a, \\ &\rho = 0, 1, \dots, N-1, \\ K_N^{vN} &= -K_a(N), K_N^{wN} = 0. \end{aligned}$$

当 $N = 0$ 时, 有

$$K_0^{v0} = -K_a(0), K_0^{w0} = 0, \Psi_0 = I_{n_a} - K_a(0)H_a.$$

定理 1 对于带虚拟噪声方差保守上界 Q_a 、 R_a 和相关阵 S_a 的最坏情形系统 (16) 和 (17), 在假设 1 ~ 假设 3 下, 实际 Kalman 一步预报器 (27)、多步预报器 (33)、滤波器和平滑器 (35) 是鲁棒的, 即对于所有容许的不确定性 (5), 有

$$\bar{P}_a(N) \leq P_a(N), N < 0 \text{ 或 } N \geq 0. \quad (37)$$

且 $P_a(N)$ 是 $\bar{P}_a(N)$ 的最小上界.

证明 定义

$$\Delta P_a(N) = P_a(N) - \bar{P}_a(N). \quad (38)$$

当 $N = -1$ 时, 由式 (32) 可得

$$\Delta P_a(-1) = \Psi_{pa} \Delta P_a(-1) \Psi_{pa}^T + \Gamma_\eta \Delta M \Gamma_\eta^T.$$

式中 $\Delta M = M - \bar{M}$ 分解为 $\Delta M = \sum_{i=1}^3 \Delta M_i$. 其中

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= \text{diag}(\Delta Q, \bar{\theta}_0 [\Delta R \quad \Delta R]^T [I_m \quad I_m]), \\ \Delta M_2 &= \text{diag}(O_{(r+m)}, B_a(\Omega \odot \Delta X_a) B_a^T), \\ \Delta M_3 &= \text{diag}(O_r, (1 - \bar{\theta}_0) \Delta R, O_m). \end{aligned}$$

易证得 $\Delta M \geq 0$. 则根据引理 1 可得

$$\Delta P_a(-1) \geq 0. \quad (39)$$

当 $N \leq -2$ 时, 由式 (34) 可得

$$\begin{aligned} \Delta P_a(N) &= \Phi_a^{-N-1} \Delta P_a(-1) \Phi_a^{(-N-1)T} + \\ &\sum_{j=2}^{-N} \Phi_a^{-N-j} \Gamma_a \Delta Q_a \Gamma_a^T \Phi_a^{(-N-j)T}. \end{aligned}$$

由式 (22) 和 (39), 可得不等式 (37) 对 $N \leq -2$ 成立.

当 $N \geq 0$ 时, 由式 (36) 可得

$$\begin{aligned} \Delta P_a(N) &= \Psi_N \Delta P_a(-1) \Psi_N^T + \\ &\sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}] \Delta M [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}]^T, \end{aligned}$$

则不等式 (37) 对 $N \geq 0$ 成立. $P_a(N)$ 是 $\bar{P}_a(N)$ 的最小上界, 证明类似文献 [12], 此略. \square

推论 1 根据 $x(t)$ 与 $x_a(t)$ 的关系, 原始系统 (1) ~ (3) 的鲁棒稳态 Kalman 估值器 ($N < 0$ 或 $N \geq 0$) 为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t+N) &= C_a \hat{x}_a(t|t+N), \\ C_a &= [I_{n_a} \quad O_{n \times n_a}]. \end{aligned} \quad (40)$$

保守和实际的估计误差方差为

$$P(N) = C_a P_a(N) C_a^T, \bar{P}(N) = C_a \bar{P}_a(N) C_a^T.$$

对于所有可容许的不确定性 (5), 有

$$\bar{P}(N) \leq P(N), N < 0 \text{ 或 } N \geq 0. \quad (41)$$

且 $P(N)$ 是实际方差阵 $\bar{P}(N)$ 的最小上界.

定理 2 对于带不确定噪声方差和多步随机观测滞后的不确定网络化系统 (1) ~ (3), 在假设 1 ~ 假设 3 下, 鲁棒稳态 Kalman 估值器有以下矩阵不等式精度关系:

$$\bar{P}(N) \leq P(N), N < 0 \text{ 或 } N \geq 0; \quad (42)$$

$$P(N) \leq \dots \leq P(0) \leq P(-1), N \geq 2. \quad (43)$$

以及矩阵迹不等式精度关系

$$\text{tr} \bar{P}(N) \leq \text{tr} P(N), N < 0 \text{ 或 } N \geq 0; \quad (44)$$

$$\text{tr} P(N) \leq \dots \leq \text{tr} P(0) \leq \text{tr} P(-1), N \geq 2. \quad (45)$$

证明 由定理 1 和推论 1, 易得不等式 (42) 成立. 保守的滤波和平滑器误差方差可写为

$$P(N) = C_a \left[P_a(-1) - \sum_{j=0}^N K_a(j) Q_{\varepsilon a}^{-1} K_a^T(j) \right] C_a^T,$$

由 $Q_{\varepsilon a} \geq 0$ 可得式 (43) 成立. 对式 (42) 和 (43) 取迹运算, 分别得到式 (44) 和 (45) 成立. \square

注 3 由式 (44) 给出的精度关系可以看出, 鲁棒精度 $\text{tr} P(N)$ 由保守的估计误差方差 $P(N)$ 确定, 而 $P(N)$ 由实际噪声方差的保守上界 Q 和 R 确定. 设计极大极小鲁棒 Kalman 估值器的一个关键问题便

是如何选择保守性较小的 Q 和 R , 以此获得较高的鲁棒精度. 保守上界意味着存在关系式 (5), 使所设计的估值器具有鲁棒性, 即 $\bar{P}(N) \leq P(N)$. 由于系统 (1) ~ (3) 中包含一组随机变量 $\xi_k(t), k = 0, 1, \dots, d$, 基于实际观测数据 $y(t)$, 不能直接辨识得到噪声方差, 但转换后的仅带不确定虚拟噪声方差的扩维系统 (16) 和 (17) 与原始系统等价. 利用系统辨识方法和实际观测数据给出的新息准则, 可以辨识和检验实际虚拟噪声方差的较小保守上界. 目前亟待解决两个问题: 一是随着系统 (16) 和 (17) 的维数增加, 提高了虚拟噪声方差辨识的计算复杂性; 二是搜索实际虚拟噪声方差的较小保守上界是一个带约束的高维最优化问题. 这是具有挑战性的有待研究的课题.

注 4 对于稳定的定常系统, 本文所设计的估值器是鲁棒的, 即对于所有可容许的不确定性 (不确定噪声方差和多步随机观测滞后), 确保实际估计误差方差有最小上界. 但对于不稳定系统, 如果观测数据到达的概率小于某个阈值, 则估计误差方差发散^[18]. 文献 [19] 进一步给出了系统矩阵的谱半径和观测数据到达的概率使估计误差方差有界的条件.

4 仿真实例

考虑 F-404 航空发动机系统^[14], 采样周期 $T_0 = 0.2$ s, 则离散线性系统模型为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.7575 & 0 & 0.3378 \\ 0.0257 & 0.9231 & -0.0527 \\ 0.0432 & 0 & 0.6504 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.2 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

其中: $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 表示水平位置, $x_3(t)$ 表示飞行高度. 军事环境下, 传感器和传输网络易受到干扰和攻击, 发动机监控系统中易出现随机滞后等不确定性. 仿真中, 最大滞后步数 $d = 2$, 其他参数取为 $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \text{diag}(1.8, 0.5)$, $\bar{Q} = \text{diag}(1.4, 0.4)$, $R = \text{diag}(0.9, 10)$, $\bar{R} = \text{diag}(0.7, 9)$, $\beta_0 = 0.85$, $\beta_1 = 0.90$, $\beta_2 = 0.88$.

表 1 给出了鲁棒 Kalman 估值器 $\hat{x}(t|t+N)$ 的实际和鲁棒精度, 验证了精度关系 (44) 和 (45) 是正

表1 鲁棒稳态 Kalman 估值器的实际和鲁棒精度

$\text{tr}P(-2)$	$\text{tr}P(-1)$	$\text{tr}P(0)$	$\text{tr}P(1)$	$\text{tr}P(2)$
2.5740	2.2391	1.8334	1.4708	1.2734
$\text{tr}\bar{P}(-2)$	$\text{tr}\bar{P}(-1)$	$\text{tr}\bar{P}(0)$	$\text{tr}\bar{P}(1)$	$\text{tr}\bar{P}(2)$
2.0168	1.7574	1.4433	1.1604	1.0061

确的.

图 1 给出了各状态分量 $x_i(t)(i = 1, 2, 3)$ 的一步平滑估值, 实线和虚线分别表示实际状态及其一步平滑估计.

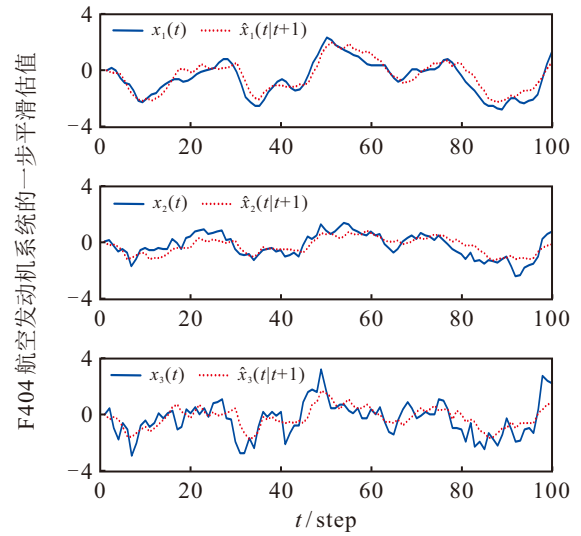


图1 F404 航空发动机系统的一步平滑估值效果图

取 Monte Carlo 仿真次数为 5000, 鲁棒 Kalman 估值器的均方误差曲线 $\text{MSE}_{(N)}(t)$ 如图 2 所示, 其中 $N = -1, 0, 1$ 分别表示一步预报器、滤波器和一步平滑器的 MSE 值, 直线表示实际精度 $\text{tr}\bar{P}(N)$. 可以看到, 均方误差曲线贴近于相应的实际精度, 这验证了采样实际方差的一致性.

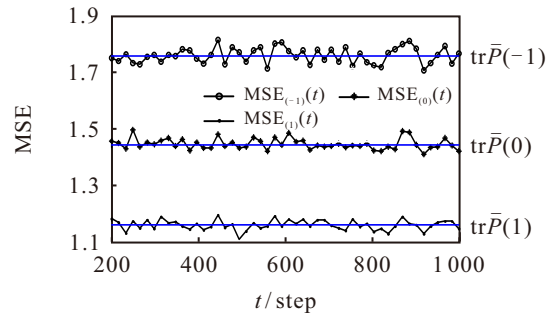


图2 鲁棒 Kalman 估值器的 MSE 曲线

式 (4) 中, 概率 β_k 值越高, 表明发生观测滞后的概率越小, 则估计精度越高. 定义不同滞后率情形:

- 1) $\beta_0 = 1$ 时, $y(t) = z(t)$. 估值器准时收到传感器观测, 没有发生滞后^[11].
- 2) $0.1 \leq \beta_0 \leq 1, \beta_1 = 1$ 时, 发生一步滞后^[13], 此时估值器收到的观测为

$$y(t) = \xi_0(t)z(t) + (1 - \xi_0(t))z(t - 1).$$

- 3) $0.1 \leq \beta_0, \beta_1 \leq 1, \beta_2 = 1$, 发生两步滞后^[14-15], 此时估值器收到的观测为

$$y(t) = \xi_0(t)z(t) + (1 - \xi_0(t))\xi_1(t)z(t - 1) + (1 - \xi_0(t))(1 - \xi_1(t))z(t - 2).$$

4) $0.1 \leq \beta_0 \leq 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$, 没有发生滞后但有数据包丢失. 估值器收到的观测为

$$y(t) = \xi_0(t)z(t).$$

图3中, $\text{tr}P^l(N)$ ($l = a, b, c, d$) 表示以上不同滞后率情形的预报器 ($N = -1$, 蓝色曲线)、滤波器 ($N = 0$, 红色曲线) 和平滑器 ($N = 1$, 绿色曲线) 的鲁棒精度.

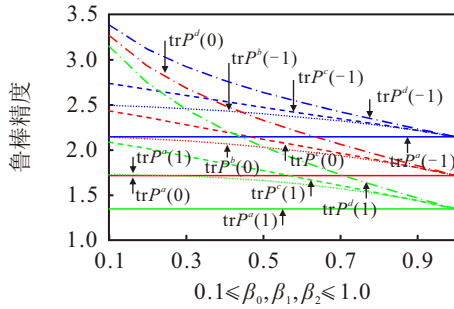


图3 $0.1 \leq \beta_0, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ 时的鲁棒精度变化

由图3可以看到, 情形1) 没有发生滞后, 相应估值器的鲁棒精度 $\text{tr}P^a(N)$ ($N = -1, 0, 1$) 最高且是定值. 其他3种情形中, $\text{tr}P^l(N)$ ($l = b, c, d$) 随着 β_k 的增加而变小, 即鲁棒精度逐渐提高, 直至达到 $\text{tr}P^a(N)$. 也可以看到, 情形2) 的鲁棒精度高于情形3) 和情形4). 因为情形2) 发生了一步滞后, 情形3) 发生了两步滞后. 情形4) 中估值器收到的观测以 $1 - \beta_0$ 的概率丢失, 其鲁棒精度最低, 验证了所提出方法的有效性.

进一步考虑不确定噪声方差的影响, 定义

$$\bar{Q} = \alpha Q, \bar{R} = \alpha R,$$

$$\beta = [1 - \beta_0, 1 - \beta_1, 1 - \beta_2], \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

α 反映了实际噪声方差在可容许范围内的变化, β 反映了随机滞后出现的概率. 图4给出了实际精度 $\text{tr}\bar{P}(1)$ 随 $0.1 \leq \alpha, \beta \leq 0.9$ 变化的情况. 可以看到, 图形颜色从绿色渐变到浅黄色, 表示 $\text{tr}\bar{P}(1)$ 随着 α 和 β 的增加而增加.

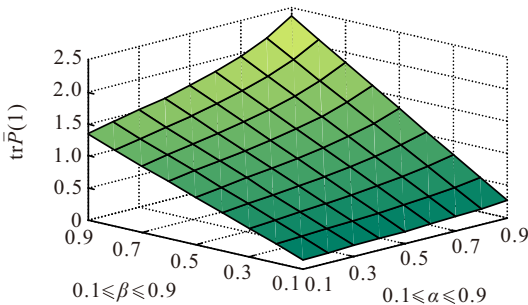


图4 鲁棒平滑器实际精度 $\text{tr}\bar{P}(1)$ 随 $0.1 \leq \alpha, \beta \leq 0.9$ 变化

将本文方法与文献[20]最优鲁棒估计方法进行对比. 表2给出了本文方法的实际精度与文献[20]最优精度的比较.

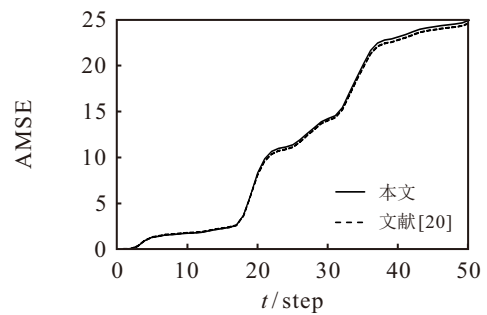
表2 两种方法的稳态估计精度比较

两种方法的精度	本文实际精度	文献[20]最优精度
两步预报器	2.016 8	1.833 4
一步预报器	1.757 4	1.756 5
滤波器	1.443 3	1.442 2
一步平滑器	1.160 4	1.159 4
两步平滑器	1.006 1	1.005 2

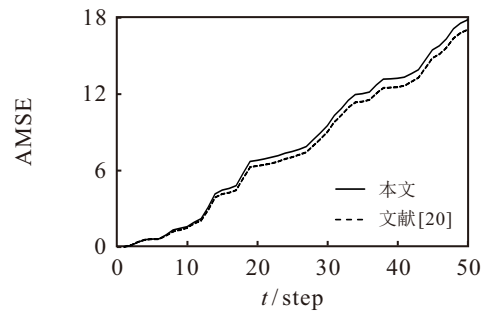
滤波器各状态分量的累计 MSE (AMSE) 为

$$\text{AMSE}^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^t \text{MSE}^{(i)}(j), \quad i = 1, 2, 3,$$

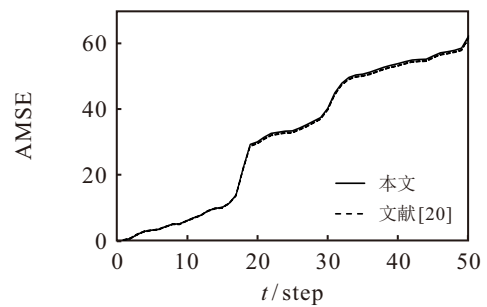
其中 i 为第 i 个状态分量. Monte Carlo 仿真次数取 5 000, 两种方法状态分量的 $\text{AMSE}^{(i)}(t)$ 比较见图5.



(a) 第1状态分量



(b) 第2状态分量



(c) 第3状态分量

图5 两种方法的滤波器 $\text{AMSE}^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 比较

从表2和图5可以看出, 对于所有容许的不确定性, 本文方法虽可确保实际估计误差方差有最小上界, 即所设计的估值器具有鲁棒性, 但实际精度略低于文献[20]的最优滤波精度.

5 结论

本文考虑了多步随机观测滞后系统极大极小鲁棒 Kalman 估计问题. 利用 Hadamard 乘积在多维数

据处理的灵活性,改进虚拟噪声方法,避免了多步随机观测滞后系统中虚拟噪声的自相关性.以Lyapunov方程为基础,利用Geršgorin圆盘定理判断对称矩阵的半正定性,完成鲁棒性证明.本文将极大极小鲁棒估计方法的研究^[11-15]推广至具有多步随机观测滞后情形,无滞后^[11]、一步滞后^[13]和两步滞后^[14-15]的观测模型可以作为特例获得.下一步将探索解决噪声方差较小保守上界的辨识和检验问题.

参考文献 (References)

- [1] 郭戈, 贾二娜. 网络化控制系统中的延时问题: 分析与展望[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 1-6.
(Guo G, Jia E N. Delays in networked control systems: Analysis and preview[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 1-6.)
- [2] Lin H L, Sun S L. Estimator for multirate sampling systems with multiple random measurement time delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(3): 1589-1596.
- [3] 尤志鹏, 杨勇, 刘刚, 等. 基于 Kalman 滤波的空天飞行器再入制导算法[J]. 航空学报, 2021, 42(11): 524608.
(You Z P, Yang Y, Liu G, et al. Reentry guidance algorithm based on Kalman filter for aerospace vehicles[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(11): 524608.)
- [4] 秦家虎, 马麒超, 李曼, 等. 多智能体协同研究进展综述: 博弈和控制交叉视角[J]. 自动化学报, 2025, 51(3): 489-509.
(Qin J H, Ma L Q, Li M, et al. Recent advances on multi-agent collaboration: A cross-perspective of game and control theory[J]. Acta Automatica Sinica, 2025, 51(3): 489-509.)
- [5] 袁常顺, 王俊, 向洪, 等. 非线性量测下自适应噪声协方差 PHD 滤波[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(1): 53-60.
(Yuan C S, Wang J, Xiang H, et al. Adaptive noise covariance PHD filter under nonlinear measurement[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(1): 53-60.)
- [6] 孙小君, 张鹏, 邓自立. 基于 Riccati 方程的自校正解耦融合 Kalman 滤波器[J]. 控制与决策, 2008, 23(2): 195-199.
(Sun X G, Zhang P, Deng Z L. Self-tuning decoupled fusion Kalman filter based on Riccati equation[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 195-199.)
- [7] 段广全, 孙书利. 带未知模型参数和衰减观测率系统自校正分布式融合估计[J]. 自动化学报, 2021, 47(2): 423-431.
(Duan G Q, Sun S L. Self-tuning distributed fusion estimation for systems with unknown model parameters and fading measurement rates[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(2): 423-431.)
- [8] 王子赟, 张帅, 占雅聪, 等. 基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(1): 127-134.
(Wang Z Y, Zhang S, Zhan Y C, et al. Orthotopic double filtering based state estimation algorithm[J]. Control and Decision, 2022, 37(1): 127-134.)
- [9] Wang R S, Chen B, Yu L. Distributed nonlinear fusion estimation without knowledge of noise statistical information: A robust design approach[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2021, 57(5): 3107-3117.
- [10] Zhang H S, Zhang D, Xie L H, et al. Robust filtering under stochastic parametric uncertainties[J]. *Automatica*, 2004, 40(9): 1583-1589.
- [11] Qi W J, Zhang P, Deng Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensor system with uncertain noise variances[J]. *Information Sciences*, 2014, 282: 15-37.
- [12] Yang C S, Yang Z B, Deng Z L. Robust weighted state fusion Kalman estimators for networked systems with mixed uncertainties[J]. *Information Fusion*, 2019, 45: 246-265.
- [13] Ran C J, Deng Z L. Robust integrated covariance intersection fusion Kalman estimators for networked systems with random measurement delays, multiplicative noises, and uncertain noise variances[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020, 34(11): 1697-1725.
- [14] Yang C S, Zhao Y, Liu Z. Robust weighted fusion Kalman filters under linearly correlated noise and mixed uncertainties of noise variances, multiplicative noises, and multiple networked inducements[J]. *Asian Journal of Control*, 2024, 26(1): 205-226.
- [15] Yang C S, Zhao Y, Liu Z, et al. Robust weighted fusion Kalman estimators for systems with uncertain noise variances, multiplicative noises, missing measurements, packets dropouts and two-step random measurement delays[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2023, 44(5): 2744-2774.
- [16] Hu J, Wang Z D, Liu S, et al. A variance-constrained approach to recursive state estimation for time-varying complex networks with missing measurements[J]. *Automatica*, 2016, 64: 155-162.
- [17] Roger H A, Charles R J. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012: 387-485.
- [18] Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453-1464.
- [19] Plarre K, Bullo F. On Kalman filtering for detectable systems with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 386-390.
- [20] Sun S L, Xiao W D. Optimal linear estimators for systems with multiple random measurement delays and packet dropouts[J]. *International Journal of Systems Science*, 2013, 44(2): 358-370.

作者简介

杨春山 (1975-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为网络化系统鲁棒估计、多传感器信息融合, E-mail: ycszy1999@guat.edu.cn;

赵颖 (1975-), 女, 高级工程师, 硕士, 主要研究方向为网络化系统鲁棒估计、多传感器信息融合, E-mail: zycs1999@guat.edu.cn.