

# 控制与决策

Control and Decision

## 符号网络下具有竞争领导者的包围控制

路张昕, 关永强, 康龙, 何永喜

引用本文:

路张昕, 关永强, 康龙, 等. 符号网络下具有竞争领导者的包围控制[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 246-256.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0440>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于观测器的网络化多智能体预测控制

Observer-based networked multi-agent predictive control

控制与决策. 2021, 36(9): 2290-2296 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1801>

#### 基于零和博弈的多智能体网络鲁棒包容控制

Robust containment control of multi-agent networks based on zero-sum game

控制与决策. 2021, 36(8): 1841-1848 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1348>

#### 基于影响度介数中心性的多智能体牵制控制算法

Multi-agent pinning control algorithm based on betweenness centrality with influence degree

控制与决策. 2021, 36(6): 1442-1448 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1106>

#### 一种要素双模糊的限制交流结构合作博弈方法及应用

An allocation model of limited communication structure cooperative game with dual fuzzy elements

控制与决策. 2021, 36(2): 475-482 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1048>

#### 考虑供应商技术截断的“主-供”合作机制演化博弈分析

Evolutionary game analysis of “main manufacturer-supplier” collaboration mechanism considering supplier's technology truncation

控制与决策. 2021, 36(10): 2547-2552 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1678>

# 符号网络下具有竞争领导者的包围控制

路张昕, 关永强<sup>†</sup>, 康龙, 何永喜

(西安电子科技大学机电工程学院, 西安 710071)

**摘要:** 针对符号网络下的离散多智能体系统, 基于领导者-跟随者框架, 研究具有竞争领导者的包围控制问题. 首先, 构建一种非合作博弈模型, 将两组具有竞争关系的领导者作为参与博弈的两个玩家, 每个玩家的目标是调整策略以吸引跟随者, 从而尽可能缩小跟随者与自身最终状态之间的距离. 其次, 分析该博弈的相关性质并提出玩家优化自身利益的策略方法, 即领导者通过合理选择跟随者并增加正边或负边使得跟随者的最终状态更加靠近自身的最终状态. 此外, 针对结构平衡网络, 揭示玩家收益与两个胞腔内的跟随者及其连接边数目之间的关系. 特别地, 针对有向树图, 从图论角度出发, 提出判断玩家策略是否为纳什均衡解的方法. 最后, 通过数值仿真实例验证所得理论结果的有效性.

**关键词:** 离散多智能体系统; 符号网络; 包围控制; 非合作博弈; 竞争领导者; 纳什均衡

**中图分类号:** TP13 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2025.0440

**引用格式:** 路张昕, 关永强, 康龙, 等. 符号网络下具有竞争领导者的包围控制 [J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 246-256.

## Containment control with competitive leaders under signed networks

LU Zhang-xin, GUAN Yong-qiang<sup>†</sup>, KANG Long, HE Yong-xi

(College of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** This paper investigates the containment control problem of signed networks with competitive leaders for discrete-time multi-agent systems under the leader-follower framework. Firstly, a non-cooperative game model is formulated, where two groups of competitive leaders are regarded as two players in the game. Each player aims to adjust its strategy to attract followers, thereby minimizing the distance between the followers' final states and its own. Secondly, the properties of the game are analyzed, and a strategic approach is proposed for players to optimize their interests where leaders can strategically select followers and add positive or negative edges to steer followers' final states closer to their own. Furthermore, for structurally balanced networks, the relationship between players' payoffs and the number of followers and connecting edges within two cells is revealed. Specifically, for the directed tree graph, a graph-theoretic method is proposed to determine whether a player's strategy constitutes a Nash equilibrium solution. Finally, numerical simulation examples are provided to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

**Keywords:** discrete-time multi-agent systems; signed networks; containment control; non-cooperative game; competitive leaders; Nash equilibrium

## 0 引言

近年来, 人工智能技术飞速发展, 已成为推动经济增长和社会进步的关键动力. 作为人工智能研究的一个重要方向, 多智能体协同控制受到不同领域专家学者的广泛关注. 相较于传统的集中式控制, 多智能体协同控制在鲁棒性、可扩展性、自适应性等方面存在巨大优势, 广泛应用于无人机集群编队控制<sup>[1]</sup>、分布式传感器网络信息融合<sup>[2]</sup>等多个领域.

在多智能体协同控制的研究中, 领导者-跟随者

框架具有广泛的应用性和普适性, 其中领导者设定控制目标, 跟随者对领导者的状态进行跟踪, 最终整个系统协作完成控制任务. 通常, 根据系统中领导者的数目不同, 协同控制研究主要分为3类: 1) 在无领导者的多智能体系统中, 所有智能体之间通过信息交互实现共同目标, 最终状态达到一致, 即一致性问题<sup>[3]</sup>; 2) 在具有单个领导者的多智能体系统中, 跟随者的最终状态收敛到领导者的最终状态, 即领导者-跟随者一致性问题<sup>[4]</sup>; 3) 在具有多个领导者的多智

收稿日期: 2025-04-25; 录用日期: 2025-08-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62073253, 62036002, 52305553).

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: guan-jq@163.com.

能体系统中,通过设计合理的分布式协议,所有跟随者的最终状态进入到由领导者的最终状态张成的凸包内,实现对跟随者的包围,即包围控制问题<sup>[5]</sup>。

目前,多智能体协同控制的相关研究主要针对于无符号网络,即智能体之间是合作交互关系。然而现实社会中对抗交互无处不在,如网络安全领域中的红蓝双方对抗关系<sup>[6]</sup>;分布式机器人系统中个体间的排斥和吸引作用<sup>[7]</sup>。2013年,Altafini在文献[8]中研究了符号网络下的二分一致性问题,利用符号网络刻画了智能体之间的合作与对抗关系,并给出实现二分一致性的充要条件;文献[9]针对符号网络研究了二分包围控制问题,证明跟随者的最终状态收敛到由领导者动态轨迹及其对称轨迹所张成的凸包内;针对离散时间下的一般线性系统,文献[10]对文献[9]进一步扩展,提出了分布式降阶观测器型协议,分析并设计合理的控制参数实现了该系统的包围控制。

值得注意的是,上述协同控制相关问题的研究主要关注于如何设计恰当的交互协议,实现对多智能体系统集体行为的精确调控。在实际应用中,智能体作为自主决策单元,通常要求具有高度的智能性以及自主感知、决策和执行能力。然而,在完成协同控制任务时,由于智能体的自主性,不同智能体通常具有不同的控制目标。此时,每个智能体都热衷于追求自身利益的最大化,彼此之间存在利益冲突,这使得多智能体协同控制研究更加具有挑战性。博弈论作为研究竞争与合作行为的理论,为分析和解决协同控制中智能体之间的利益冲突和竞争行为提供了有力工具。近年来,已有学者利用博弈论解决了具有竞争关系领导者的多智能体协同控制问题,例如文献[11-12]分别针对具有两个和多个领导者的多智能体系统,构建了非合作博弈模型并提出均衡拓扑的概念,利用矩阵论和图论等分析得到交互拓扑成为均衡拓扑的充要条件;文献[13]研究了Friedkin-Johnsen网络中的多领导者竞争问题,提出了一种纳什均衡求解算法;文献[14]将两个领导者对跟随者的权重分配竞争建模为非零和博弈,提出了两种纳什均衡求解算法;文献[15]将传统包围控制问题重构为图博弈模型,建立全局纳什均衡求解框架,通过博弈视角处理了多智能体系统中的分布式优化问题;文献[16]将包围控制模型应用于社交观点引导,提出了由常规智能体去中心化获取群体领导者所设定目标分布的框架,使得普通个体能够最大化实现期望分配;文献[17]构建了信息传播模型并研究了两个顽固智能体之间的竞争问题,利用零和博弈理论

给出了该博弈实现纳什均衡的充要条件。

不可忽视的是,上述研究大多聚焦于无符号网络,即智能体之间为合作关系。事实上,兼具合作和竞争特性的符号网络能够更加精确地模拟现实系统,但目前针对符号网络利用博弈论研究具有竞争领导者的协同控制问题的成果鲜有报道。受此启发,本文针对符号网络下的离散多智能体系统,利用博弈理论研究具有多个竞争领导者的包围控制问题,主要工作如下:

1) 基于领导者-跟随者框架,针对具有离散时间动力学的多智能体系统,构建非合作博弈模型,将两组具有竞争关系的领导者作为参与博弈的玩家,每个玩家的目标是调整自身策略以吸引跟随者,从而尽可能缩小跟随者与自身最终状态之间的距离。与文献[11-14]相比,本文考虑的符号网络能够更真实地模拟实际系统中的竞争交互场景,应用范围更广;同时考虑到两组领导者之间存在信息交互,普适性更强;此外,相较于连续时间系统,离散时间模型更贴近实际通信网络的采样特性,能够有效模拟通信信号的异步传输特性,适用场景更全面。

2) 分析该博弈的相关性质并提出玩家优化自身利益的决策策略。从拓扑结构角度出发,证明当存在领导者到跟随者根顶点的有向路径时,该博弈等价于双人零和博弈;领导者通过合理选择跟随者并增加正边或负边可以使跟随者最终状态更加靠近自身最终状态。相较于无符号网络下的连续时间系统,符号网络下的离散时间系统中收益矩阵具有负权重且变化更加复杂,为博弈均衡的分析和求解带来新的挑战。本文所提分析方法较现有方法(文献[12]性质4、文献[17]定理3)更加具体,不同于现有方法中跟随者的任意选择机制,本文根据跟随者对应的拓扑结构特征进行合理判断,为玩家提供更精准的策略调整依据,从而合理优化自身利益。

3) 针对结构平衡网络,将跟随者划分为两组,分析得到玩家收益之比与两组跟随者数目以及跟随者之间负边数目的关系。与文献[17]仅考虑领导者与跟随者的连接边权重符号为正的情况相比,本文考虑的情况更加广泛,结果更具有一般性。特别地,针对有向树图,给出判断策略是否为纳什均衡解的方法,与文献[12]中考虑的无符号有向树相比,即使两个玩家的策略都包含跟随者连接拓扑的根顶点,博弈也不一定达到纳什均衡,该结论揭示了网络拓扑中符号属性对博弈均衡的重要影响,为博弈分析提供新的理论见解。

## 1 预备知识

### 1.1 符号介绍

令  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{N}$  分别表示实数,  $n$  维实向量,  $n \times n$  阶实数矩阵和自然数的集合. 符号  $\mathcal{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .  $I_m = [e_1, e_2, \dots, e_m]$  表示  $m$  阶的单位矩阵, 其中  $e_i \in \mathbb{R}^m (i = 1, 2, \dots, m)$  表示单位基向量.  $1_n(0_n)$  表示所有分量都为 1(0) 的  $n$  维列向量;  $|\mathcal{S}|$  表示集合  $\mathcal{S}$  的基数,  $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2$  表示集合  $\mathcal{S}_1$  与  $\mathcal{S}_2$  的差集;  $|x|$  表示  $x \in \mathbb{R}$  的绝对值; 符号  $\mathbf{0}$  表示阶数适配的零矩阵; 对于向量  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{diag}\{b\}$  表示一个  $n \times n$  的对角矩阵, 其对角元素是  $b$  的分量,  $\text{sign}(b)$  表示向量  $b$  的符号函数; 对于矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $A_{i,j}$  表示  $A$  的第  $i$  行、第  $j$  列的元素,  $A_{i,:}$  和  $A_{:,j}$  分别表示矩阵  $A$  的第  $i$  行和第  $j$  列, 当  $A_{i,j} \geq 0 (A_{i,j} > 0)$  时, 称  $A$  是非负 (正) 矩阵, 记作  $A \geq 0 (A > 0)$ .

### 1.2 图论知识

考虑有向符号图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ . 其中:  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  和  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  分别表示顶点集和边集;  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示邻接矩阵,  $a_{ij} = 1$  表示正边,  $a_{ij} = -1$  表示负边. 对于边  $(v_j, v_i)$ ,  $v_j$  为  $v_i$  的父顶点,  $v_i$  为  $v_j$  的子顶点.  $\mathcal{N}_{v_i} = \{j \in \mathcal{I}_n | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$  表示节点  $v_i$  的邻点集,  $\mathcal{N}_i^+ = \{j \in \mathcal{I}_n | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}, a_{ij} > 0, i \neq j\}$  表示节点  $v_i$  的正邻点集,  $\mathcal{N}_i^- = \{j \in \mathcal{I}_n | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}, a_{ij} < 0, i \neq j\}$  表示节点  $v_i$  的负邻点集. 图  $\mathcal{G}$  中  $v_i$  到  $v_j$  的有向路径是由不同顶点  $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$  组成的序列. 其中:  $v_i = v_{i_0}, v_j = v_{i_m}, (v_{i_r}, v_{i_{r+1}}) \in \mathcal{E}, 0 \leq r \leq m - 1$ . 如果对于  $\forall v_i, v_j \in \mathcal{V}, i \neq j$ , 均存在一条从  $v_i$  开始, 到  $v_j$  结束的有向路径, 则称图  $\mathcal{G}$  是强连通的, 此时称  $v_j$  为  $v_i$  的可达节点, 记为  $v_j \in \mathcal{R}(i)$ , 其中  $\mathcal{R}(i) \subseteq \mathcal{V}$  为  $v_i$  的可达集. 顶点  $v_i$  的入度和出度分别表示为  $d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  和  $d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^n |a_{ji}|$ . 给定一个符号图  $\mathcal{G}$ , 如果存在一个顶点  $v_i$ , 使得  $\mathcal{G}$  从  $v_i$  到  $v_j (v_j \in \mathcal{V}, j \neq i)$  都有路径, 则称  $\mathcal{G}$  包含一个生成树; 若  $\mathcal{G}$  是基于  $v_i$  的连通无环图, 则称  $\mathcal{G}$  是一个有向树图,  $v_i$  是根顶点. 对于符号图  $\mathcal{G}_s = (\mathcal{V}_s, \mathcal{E}_s, \mathcal{A}_s)$ , 如果  $\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{V}, \mathcal{E}_s \subseteq \mathcal{E}$ , 则称  $\mathcal{G}_s$  为  $\mathcal{G}$  的子图,  $\mathcal{G}_s$  的邻点集记作  $\mathcal{N}_{\mathcal{G}_s} = \{v_j | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}, \forall v_i \in \mathcal{V}_s, \forall v_j \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_s\}$ .

**定义 1<sup>[8]</sup>** 给定一个符号图  $\mathcal{G}$ , 若  $\mathcal{V}$  能被划分为互不相交的两个子集  $\mathcal{V}_1$  和  $\mathcal{V}_2$ , 即  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ , 且满足

$$a_{ij} \begin{cases} \geq 0, & v_i, v_j \in \mathcal{V}_q, q \in \{1, 2\}; \\ \leq 0, & v_i \in \mathcal{V}_q, v_j \in \mathcal{V}_r, q \neq r, q, r \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

则称  $\mathcal{G}$  是结构平衡的,  $\mathcal{V}$  被划分为  $\mathcal{V}_1$  和  $\mathcal{V}_2$  两个胞腔.

### 1.3 零和博弈

令  $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$  表示一个双人有限零和博弈, 其中  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$  表示玩家集. 玩家  $\mathcal{P}_1$  和  $\mathcal{P}_2$  的有限策略集分别为  $\mathcal{S}_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  和  $\mathcal{S}_2 = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_j\}$ , 则  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ; 当玩家  $\mathcal{P}_1$  选择策略  $s_i \in \mathcal{S}_1$ , 玩家  $\mathcal{P}_2$  选择策略  $s'_j \in \mathcal{S}_2$  时, 所构成的纯策略对为  $(s_i, s'_j)$ , 此时玩家  $\mathcal{P}_1$  和  $\mathcal{P}_2$  的收益分别记为  $u_1(s_i, s'_j)$  和  $u_2(s_i, s'_j)$ ,  $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$  表示收益集合.

**引理 1<sup>[18]</sup>** 在博弈  $\mathcal{G}$  中, 对于  $\forall (s_1, s'_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ , 如果  $u_1(s_1, s'_2) + u_2(s_1, s'_2) \equiv c$ , 其中  $c$  表示一个固定常数, 则  $\mathcal{G}$  等价于双人有限零和博弈.

## 2 模型构建

### 2.1 网络模型

考虑一个由  $n$  个具有一阶离散时间动力学的智能体组成的系统, 智能体之间的通信交互采用符号图  $\mathcal{G}$  描述, 智能体  $v_i$  的动力学描述如下:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k), i \in \mathcal{I}_n, k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

其中:  $x_i(k), u_i(k) \in \mathbb{R}$  分别表示智能体  $v_i$  在  $k$  时刻的状态和控制输入.

**定义 2<sup>[10]</sup>** 给定一个符号图  $\mathcal{G}$ , 定义矩阵  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 其中: 对  $\forall v_i \in \mathcal{V}, w_{ii} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| / \left( 2 \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$ ,  $w_{ij} = a_{ij} / \left( 2 \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), j \neq i, \sum_{j=1}^n |w_{ij}| = 1, a_{ij} \in \mathbb{R}$  表示智能体  $v_i$  与  $v_j$  之间的信息交互权重.

对于智能体  $v_i (i \in \mathcal{I}_n)$ , 设计如下控制协议:

$$u_i(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}_{v_i}} w_{ij} [x_j(k) - \text{sign}(w_{ij}) x_i(k)]. \quad (2)$$

**定义 3<sup>[9]</sup>** 给定一个符号图  $\mathcal{G}$ , 若智能体  $v_i$  包含在  $\mathcal{G}$  的某个强连通子图  $\mathcal{G}_s$  中, 且  $\mathcal{N}_{\mathcal{G}_s} = \emptyset$ , 则称  $\mathcal{G}_s$  中所有节点对应的智能体为领导者, 否则为跟随者.

不失一般性, 假设  $\mathcal{G}$  中前  $m$  个智能体  $\mathcal{V}_l = \{v_i | i \in L\}$  为领导者, 其交互关系用  $\mathcal{G}_l$  表示, 其余智能体  $\mathcal{V}_f = \{v_j | j \in F\}$  为跟随者, 其交互关系用  $\mathcal{G}_f$  表示. 其中:  $L \cup F = \mathcal{I}_n, L \cap F = \emptyset, |L| = m, |F| = n - m$ .

**假设 1**  $\mathcal{G}_l$  是强连通的, 每个跟随者至少存在一条从领导者到该节点的有向路径.

此时  $\mathcal{V}_l$  被划分为两个互不相交的子集  $\mathcal{V}_{l_1} = \{v_i | i \in L_1\}$  和  $\mathcal{V}_{l_2} = \{v_j | j \in L_2\}$ , 且满足  $L = L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2 = \emptyset, |L_1| = m_1, |L_2| = m_2$ , 分别用  $\mathcal{G}_{l_1}, \mathcal{G}_{l_2}$  表示其交互关系. 根据定义 3 可将矩阵  $\mathcal{A}$  划分为

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_{lf} & \mathcal{A}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{l_1} & \mathcal{A}_{l_2 l_1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_{l_1 l_2} & \mathcal{A}_{l_2} & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_{l_1 f_1} & \mathcal{A}_{l_2 f_2} & \mathcal{A}_f \end{bmatrix}.$$

其中:  $\mathcal{A}_{l_g} \in \mathbb{R}^{m_g \times m_g}$  和  $\mathcal{A}_f \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  分别表示  $\mathcal{G}_{l_g}$  和  $\mathcal{G}_f$  的邻接矩阵,  $\mathcal{A}_{l_1 l_2}$  和  $\mathcal{A}_{l_2 l_1}$  描述了  $\mathcal{V}_{l_1}$  与  $\mathcal{V}_{l_2}$  之间的通信交互关系,  $\mathcal{A}_{l_1 f_g} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m_g}$  描述了  $\mathcal{V}_{l_g}$  与  $\mathcal{V}_f$  之间的通信交互关系,  $g = 1, 2$ .

进一步, 将矩阵  $\mathcal{W}$  划分为

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_l & \mathbf{0} \\ \mathcal{W}_{lf} & \mathcal{W}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{l_1} & \mathcal{W}_{l_2 l_1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{W}_{l_1 l_2} & \mathcal{W}_{l_2} & \mathbf{0} \\ \mathcal{W}_{l_1 f_1} & \mathcal{W}_{l_2 f_2} & \mathcal{W}_f \end{bmatrix}.$$

其中:  $\mathcal{W}_l \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathcal{W}_f \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $\mathcal{W}_{lf} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $\mathcal{W}_{l_1 l_2} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m_g}$ ,  $g = 1, 2$ .

对应地, 图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}$  表示为

$$\mathcal{L} = I_n - \mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_l & \mathbf{0} \\ \mathcal{L}_{lf} & \mathcal{L}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - \mathcal{W}_l & \mathbf{0} \\ -\mathcal{W}_{lf} & I_{n-m} - \mathcal{W}_f \end{bmatrix}.$$

其中:  $\mathcal{L}_l \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathcal{L}_f \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $\mathcal{L}_{lf} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ .

令  $x(k+1) = [x_1(k+1), x_2(k+1), \dots, x_n(k+1)]^T \in \mathbb{R}^n$ , 则系统 (1) 在协议 (2) 下可重写为

$$x(k+1) = (I_n - \mathcal{L})x(k). \quad (3)$$

令  $x(k+1) = [x_l^T(k+1), x_f^T(k+1)]^T$ ,  $x_l(k+1) = [x_1(k+1), x_2(k+1), \dots, x_m(k+1)]^T$ ,  $x_f(k+1) = [x_{m+1}(k+1), x_{m+2}(k+1), \dots, x_n(k+1)]^T$ . 此时系统 (3) 可重写为

$$\begin{cases} x_l(k+1) = (I_m - \mathcal{L}_l)x_l(k), \\ x_f(k+1) = (I_{n-m} - \mathcal{L}_f)x_f(k) - \mathcal{L}_{lf}x_l(k). \end{cases} \quad (4)$$

**定义 4**<sup>[10]</sup> 对于系统 (3), 如果跟随者智能体最终状态满足形式

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [|x_j(k)| - \max_{i \in L} |x_i(k)|] \leq 0, \quad j \in F, \quad (5)$$

则称该系统实现二分包围控制.

**引理 2**<sup>[19]</sup> 设  $P$  是一个非负 primitive 矩阵, 对于其满足  $Pp_r = p_r$ ,  $p_l^T P = p_l^T$  的左特征向量  $p_l$  和右特征向量  $p_r$ , 若  $p_r^T p_l = 1$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = p_r p_l^T$ .

**引理 3** 令假设 1 成立, 则系统 (3) 中的领导者最终状态实现了二分一致.

**证明** 因为  $\mathcal{G}_l$  是强连通结构平衡图, 所以存在一个 Gauge 变换矩阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  使得  $\mathcal{L}_{|l|} = D\mathcal{L}_l D$  是行和为 0 的对角占优矩阵且  $\mathcal{L}_{|l|}$  是  $\mathcal{G}_l$  对应的无符号图的拉普拉斯矩阵. 其中:  $d_i = 1$ ,  $i \in L_1$ ,  $d_i = -1$ ,  $i \in L_2$ . 已知  $\mathcal{W}_l = I_m - \mathcal{L}_l$ , 则  $|\mathcal{W}_l| = I_m - \mathcal{L}_{|l|}$ ,  $|\mathcal{W}_l|$  为非负矩阵. 又因为  $|\mathcal{W}_l| \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m$

$-\mathcal{L}_{|l|} \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m$ , 则  $|\mathcal{W}_l|$  的行和为 1 且向量  $\mathbf{1}_m$  是特征值  $\lambda_1 = 1$  对应的右特征向量. 当  $\mathcal{G}_l$  是强连通时,  $\mathcal{L}_{|l|}$  是不可约矩阵, 其所有特征值均非负且 0 是其代数重数为 1 的特征值, 此时  $|\mathcal{W}_l|$  不可约且存在一个代数重数为 1 的特征值 1. 进而根据盖尔圆盘定理可得  $\lambda_i(|\mathcal{W}_l|) \leq 1$ , 即  $|\mathcal{W}_l|$  仅有一个模为 1 的极大特征值, 故  $|\mathcal{W}_l|$  是一个非负 primitive 矩阵. 令  $v$  是  $|\mathcal{W}_l|$  的一个非零左特征向量且满足  $\mathbf{1}_m^T v = 1$ , 由引理 2 可知  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{W}_l|^k = \mathbf{1}_m v^T$ . 又  $\bar{x}_l(k) = |\mathcal{W}_l|^k \bar{x}_l(0)$ , 则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_l(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} D \bar{x}_l(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} D |\mathcal{W}_l|^k D x_l(0) = D \mathbf{1}_m v^T D x_l(0)$ . 因此, 对于  $a \in L_1$ ,  $b \in L_2$ , 存在  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) = -\lim_{k \rightarrow \infty} x_b(k)$ , 即系统 (3) 中的领导者的最终状态实现了二分一致.  $\square$

**引理 4**<sup>[10]</sup> 令假设 1 成立, 则  $I_{n-m} - \mathcal{W}_f$  的所有特征值均具有正实部,  $\mathcal{W}_f$  的所有特征值的模值都小于 1 且  $(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \mathcal{W}_{lf}$  中每一行元素的绝对值之和不大于 1.

**引理 5** 令假设 1 成立, 则系统 (3) 实现包围控制.

**证明** 记  $z(k) \triangleq x_f(k) + \mathcal{L}_f^{-1} \mathcal{L}_{lf} x_l(k)$ . 由式 (3) 和 (4) 可得

$$\begin{aligned} z(k+1) &= x_f(k+1) + \mathcal{L}_f^{-1} \mathcal{L}_{lf} x_l(k+1) = \\ &= (I_{n-m} - \mathcal{L}_f) x_f(k) - \mathcal{L}_{lf} x_l(k) + \\ &= \mathcal{L}_f^{-1} \mathcal{L}_{lf} (I_m - \mathcal{L}_l) x_l(k) = \\ &= (I_{n-m} - \mathcal{L}_f) z(k) - \mathcal{L}_f^{-1} \mathcal{L}_{lf} \mathcal{L}_l x_l(k). \end{aligned}$$

由引理 3 可知,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}_l x_l(k) = v^T D x_l(0) D^{-1}$ .  $[D \mathcal{L}_l D^{-1}] = 0$ , 又由引理 4 可知  $\mathcal{W}_f$  的所有特征值的模均小于 1, 因此  $I_{n-m} - \mathcal{W}_f$  是舒尔稳定矩阵, 根据输入-状态稳定定理<sup>[20]</sup> 可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} z(k) = 0$ , 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = -\mathcal{L}_f^{-1} \mathcal{L}_{lf} x_l(k) = (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \mathcal{W}_{lf} x_l(k). \quad \square$$

## 2.2 博弈模型

对于多智能体系统 (3), 建立如下博弈模型  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ :

1) 玩家: 令  $\mathcal{V}_{l_1}$  和  $\mathcal{V}_{l_2}$  为参与博弈的两个玩家, 即  $\mathcal{P} = \{\mathcal{V}_{l_1}, \mathcal{V}_{l_2}\}$ .

2) 策略: 玩家  $\mathcal{V}_{l_g}$  独立选择  $\mathcal{V}_f$  中的跟随者最多通过  $m$  条边进行连接, 即玩家  $\mathcal{V}_{l_g}$  策略集为  $S_g \triangleq \{s_g | s_g = \mathcal{A}_{l_1 f_g} \mathbf{1}_{m_g} = [s_{g1}, s_{g2}, \dots, s_{g(n-m)}]^T, 1 \leq \sum_{i=1}^{n-m} |\mathcal{A}_{l_1 f_g}| \mathbf{1}_{m_g} \leq m\}$ ,  $g = 1, 2$ , 其中  $s_{g_i}$  表示  $\mathcal{V}_{l_g}$  对跟随者  $v_i \in \mathcal{V}_f$  影响的总和.

3) 收益: 玩家  $\mathcal{V}_{l_g}$  的收益函数定义为  $u_g(s_1, s_2) \triangleq \sum_{j \in F} \chi_{jg}$ , 其中  $\chi_{jg}$  表示跟随者  $v_j$  的最终状态与  $\mathcal{V}_{l_g}$

中的领导者的最终状态之间的距离。

**注 1**  $u_g(s_1, s_2)$  表示所有跟随者与玩家  $\mathcal{V}_g$  最终状态之间的距离之和, 在  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  中, 玩家  $\mathcal{V}_g$  旨在最大化自身影响力, 其策略目标是 minimized 所有跟随者与自身之间的距离。

**定义 5**<sup>[14]</sup> 在双人有限零和博弈  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  中, 对于  $\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ , 如果  $(s_1^*, s_2^*)$  满足形式

$$\begin{cases} u_1(s_1^*, s_2^*) \leq u_1(s_1, s_2^*), \\ u_2(s_1^*, s_2^*) \leq u_2(s_1^*, s_2), \end{cases}$$

则称  $(s_1^*, s_2^*)$  是该博弈的纳什均衡解。

### 3 主要结论

#### 3.1 博弈的纳什均衡

**性质 1** 对于  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ , 当  $\mathcal{G}_l$  是强连通的结构平衡图, 且  $\mathcal{G}_f$  中包含一个生成树时, 玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  和  $\mathcal{V}_{l_2}$  的收益之和不小于  $2(n-m)|x^*(k)|$ . 其中:  $|x^*(k)| = |\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)| = |\lim_{k \rightarrow \infty} x_b(k)|$ ,  $a \in L_1, b \in L_2$ .

**证明** 当  $\mathcal{G}_f$  中包含一个生成树时, 可知  $\mathcal{G}_f$  存在一个根顶点集, 不失一般性, 假设  $\mathcal{G}_f$  的根顶点集为  $\mathcal{V}_{f_r} = \{v_i | i \in F_r\}$ ,  $\mathcal{G}_f$  的非根顶点集为  $\mathcal{V}_{f_{n_r}} = \{v_j | j \in F_{n_r}\}$ , 且  $F = F_r \cup F_{n_r}$ ,  $F_r \cap F_{n_r} = \emptyset$ ,  $|F_r| = n_r$ ,  $|F_{n_r}| = n - m - n_r$ . 此时  $\mathcal{A}_{l_{f_g}} = [\mathcal{A}_{l_{f_{g_r}}}, \mathcal{A}_{l_{f_{g_{n_r}}}}]^T$ ,  $\mathcal{A}_{l_{f_{g_r}}} \in \mathbb{R}^{n_r \times m_g}$ ,  $\mathcal{A}_{l_{f_{g_{n_r}}}} \in \mathbb{R}^{(n-m-n_r) \times m_g}$ ,  $s_g = [s_{g_r}, s_{g_{n_r}}]^T$ ,  $s_{g_r} \in \mathbb{R}^{n_r}$ ,  $s_{g_{n_r}} \in \mathbb{R}^{(n-m-n_r)}$ . 下面根据领导者的选择和跟随者最终状态的可能性, 分 3 种情况进行讨论。

**情况 1** 当  $s_{1_r}^* \neq 0$  或者  $s_{2_r}^* \neq 0$  时, 假设 1 成立. 此时, 由引理 5 可知, 对于  $\forall j \in F$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) \in [-|x^*(k)|, |x^*(k)|]$ , 即  $\mathcal{V}_f$  中智能体的最终状态轨迹会被约束在由  $\mathcal{V}_{l_1}$  和  $\mathcal{V}_{l_2}$  状态轨迹所张成的对称区间内, 且这两条轨迹的模相等但是符号相反, 因此  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\alpha_j x_a(k) + \beta_j x_b(k)]$ , 其中

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n]^T = (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \mathcal{W}_{l_{f_1}} \mathbf{1}_{m_1}, \\ \beta &= [\beta_{m+1}, \dots, \beta_n]^T = (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \mathcal{W}_{l_{f_2}} \mathbf{1}_{m_2}. \end{aligned}$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 记跟随者  $v_j$  的最终状态与  $\mathcal{V}_{l_1}$  和  $\mathcal{V}_{l_2}$  中领导者最终状态之间的距离分别为  $\chi_{j1}$  和  $\chi_{j2}$ , 即

$$\begin{cases} \chi_{j1} \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} |(1 - \alpha_j)x_a(k) - \beta_j x_b(k)|, \\ \chi_{j2} \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} |(1 - \beta_j)x_b(k) - \alpha_j x_a(k)|, \end{cases} \quad (6)$$

则  $\chi_{j1} + \chi_{j2} = 2|x^*(k)|$ , 此时  $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 2(n-m)|x^*(k)|$ .

**情况 2** 当  $s_{1_r}^* = s_{2_r}^* = 0$ , 对于  $\forall j \in F$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) \in [-|x^*(k)|, |x^*(k)|]$  时, 证明同情况 1.

**情况 3** 当  $s_{1_r}^* = s_{2_r}^* = 0$  且至少存在一个跟随者  $v_j \in \mathcal{V}_f$  使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) \notin [-|x^*(k)|, |x^*(k)|]$  时, 如果  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) > |x^*(k)|$ , 则  $\chi_{j1} + \chi_{j2} = (\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) - |x^*(k)|) + (\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) + |x^*(k)|) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) > 2|x^*(k)|$ ; 同理, 如果  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) < -|x^*(k)|$ , 则  $\chi_{j1} + \chi_{j2} = 2|\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k)| > 2|x^*(k)|$ , 此时  $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) > 2(n-m)|x^*(k)|$ .

综上所述, 对于所有  $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ , 均有  $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) \geq 2(n-m)|x^*(k)|$  成立, 即对于  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ , 玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  与  $\mathcal{V}_{l_2}$  的收益之和不小于  $2(n-m)|x^*(k)|$ .  $\square$

**性质 2** 令假设 1 成立, 博弈  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  满足如下性质:

- 1)  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  等价于零和博弈;
- 2)  $\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ , 若  $s_1 = s_2$ , 则  $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2)$ , 且对于  $\forall j \in F$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) = 0$ ;
- 3) 对于所有  $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ,  $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ .

**证明** 1) 当假设 1 成立时, 由性质 1 的情况 1 可知, 对于  $\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ,  $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 2(n-m)|x^*(k)|$ . 此时由引理 1 可知,  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  等价于零和博弈。

2) 由式 (6) 的构造比例系数  $\rho_{s_1 s_2}$  来描述玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  的收益在总收益中的占比, 用于反应其在  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  中的相对竞争优势, 其中

$$\begin{aligned} \rho_{s_1 s_2} &\triangleq \frac{u_1(s_1, s_2)}{u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2)} = \\ &\sum_{j \in F} \frac{|\alpha_j - \beta_j - 1|}{2} = \\ &\frac{\mathbf{1}_{n-m}^T [(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} (\mathcal{W}_{l_{f_1}} \mathbf{1}_{m_1} - \mathcal{W}_{l_{f_2}} \mathbf{1}_{m_2}) - \mathbf{1}_{n-m}]}{2(n-m)}. \end{aligned}$$

对于  $\forall g = 1, 2$ , 记  $\zeta_g \triangleq (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \mathcal{W}_{l_{f_g}} \mathbf{1}_{m_g} = [\zeta_{g1}, \zeta_{g2}, \dots, \zeta_{g_{n-m}}]^T$ , 由引理 4 可知, 对于  $\forall j \in F$ ,  $|\zeta_{1j}| + |\zeta_{2j}| \leq 1$ , 则  $\zeta_{1j} - \zeta_{2j} \leq |\zeta_{1j} - \zeta_{2j}| \leq |\zeta_{1j}| + |\zeta_{2j}| \leq 1$ , 即  $|(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} (\mathcal{W}_{l_{f_1}} \mathbf{1}_{m_1} - \mathcal{W}_{l_{f_2}} \mathbf{1}_{m_2})| \leq \mathbf{1}_{n-m}$ . 因此

$$\rho_{s_1 s_2} = \frac{\mathbf{1}_{n-m}^T [\mathbf{1}_{n-m} - (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} (\mathcal{W}_{l_{f_1}} \mathbf{1}_{m_1} - \mathcal{W}_{l_{f_2}} \mathbf{1}_{m_2})]}{2(n-m)}.$$

此时,  $\mathcal{V}_{l_1}$  和  $\mathcal{V}_{l_2}$  的收益函数可被重写为  $u_1(s_1, s_2) = 2(n-m)\rho_{s_1 s_2}|x^*(k)|$ ,  $u_2(s_1, s_2) = 2(n-m)(1 - \rho_{s_1 s_2})|x^*(k)|$ . 当  $s_1 = s_2$  时,  $\mathcal{W}_{l_{f_1}} \mathbf{1}_{m_1} = \mathcal{W}_{l_{f_2}} \mathbf{1}_{m_2}$ , 所以  $\rho_{s_1 s_2} = \frac{1}{2}$ , 则对于  $\forall j \in F$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) = 0$ .

3) 由性质 2 中 2) 可知  $u_1(s_1, s_2) = 2(n-m)\rho_{s_1 s_2}$

·|x\*(k)|, u<sub>2</sub>(s<sub>2</sub>, s<sub>1</sub>) = 2(n-m)(1-ρ<sub>s<sub>2</sub>s<sub>1</sub></sub>)|x\*(k)|. 又有  

$$\rho_{s_1 s_2} = \frac{1_{n-m}^T [1_{n-m} - (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} (\mathcal{W}_{l_{f_1}} 1_{m_1} - \mathcal{W}_{l_{f_2}} 1_{m_2})]}{2(n-m)},$$
  

$$\rho_{s_2 s_1} = \frac{1_{n-m}^T [1_{n-m} - (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} (\mathcal{W}_{l_{f_2}} 1_{m_2} - \mathcal{W}_{l_{f_1}} 1_{m_1})]}{2(n-m)} =$$
  
 1-ρ<sub>s<sub>1</sub>s<sub>2</sub></sub>, 则对于所有 (s<sub>1</sub>, s<sub>2</sub>) ∈ S<sub>1</sub> × S<sub>2</sub>, u<sub>1</sub>(s<sub>1</sub>, s<sub>2</sub>) = u<sub>2</sub>(s<sub>2</sub>, s<sub>1</sub>). □

**注2** 在G<sub>l<sub>1</sub>l<sub>2</sub></sub>中, 玩家V<sub>l<sub>1</sub></sub>的策略目标是最小化ρ<sub>s<sub>1</sub>s<sub>2</sub></sub>, 而玩家V<sub>l<sub>2</sub></sub>的策略目标是最大化ρ<sub>s<sub>1</sub>s<sub>2</sub></sub>. 这种博弈可以用来阐明一些关于社交网络和工程实践中的现象, 例如在企业间的相互竞争中, 企业通过广告投放争夺消费者占比, 消费者的购买偏好会因营销强度动态变化; 在多机器人协作系统中, 两组任务分配中心通过通信链路吸引机器人优先执行自身任务, 争夺机器人资源分配.

**定理1** 给定G<sub>l<sub>1</sub>l<sub>2</sub></sub>, 令假设1成立, 当玩家V<sub>l<sub>2</sub></sub>策略不变时, 玩家V<sub>l<sub>1</sub></sub>可以选择满足1<sub>n-m</sub><sup>T</sup>(I - W<sub>f</sub>)<sup>-1</sup>e<sub>j</sub> < 0的智能体增加负边或1<sub>n-m</sub><sup>T</sup>(I - W<sub>f</sub>)<sup>-1</sup>e<sub>j</sub> > 0的智能体增加正边来减小自身的收益, 其中j ∈ I<sub>n-m</sub>.

**证明** 在G<sub>l<sub>1</sub>l<sub>2</sub></sub>中, 假设V<sub>l<sub>1</sub></sub>和V<sub>l<sub>2</sub></sub>原来的策略分别为s<sub>1</sub> = [s<sub>11</sub>, s<sub>12</sub>, ..., s<sub>1(n-m)</sub>]<sup>T</sup>和s<sub>2</sub> = [s<sub>21</sub>, s<sub>22</sub>, ..., s<sub>2(n-m)</sub>]<sup>T</sup>. 当V<sub>l<sub>2</sub></sub>的策略固定不变时, V<sub>l<sub>1</sub></sub>增加一条从V<sub>l<sub>1</sub></sub>到V<sub>f</sub>的边(边权符号未知), 不失一般性, 假设此时s'<sub>1</sub> = s<sub>1</sub> + p<sub>j</sub>. 其中: p<sub>j</sub> = ±e<sub>j</sub>, j ∈ I<sub>n-m</sub>. 令K' = diag{ $\frac{1}{2d_{m+1}^{in}}$ ,  $\frac{1}{2d_{m+2}^{in}}$ , ...,  $\frac{1}{2(d_{m+j}^{in} + 1)}$ , ...,  $\frac{1}{2d_n^{in}}$ }}, 其中d<sub>m+j</sub><sup>in</sup>是玩家V<sub>l<sub>1</sub></sub>策略没改变前顶点v<sub>m+j</sub>的入度, 此时

$$\rho_{s'_1 s_2} = \frac{1_{n-m}^T [1_{n-m} - (I_{n-m} - \mathcal{W}'_f)^{-1} (\mathcal{W}'_{l_{f_1}} 1_{m_1} - \mathcal{W}'_{l_{f_2}} 1_{m_2})]}{2(n-m)}.$$

记τ<sub>s'<sub>1</sub>s<sub>2</sub></sub> ≜ 1<sub>n-m</sub><sup>T</sup>(I<sub>n-m</sub> - W'<sub>f</sub>)<sup>-1</sup>(W'<sub>l<sub>f<sub>1</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>1</sub></sub> - W'<sub>l<sub>f<sub>2</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>2</sub></sub> · 1<sub>m<sub>2</sub></sub>), 根据矩阵求逆公式<sup>[21]</sup>可知

$$(I_{n-m} - \mathcal{W}'_f)^{-1} = \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K'\mathcal{A}_f\right)^{-1} = \left[\frac{1}{2}I_{n-m} - \left(K - \text{diag}\left\{\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j\right\}\right)\mathcal{A}_f\right]^{-1} = \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_f\right)^{-1} \left[I_{n-m} - \phi^{-1}\right].$$

$$\text{diag}\left\{\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j\right\}\mathcal{A}_f \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_f\right)^{-1}.$$

其中: φ<sup>-1</sup> = [I<sub>n-m</sub> + diag{ $\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j$ }A<sub>f</sub> · ( $\frac{1}{2}$  · I<sub>n-m</sub> - K A<sub>f</sub>)<sup>-1</sup>]<sup>-1</sup>, K = diag{ $\frac{1}{2d_{m+1}^{in}}$ ,  $\frac{1}{2d_{m+2}^{in}}$ , ...,  $\frac{1}{2d_n^{in}}$ }}, A<sub>f</sub> = [ā<sub>ij</sub>]<sub>(n-m) × (n-m)</sub>.

记( $\frac{1}{2}$ I<sub>n-m</sub> - K A<sub>f</sub>)<sup>-1</sup> ≜ [l<sub>ij</sub>]<sub>(n-m) × (n-m)</sub>, 则  

$$\text{diag}\left\{\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j\right\}\mathcal{A}_f \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_f\right)^{-1} = \frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j[r_1, r_2, \dots, r_{n-m}],$$

其中r<sub>i</sub> = ∑<sub>k=1</sub><sup>n-m</sup> ā<sub>jk</sub>l<sub>ki</sub>. 记r ≜ [r<sub>1</sub>, r<sub>2</sub>, ..., r<sub>n-m</sub>], 则根据 Sherman-Morrison 公式可得

$$\phi^{-1} = I_{n-m} - \frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1) + r_j}e_j r.$$

此时, 记ψ ≜ φ<sup>-1</sup>diag{ $\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j$ }A<sub>f</sub> =  $\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1) + r_j}e_j[\bar{a}_{j1}, \bar{a}_{j2}, \dots, \bar{a}_{j(n-m)}]$ , 则

$$\tau_{s'_1 s_2} = 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}'_f)^{-1} (\mathcal{W}'_{l_{f_1}} 1_{m_1} - \mathcal{W}'_{l_{f_2}} 1_{m_2}) \cdot 1_{n-m}^T \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_F\right)^{-1} \left[I_{n-m} - \psi \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_F\right)^{-1}\right] (\mathcal{W}_{l_{f_1}} 1_{m_1} - \mathcal{W}_{l_{f_2}} 1_{m_2} + \mu e_j),$$

其中 μ = e<sub>j</sub><sup>T</sup>[(W'<sub>l<sub>f<sub>1</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>1</sub></sub> - W'<sub>l<sub>f<sub>2</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>2</sub></sub>) - (W<sub>l<sub>f<sub>1</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>1</sub></sub> - W<sub>l<sub>f<sub>2</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>2</sub></sub>)]. 记M ≜ 1<sub>n-m</sub><sup>T</sup>(I<sub>n-m</sub> - W<sub>f</sub>)<sup>-1</sup> = 1<sub>n-m</sub><sup>T</sup> · ( $\frac{1}{2}$ I<sub>n-m</sub> - K A<sub>f</sub>)<sup>-1</sup>, 则τ<sub>s<sub>1</sub>s<sub>2</sub></sub> = M(W<sub>l<sub>f<sub>1</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>1</sub></sub> - W<sub>l<sub>f<sub>2</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>2</sub></sub>), 此时

$$\tau_{s'_1 s_2} - \tau_{s_1 s_2} = M\mu e_j - M\psi \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_f\right)^{-1} (\mathcal{W}_{l_{f_1}} 1_{m_1} - \mathcal{W}_{l_{f_2}} 1_{m_2}) - M\psi \left(\frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_f\right)^{-1} \mu e_j = \mu M_{:,j} - \frac{M_{:,j} r_j}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1) + r_j} \mu - \frac{M_{:,j} (\bar{a}_{j1}\eta_1 + \bar{a}_{j2}\eta_2 + \dots + \bar{a}_{j(n-m)}\eta_{(n-m)})}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1) + r_j} = \frac{M_{:,j} \left[2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)\mu - \sum_{i=1}^{n-m} \bar{a}_{ji}\eta_i\right]}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1) + r_j},$$

其中η = ζ<sub>1</sub> - ζ<sub>2</sub> = [η<sub>1</sub>, η<sub>2</sub>, ..., η<sub>n-m</sub>]<sup>T</sup>.

下面根据从V<sub>l<sub>1</sub></sub>到V<sub>f</sub>的新增加边的边权符号不同, 分两种情况进行讨论.

注意到, K - K' = diag{ $\frac{1}{2d_{m+j}^{in}(d_{m+j}^{in} + 1)}e_j$ }},

且有

$$\begin{cases} \mathcal{W}'_{l_{f_1}} 1_{m_1} = K' \mathcal{A}'_{l_{f_1}} 1_{m_1}, \mathcal{W}'_{l_{f_2}} 1_{m_2} = K' \mathcal{A}_{l_{f_2}} 1_{m_2}; \\ \mathcal{W}_{l_{f_1}} 1_{m_1} = K \mathcal{A}_{l_{f_1}} 1_{m_1}, \mathcal{W}_{l_{f_2}} 1_{m_2} = K \mathcal{A}_{l_{f_2}} 1_{m_2}. \end{cases}$$

1) V<sub>l<sub>1</sub></sub>加正边, 则A'<sub>l<sub>f<sub>1</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>1</sub></sub> - A<sub>l<sub>f<sub>1</sub></sub></sub>1<sub>m<sub>1</sub></sub> = e<sub>j</sub>, 此时

$$\begin{cases} \mathcal{W}'_{lf_2} 1_{m_2} - \mathcal{W}_{lf_2} 1_{m_2} = -\frac{(\mathcal{A}_{lf_2})_{j,:} 1_{m_2}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)} e_j; \\ \mathcal{W}'_{lf_1} 1_{m_1} - \mathcal{W}_{lf_1} 1_{m_1} = \frac{d_{m+j}^{\text{in}} - (\mathcal{A}_{lf_1})_{j,:} 1_{m_1}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)} e_j. \end{cases}$$

因此  $\mu = \frac{d_{m+j}^{\text{in}} - (\mathcal{A}_{lf_1})_{j,:} 1_{m_1}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)} + \frac{(\mathcal{A}_{lf_2})_{j,:} 1_{m_2}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)}$ .  
由性质 2 中 2) 可知  $|\eta_i| \leq 1$ , 因此  $(\bar{a}_{j_1}\eta_1 + \bar{a}_{j_2}\eta_2 + \dots + \bar{a}_{j(n-m)}\eta_{(n-m)}) \leq \sum_{i=1}^{n-m} |\bar{a}_{j_i}\eta_i|$ , 则  $2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)\mu - \sum_{i=1}^{n-m} \bar{a}_{j_i}\eta_i = d_{m+j}^{\text{in}} - (\mathcal{A}_{lf_1})_{j,:} 1_{m_1} + (\mathcal{A}_{lf_2})_{j,:} 1_{m_2} - \sum_{i=1}^{n-m} \bar{a}_{j_i}\eta_i \geq 0$ . 当  $M_{:,j} = 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} e_j > 0$  时,  $\tau_{s'_1 s_2} \geq \tau_{s_1 s_2}$ ,  $\rho_{s'_1 s_2} \leq \rho_{s_1 s_2}$ , 玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  收益减小.

2)  $\mathcal{V}_{l_1}$  加负边, 则  $\mathcal{A}'_{lf_1} 1_{m_1} - \mathcal{A}_{lf_1} 1_{m_1} = -e_j$ , 此时有

$$\begin{cases} \mathcal{W}'_{lf_2} 1_{m_2} - \mathcal{W}_{lf_2} 1_{m_2} = -\frac{(\mathcal{A}_{lf_2})_{j,:} 1_{m_2}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)} e_j; \\ \mathcal{W}'_{lf_1} 1_{m_1} - \mathcal{W}_{lf_1} 1_{m_1} = \frac{-d_{m+j}^{\text{in}} - (\mathcal{A}_{lf_1})_{j,:} 1_{m_1}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)} e_j. \end{cases}$$

因此  $\mu = \frac{-d_{m+j}^{\text{in}} - (\mathcal{A}_{lf_1})_{j,:} 1_{m_1} + (\mathcal{A}_{lf_2})_{j,:} 1_{m_2}}{2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)}$ ,

进而有  $2d_{m+j}^{\text{in}}(d_{m+j}^{\text{in}} + 1)\mu - \sum_{i=1}^{n-m} \bar{a}_{j_i}\eta_i = -d_{m+j}^{\text{in}} - (\mathcal{A}_{lf_1})_{j,:} 1_{m_1} + (\mathcal{A}_{lf_2})_{j,:} 1_{m_2} - \sum_{i=1}^{n-m} \bar{a}_{j_i}\eta_i \leq 0$ . 当  $M_{:,j} = 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} e_j < 0$  时,  $\tau_{s'_1 s_2} \geq \tau_{s_1 s_2}$ ,  $\rho_{s'_1 s_2} \leq \rho_{s_1 s_2}$ , 玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  收益减小.

综上所述: 当  $\eta_i \in (-1, 1)$  时, 玩家  $\mathcal{V}_{l_2}$  策略不变, 玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  可以选择满足  $1_{n-m}^T (I - \mathcal{W}_f)^{-1} e_j < 0$  的智能体增加负边或  $1_{n-m}^T (I - \mathcal{W}_f)^{-1} e_j > 0$  的智能体增加正边来减小自身的收益; 当  $\eta_i = 1(-1)$  时, 玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  选择满足  $1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} e_j < 0(> 0)$  的智能体增加负边(正边)来减小自身的收益. 如果满足该条件的智能体不存在, 则意味着两位玩家都不能通过单方面改变策略减小自己的收益, 此时博弈达到均衡.  $\square$

### 3.2 结构平衡网络

下面考虑  $\mathcal{G}_l$  和  $\mathcal{G}_f$  均为强连通且结构平衡的特殊情况, 此时  $\mathcal{V}_f$  能被划分为互不相交的两个子集  $\mathcal{V}_{f_1}$  和  $\mathcal{V}_{f_2}$  ( $\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_{f_1} \cup \mathcal{V}_{f_2}$ ,  $\mathcal{V}_{f_1} \cap \mathcal{V}_{f_2} = \emptyset$ ). 其中:  $\mathcal{V}_{f_b} = \{v_i | i \in F_b\}$ ,  $b = 1, 2$ ,  $|F_b| = n_b$ ,  $\sum_{b=1}^2 |F_b| = n - m$ . 相应地, 矩阵  $\mathcal{W}_f$  可被划分为如下形式:

$$\mathcal{W}_f = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{f_1} & \mathcal{W}_{f_2 f_1} \\ \mathcal{W}_{f_1 f_2} & \mathcal{W}_{f_2} \end{bmatrix}.$$

这里:  $\mathcal{W}_{f_b} \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ ,  $\mathcal{W}_{f_2 f_1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ .

**定理 2** 对于  $\mathcal{G}_{l_1 l_2}$ , 当玩家  $\mathcal{V}_{l_1}$  只选择  $\mathcal{V}_{f_1}$  且  $\mathcal{V}_{l_2}$  只选择  $\mathcal{V}_{f_2}$  进行连接时, 以下结论成立:

- 1) 当  $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$  时,  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{n_2}{n_1}$ .
- 2) 当  $s_1 \leq 0, s_2 \leq 0$  时,  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{n_1}{n_2}$ .
- 3) 当  $s_1 \geq 0, s_2 \leq 0$  时, 有  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{-1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}{2(n-m) + 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}$ . 其中:  $p = [p_1, p_2, \dots, p_{n-m}]^T$ ,  $p_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_{i+m}^- \cap F} \frac{a_{(i+m)j}}{d_{i+m}^{\text{in}}}$ .
- 4) 当  $s_1 \leq 0, s_2 \geq 0$  时, 有  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{2(n-m) + 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}{-1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}$ .

**证明** 由引理 5 可知,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \mathcal{W}_{lf} x_l(k)$ . 进一步, 由定义 2 可知,  $|\mathcal{W}_{lf}| 1_m + |\mathcal{W}_f| 1_{n-m} = 1_{n-m}$ , 则  $|\mathcal{W}_{lf}| 1_m = (I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|) \cdot 1_{n-m}$ ,  $(I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|)^{-1} |\mathcal{W}_{lf}| 1_m = 1_{n-m}$ . 又因为存在 Gauge 变换矩阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_{n-m}\}$  使得  $(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} = D(I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|)^{-1} D$ . 其中:  $i \in F_1$  时  $d_i = 1$ ,  $i \in F_2$  时  $d_i = -1$ , 则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = D(I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|)^{-1} D \mathcal{W}_{lf} x_l(k)$ .

1) 当  $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$  时,  $\mathcal{W}_{lf} \geq 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = D(I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|)^{-1} \mathcal{W}_{lf} \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) 1_m$ . 又因为  $(I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|)^{-1} |\mathcal{W}_{lf}| 1_m = 1_{n-m}$ , 则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = D \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) 1_{n-m}$ , 因此  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{n_2}{n_1}$ .

2) 当  $s_1 \leq 0, s_2 \leq 0$  时,  $\mathcal{W}_{lf} \leq 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = -D \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) 1_{n-m}$ , 因此  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{n_1}{n_2}$ .

3) 当  $s_1 \geq 0, s_2 \leq 0$  时,  $D \mathcal{W}_{lf} = |\mathcal{W}_{lf}| \geq 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{lf} x_l(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) D \mathcal{W}_{lf} 1_m$ , 则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} D \mathcal{W}_{lf} 1_m = \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) \cdot (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} |\mathcal{W}_{lf}| 1_m$ . 因为  $\mathcal{G}_f$  是强连通且结构平衡的, 所以有

$$|\mathcal{W}_f| = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{f_1} & |\mathcal{W}_{f_2 f_1}| \\ |\mathcal{W}_{f_1 f_2}| & \mathcal{W}_{f_2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{W}_{f_2 f_1} \\ \mathcal{W}_{f_1 f_2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & |\mathcal{W}_{f_2 f_1}| \\ |\mathcal{W}_{f_1 f_2}| & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$|\mathcal{W}_{lf}| 1_m = (I_{n-m} - |\mathcal{W}_f|) 1_{n-m} = (I_{n-m} - \mathcal{W}_f) 1_{n-m} + 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{W}_{f_2 f_1} \\ \mathcal{W}_{f_1 f_2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} 1_{n-m}.$$

进而  $(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} |\mathcal{W}_{lf}| 1_m = 1_{n-m} + (I_{n-m} -$

$\mathcal{W}_f)^{-1}p$ . 当  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) \geq 0$  时,  $u_1(s_1, s_2) = 1_{n-m}^T \cdot [\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)1_{n-m} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k)] = -\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)1_{n-m}^T \cdot (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p$ ,  $u_2(s_1, s_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)[2(n-m) + 1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p]$ , 此时可以得到  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{-1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p}{2(n-m) + 1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p}$ . 当  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) \leq 0$  时, 证明同上.

4) 当  $s_1 \leq 0, s_2 \geq 0$  时,  $D\mathcal{W}_{lf} = -|\mathcal{W}_{lf}| \leq 0$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_f(k) = -\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}|\mathcal{W}_{lf}|1_m$ . 进一步, 当  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) \geq 0$  时,  $u_1(s_1, s_2) = 2(n-m) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) + \lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p$ ,  $u_2(s_1, s_2) = -\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k)1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p$ . 因此有  $\frac{u_1(s_1, s_2)}{u_2(s_1, s_2)} = \frac{2(n-m) + 1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p}{-1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1}p}$ . 当  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_a(k) \leq 0$  时, 证明同上.  $\square$

**定理 3** 对于博弈  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ , 当  $\mathcal{G}_f$  是一个有向树图 ( $v_{m+1} \in \mathcal{V}_{f_1}$  为其根顶点) 且  $S_g = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}\}$  ( $g = 1, 2$ ) 时,  $(e_1, e_1)$  是  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  的纳什均衡解, 当且仅当对于  $\forall j \in \{2, 3, \dots, n-m\}$ ,  $\xi_j \leq 2\xi_1 + 1$ . 其中:  $\xi_j = \kappa_{j\text{child}}^+ - \kappa_{j\text{child}}^-$ ,  $\kappa_{j\text{child}}^+$  ( $\kappa_{j\text{child}}^-$ ) 表示  $v_{m+j}$  的子顶点中与  $v_{m+j}$  属于 (不属于) 同一个胞腔的智能体数目. 当  $v_{m+j} \in \mathcal{V}_{f_1}$  时,  $\xi_1 = (|F_1| - |F_2| - 1) - \frac{1}{2}(\kappa_{j\text{child}}^+ - \kappa_{j\text{child}}^- + 1)$ ; 当  $v_{m+j} \in \mathcal{V}_{f_2}$  时,  $\xi_1 = (|F_1| - |F_2| - 1) + \frac{1}{2}(\kappa_{j\text{child}}^+ - \kappa_{j\text{child}}^- + 1)$ .

**证明** 由于  $\mathcal{G}_f$  是结构平衡图, 存在 Gauge 变换矩阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_{n-m}\}$  使得  $|\mathcal{A}_f| = D\mathcal{A}_f D$  为非负矩阵. 其中:  $d_i = \pm 1, i \in \mathcal{I}_{n-m}$ . 由性质 2 中 2) 可知

$$\begin{aligned} & u_1(e_1, e_j) - u_2(e_1, e_j) = \\ & 2(n-m)|x^*(k)|(2\rho_{e_1 e_j} - 1) = \\ & 2(n-m) \cdot \\ & \left( 2 \frac{1_{n-m}^T [1_{n-m} - (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \left( \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{4}e_j \right)]}{2(n-m)} - \right. \\ & \left. 1 \right) |x^*(k)| = \\ & -2|x^*(k)|1_{n-m}^T(I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} \left( \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{4}e_j \right). \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} I_{n-m} - \mathcal{W}_f &= \frac{1}{2}I_{n-m} - K\mathcal{A}_f = \\ & \frac{1}{2} \left[ I_{n-m} - \text{diag} \left\{ \frac{1}{d_{m+1}^{\text{in}}}, \frac{1}{d_{m+2}^{\text{in}}}, \dots, \frac{1}{d_n^{\text{in}}} \right\} \mathcal{A}_f \right], \end{aligned}$$

此时, 记  $\mathcal{C} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{d_{m+1}^{\text{in}}}, \frac{1}{d_{m+2}^{\text{in}}}, \dots, \frac{1}{d_n^{\text{in}}} \right\} \mathcal{A}_f$ , 则  $|\mathcal{C}| \triangleq$

$\text{diag} \left\{ \frac{1}{d_{m+1}^{\text{in}}}, \frac{1}{d_{m+2}^{\text{in}}}, \dots, \frac{1}{d_n^{\text{in}}} \right\} D\mathcal{A}_f D$ , 所以  $u_1(e_1, e_j) - u_2(e_1, e_j) = 4|x^*(k)|1_{n-m}^T D(I_{n-m} - |\mathcal{C}|)^{-1} D \left( \frac{1}{4}e_j - \frac{1}{2}e_1 \right)$ .

接下来, 根据  $\mathcal{G}_f$  的树状结构对矩阵  $|\mathcal{C}|$  的元素进行分析. 不失一般性,  $\mathcal{V}_f$  能被划分为  $h$  个互不相交的子集, 即  $\mathcal{V}_f = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{V}_{ft_i}, \mathcal{V}_{ft_p} \cap \mathcal{V}_{ft_q} = \emptyset, p \neq q$ . 其中:  $\mathcal{V}_{ft_i} = \{v_o | o \in F_{t_i} \text{ 且 } |F_{t_i}| = q_i, i, p, q \in \{1, 2, \dots, h\}\}$ , 则  $\sum_{i=1}^h q_i = n-m$ . 此时可以将矩阵  $|\mathcal{C}| = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  划分为

$$|\mathcal{C}| = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{C}_3 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_h & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

其中:  $\mathcal{C}_1 = 0, \mathcal{C}_k \in \mathbb{R}^{q_k \times q_{k-1}}$  表示  $\mathcal{V}_{ft_{k-1}}$  与  $\mathcal{V}_{ft_k}$  之间的交互关系 ( $2 \leq k \leq h$ ). 如果存在  $(v_l, v_{j+m}) \in \mathcal{E}, l \in F$ , 则  $c_{j(l-m)} = \frac{1}{2}$ ; 对于  $t \neq j$ , 如果存在  $(v_l, v_t) \in \mathcal{E}, l, t \in F$ , 则  $c_{(t-m)(l-m)} = 1$ . 又因为  $(I_{n-m} - |\mathcal{C}|)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} |\mathcal{C}|^i = I_{n-m} + \sum_{i=1}^{h-1} |\mathcal{C}|^i$ , 则  $u_1(e_1, e_j) - u_2(e_1, e_j) = 4|x^*(k)|1_{n-m}^T D \left( I_{n-m} + \sum_{i=1}^h |\mathcal{C}|^i \right) D \left( \frac{1}{4}e_j - \frac{1}{2}e_1 \right)$ , 记  $\bar{\mathcal{C}} \triangleq \sum_{i=1}^{h-1} |\mathcal{C}|^i = [\bar{c}_{ij}] \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ , 则

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_3 \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{C}_h \dots \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_h \dots \mathcal{C}_3 & \dots & \mathcal{C}_h & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中  $\bar{c}_{j1} = \frac{1}{2}$ . 如果  $v_i \in \mathcal{R}(j+m)$ , 则  $\bar{c}_{(i-m)1} = \frac{1}{2}, i \in F$ . 记  $1_{n-m}^T D \bar{\mathcal{C}} D \triangleq [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{(n-m)}]$ . 其中:  $\xi_1 = \sum_{i=1}^{n-m} d_i d_1 \bar{c}_{i1}, \xi_j = \sum_{i=1}^{n-m} d_i d_j \bar{c}_{ij}$ , 此时有

$$u_1(e_1, e_j) - u_2(e_1, e_j) = |x^*(k)|(\xi_j - 2\xi_1 - 1). \quad (7)$$

**必要性:** 如果  $(e_1, e_1)$  是  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  的纳什均衡解, 则由定义 5 可知, 对于  $\forall i, j \in \{2, 3, \dots, n-m\}, u_1(e_1, e_j) \leq u_1(e_1, e_1) \leq u_1(e_i, e_1)$ . 又由性质 2 可知  $u_1(e_1, e_1) = (n-m)|x^*(k)|$ , 则对于  $\forall (e_1, e_j) \in S_1 \times S_2, u_1(e_1, e_j) \leq (n-m)|x^*(k)|$ . 因为  $u_1(e_1, e_j) + u_2(e_1, e_j) = 2(n-m)|x^*(k)|$ , 则  $u_1(e_1, e_j) \leq u_2(e_1, e_j)$ , 即  $\xi_j \leq 2\xi_1 + 1$ .

充分性: 当 $\forall j \in \{2, 3, \dots, n-m\}, \xi_j \leq 2\xi_1 + 1$ 时, 由式(7)可知 $u_1(e_j, e_1) - u_2(e_j, e_1) \geq 0, u_1(e_1, e_j) - u_2(e_1, e_j) \leq 0$ . 又因为 $u_1(e_1, e_1) = u_2(e_1, e_1) = (n-m)|x^*(k)|$ , 则 $u_1(e_1, e_1) \leq u_1(e_j, e_1), u_2(e_1, e_1) \leq u_2(e_1, e_j)$ . 因此由定义5可得 $(e_1, e_1)$ 是 $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ 的纳什均衡解.  $\square$

### 4 仿真实例

**例1** 以多机器人协作系统为例, 模拟两组任务分配中心通过通信网络争夺机器人资源的场景. 将具有竞争关系的两组任务中心 $\mathcal{V}_{l_1}$ 和 $\mathcal{V}_{l_2}$ 建模为参与博弈的两个玩家, 第三方机器人集群 $\mathcal{V}_f$ 为跟随者, 两组任务分配中心通过通信链路吸引机器人优先执行自身任务, 围绕机器人的资源分配问题展开博弈, 其对应的通信交互图如图1所示.

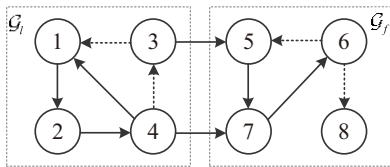


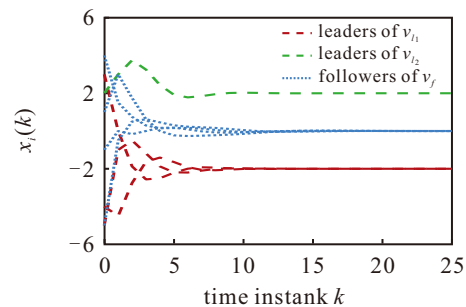
图1 例1对应的多智能体系统(3)的通信交互

在图1中: 领导者和跟随者的通信交互分别用 $\mathcal{G}_l$ 和 $\mathcal{G}_f$ 表示, 实线和虚线分别表示正边和负边. 玩家 $\mathcal{V}_{l_1} = \{v_1, v_2, v_4\}, \mathcal{V}_{l_2} = \{v_3\}$ , 跟随者 $\mathcal{V}_f = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ . 领导者可通过增加正边引导机器人执行己方任务, 也可通过负边削弱对手通信链路. 假设玩家独立选择 $\mathcal{V}_f$ 中的跟随者通过1条边进行连接, 即玩家 $\mathcal{V}_{l_g}$ 策略集为 $S_g \triangleq \{s_g | s_g = \mathcal{A}_{lfg} \mathbf{1}_{m_g}, \mathbf{1}_{n-m}^T \mathcal{A}_{lfg} | \mathbf{1}_{m_g} = 1\}, g = 1, 2$ . 设领导者的初始状态为 $x_l(0) = [3, -5, 2, -4]^T$ , 其中正值表示中心成员倾向于吸引机器人执行己方任务, 负值表示中心成员倾向于干扰机器人执行对方任务, 其绝对值反映控制力强度. 设跟随者的初始状态为 $x_f(0) = [-1, -5, 4, 1]^T$ , 它反映了机器人当前执行任务的偏好, 负值表示优先响应 $\mathcal{V}_{l_1}$ , 正值表示优先响应 $\mathcal{V}_{l_2}$ ,  $\mathcal{V}_l$ 的最终状态为 $[-2, -2, 2, -2]^T$ ,  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ 的收益矩阵(用 $\mathcal{V}_{l_1}$ 收益显示)如表1所示. 由表1可以看出, 该博弈的纳什均衡点为 $(e_1, e_1)$ , 说明双方的吸引和干扰策略强度达到平衡时, 系统状态轨迹如图2(a)所示, 双方都无法通过单方面改变自己的策略获得更好的收益, 并且对于所有 $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ , 这与性质2相符. 进一步, 假设 $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ 中原先的策略对为 $(e_3, e_1)$ , 该策略对下领导者和跟随者的状态轨迹如图2(b)所示. 通过计算可得 $u_1(s_1, s_2) = 8.80, u_2(s_1, s_2) = 7.20, \mathbf{1}_{n-m}^T (I - \mathcal{W}_f)^{-1} = [\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, 2]$ . 当

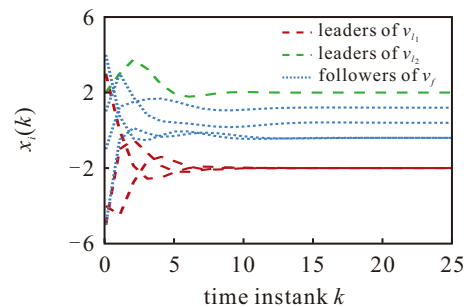
$\mathcal{V}_{l_2}$ 策略保持不变时,  $\mathcal{V}_{l_1}$ 考虑吸引智能体 $v_5, v_7, v_8$ 中的一个执行己方任务(加正边), 或者干扰智能体 $v_6$ 执行对方任务(加负边)时,  $u_1(s_1, s_2)$ 分别减小为7.43, 8.57, 7.60, 8.00, 上述结果验证了定理1的有效性. 当 $\mathcal{G}_f$ 是无符号图时, 策略对 $(e_3, e_1)$ 下计算可得 $u_1(s_1, s_2) = 6.67, u_2(s_1, s_2) = 9.33$ , 根据文献[12]的性质4可知, 如果 $\mathcal{V}_{l_1}$ 向 $v_5$ 到 $v_8$ 中的任意一个智能体加正边, 则 $u_1(s_1, s_2)$ 分别减小为4.00, 4.57, 4.80, 6.00, 然而当 $\mathcal{G}_f$ 是符号图时, 如果向 $v_6$ 加正边, 则 $u_1(s_1, s_2)$ 将增大为9.33, 该方法不再适用.

表1 博弈 $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$ 的收益矩阵

$S_1$	$S_2$							
	$e_1$	$-e_1$	$e_2$	$-e_2$	$e_3$	$-e_3$	$e_4$	$-e_4$
$e_1$	8.00	6.00	5.60	7.20	7.20	6.40	7.33	5.33
$-e_1$	10.00	8.00	8.80	10.40	9.60	8.80	10.67	8.67
$e_2$	10.40	7.20	8.00	10.00	9.60	8.80	10.00	8.00
$-e_2$	8.80	5.60	6.00	8.00	7.20	6.40	8.00	6.00
$e_3$	8.80	6.40	6.40	8.80	8.00	8.00	8.67	6.67
$-e_3$	9.60	7.20	7.20	9.60	8.00	8.00	9.33	7.33
$e_4$	8.67	5.33	6.00	8.00	7.33	6.67	8.00	6.67
$-e_4$	10.67	7.33	8.00	10.00	9.33	8.67	9.33	8.00



(a) 博弈均衡时对应的系统状态轨迹



(b) 博弈非均衡时对应的系统状态轨迹

图2 例1对应的多智能体系统(3)的系统状态轨迹

**例2** 考虑一个由9个智能体构成的多智能体系统, 其通信交互图如图3所示, 玩家 $\mathcal{V}_{l_1} = \{v_1, v_2, v_4\}, \mathcal{V}_{l_2} = \{v_3\}$ , 此时 $\mathcal{G}_f$ 是结构平衡的且 $n_1 = 2, n_2 = 3$ . 设该系统的初始状态为 $x(0) = [3, -5, 2, -4, -1, -5, 4, 1, -2]^T$ , 当 $\mathcal{V}_{l_1}$ 选择智能体 $v_8, \mathcal{V}_{l_2}$ 选择智能体 $v_5, v_7$ 进行连接时,  $p = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0]^T$ ,

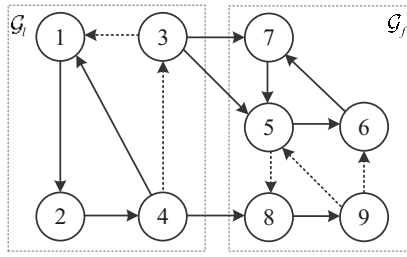
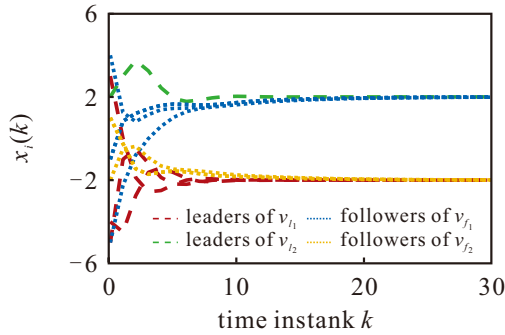
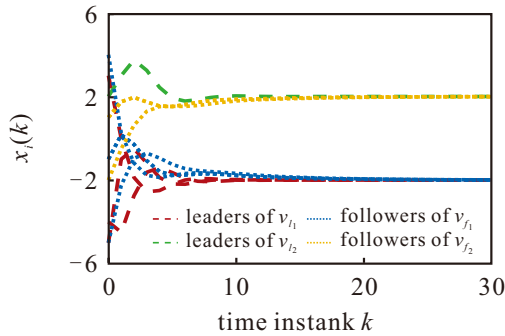


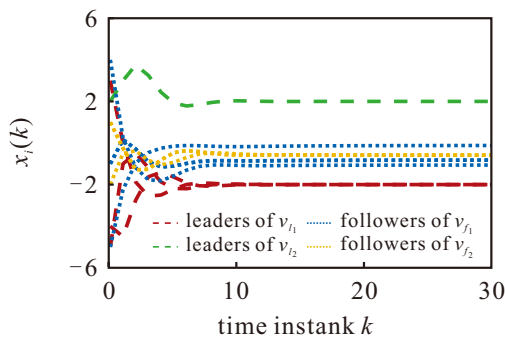
图3 例2对应的多智能体系统(3)的通信交互



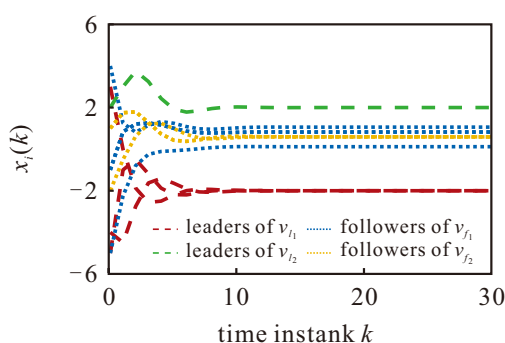
(a)  $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$  时对应的系统状态轨迹



(b)  $s_1 \leq 0, s_2 \leq 0$  时对应的系统状态轨迹



(c)  $s_1 \geq 0, s_2 \leq 0$  时对应的系统状态轨迹



(d)  $s_1 \leq 0, s_2 \geq 0$  时对应的系统状态轨迹

图4 例2对应的多智能体系统(3)的系统状态轨迹

$$1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p = \frac{-58}{17}. \text{ 计算可得}$$

$$\frac{u_1(e_4, e_1 + e_3)}{u_2(e_4, e_1 + e_3)} = \frac{12}{8} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\frac{u_1(-e_4, -e_1 - e_3)}{u_2(-e_4, -e_1 - e_3)} = \frac{8}{12} = \frac{n_1}{n_2},$$

$$\frac{u_1(e_4, -e_1 - e_3)}{u_2(e_4, -e_1 - e_3)} = \frac{29}{56} =$$

$$\frac{-1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}{2(n-m) + 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p},$$

$$\frac{u_1(-e_4, e_1 + e_3)}{u_2(-e_4, e_1 + e_3)} = \frac{56}{29} =$$

$$\frac{2(n-m) + 1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}{-1_{n-m}^T (I_{n-m} - \mathcal{W}_f)^{-1} p}.$$

这4种情况下的系统状态轨迹分别如图4(a)~图4(d)所示, 该结果与定理2结论一致.

**例3** 考虑一个由17个智能体构成的多智能体系统, 其通信交互图如图5所示, 令玩家  $\mathcal{V}_{l_1} = \{v_1, v_2, v_4\}$ ,  $\mathcal{V}_{l_2} = \{v_3\}$ , 即  $\mathcal{G}_f$  是结构平衡的有向树图,  $v_5$  是树的根顶点, 此时  $\mathcal{V}_{f_1} = \{v_5, v_6, v_7, v_9, v_{13}, v_{16}, v_{17}\}$ ,  $\mathcal{V}_{f_2} = \{v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}\}$ ,  $|F_1| = 7$ ,  $|F_2| = 6$ . 设  $x_i(0) = [3, -5, 2, -4]^T$ , 计算可得  $u_1(e_1, e_2) = 28$ ,  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 1$ ,  $\kappa_{2\text{child}}^+ = 4$ ,  $\kappa_{2\text{child}}^- = 3$ , 因此条件  $\xi_2 \leq 2\xi_1 + 1$  不成立且  $u_1(e_1, e_2) \geq u_1(e_1, e_1) = 26$ , 则  $(e_1, e_1)$  不是博弈  $\mathbb{G}_{l_1 l_2}$  的纳什均衡解. 当  $\mathcal{G}_f$  是无符号有向树图时, 由文献[12]的定理2可知, 当且仅当两个玩家策略都包含  $\mathcal{G}_f$  的根顶点时, 博弈达到均衡, 而受符号网络中边权符号属性的影响, 上述结果与定理3结论一致, 表明即使两个玩家策略都包含  $\mathcal{G}_f$  的根顶点, 博弈也不一定达到均衡.

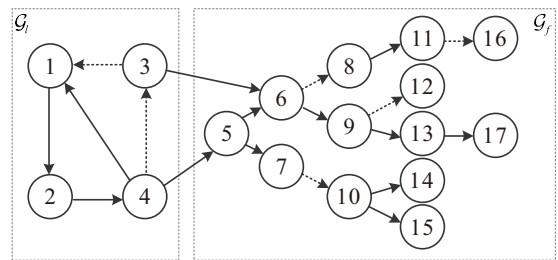


图5 例3对应的多智能体系统(3)的通信交互

## 5 结论

本文采用博弈论的方法研究了符号网络下具有竞争领导者的离散多智能体系统包围控制问题. 基于领导者-跟随者框架, 针对两组竞争关系的领导者存在利益冲突的情况, 构建了一个非合作博弈模型. 进一步分析了该博弈的相关性质并提出了玩家优化自身利益的策略方法. 特别地, 从拓扑结构角度出发, 分别针对结构平衡图和有向树图, 刻画了博弈的收

益与跟随者数目的关系,提出了判断策略是否为纳什均衡解的方法.未来将进一步研究多领导者组或具有高阶和异质动力学的领导者竞争博弈.

#### 参考文献 (References)

- [1] 吴立尧, 韩维, 张勇, 等. 基于领航-跟随的有人/无人机编队队形保持控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(10): 2435-2441.  
(Wu L Y, Han W, Zhang Y, et al. Formation keeping control for manned/unmanned aerial vehicle formation based on leader-follower strategy[J]. Control and Decision, 2021, 36(10): 2435-2441.)
- [2] Fortino G, Galzarano S, Gravina R, et al. A framework for collaborative computing and multi-sensor data fusion in body sensor networks[J]. Information Fusion, 2015, 22: 50-70.
- [3] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [4] Li Z K, Duan Z S, Huang L. Leader-follower consensus of multi-agent systems[C]. 2009 American Control Conference. Louis, 2009: 3256-3261.
- [5] Ji M, Ferrari-Trecate G, Egerstedt M, et al. Containment control in mobile networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(8): 1972-1975.
- [6] Mirkovic J, Reiher P, Papadopoulos C, et al. Testing a collaborative DDoS defense in a red team/blue team exercise[J]. IEEE Transactions on Computers, 2008, 57(8): 1098-1112.
- [7] 邵海滨, 潘鹿鹿, 席裕庚, 等. 符号网络下多智能体系统二分一致性的牵制控制问题[J]. 控制与决策, 2019, 34(8): 1695-1701.  
(Shao H B, Pan L L, Xi Y G, et al. Leader-following bipartite consensus of multi-agent systems under signed networks[J]. Control and Decision, 2019, 34(8): 1695-1701.)
- [8] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(4): 935-946.
- [9] Meng D Y. Bipartite containment tracking of signed networks[J]. Automatica, 2017, 79: 282-289.
- [10] Fang X, Wen G H, Wu Z G, et al. Designing observer-type controller for containment of discrete-time linear MASs over signed graph[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 67(3): 511-515.
- [11] Ma J Y, Zheng Y S, Wu B. Equilibrium topology of multi-agent systems with two leaders: A zero-sum game perspective[J]. Automatica, 2016, 73: 200-206.
- [12] Ma J Y, Zheng Y S, Wang L. Nash equilibrium topology of multi-agent systems with competitive groups[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(6): 4956-4966.
- [13] Ao Y C, Jia Y M. Agents attraction competition in an extended Friedkin-Johnsen social network[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 10(3): 1100-1112.
- [14] Ao Y C, Jia Y M. Distance-targeted competitive follower-attraction containment control for multi-agent systems with weighted directed graphs[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(8): 4577-4601.
- [15] Chen Z T, Chen K R, Wang J H. Adaptive dynamic programming for containment control with robustness analysis to iterative error: A global Nash equilibrium solution[J]. ISA Transactions, 2024, 154: 132-146.
- [16] Rastgoftar H. Containment control approach for steering opinion in a social network[J]. 2025, arXiv: 2502.01847.
- [17] Lin X, Jiao Q, Wang L. Competitive diffusion in signed social networks: A game-theoretic perspective[J]. Automatica, 2020, 112: 108656.
- [18] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative game theory[M]. London: Academic Press, 2015: 17-76.
- [19] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 543-546.
- [20] Haddad W M, Chellaboina V S. Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach[M]. Princeton: Princeton University press, 2008: 763-844.
- [21] Bernstein D S. Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas[M]. New York: Princeton University Press, 2009: 77-165.

#### 作者简介

路张昕 (2002-), 女, 硕士生, 主要研究方向为多智能体系统分布式协同控制, E-mail: [lu\\_zx@stu.xidian.edu.cn](mailto:lu_zx@stu.xidian.edu.cn);

关永强 (1983-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为多智能体系统分布式协同控制、群体行为与群体智能, E-mail: [guan-jq@163.com](mailto:guan-jq@163.com);

康龙 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为多智能体系统分布式协同控制, E-mail: [kanglong@stu.xidian.edu.cn](mailto:kanglong@stu.xidian.edu.cn);

何永喜 (1993-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为感知-认知-决策-执行一体化调控, E-mail: [heyongxi@xidian.edu.com](mailto:heyongxi@xidian.edu.com).