

控制与决策

Control and Decision

高阶相互作用下超图的同步稳定性研究

苑文颖, 顾伟, 张天良, 童天驰, 董倩, 孙金生

引用本文:

苑文颖, 顾伟, 张天良, 等. 高阶相互作用下超图的同步稳定性研究[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 267-275.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0502>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制](#)

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks

控制与决策. 2021, 36(8): 1955-1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

[Fal函数的改进及3种新型非线性扩张状态观测器](#)

Advanced fal function and three novel nonlinear extended state observers

控制与决策. 2021, 36(7): 1655-1662 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1652>

[基于影响度介数中心性的多智能体牵制控制算法](#)

Multi-agent pinning control algorithm based on betweenness centrality with influence degree

控制与决策. 2021, 36(6): 1442-1448 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1106>

[基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识](#)

[Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering](#)

控制与决策. 2021, 36(12): 2946-2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

[基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制](#)

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97-104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

高阶相互作用下超图的同步稳定性研究

苑文颖¹, 顾伟¹, 张天良², 童天驰¹, 董倩¹, 孙金生^{1†}

(1. 南京理工大学自动化学院, 南京 210094; 2. 青岛理工大学信息与控制工程学院, 山东 青岛 266520)

摘要: 针对现有超图建模与分析的局限性, 提出一种新的高阶网络同步稳定性分析框架. 首先, 定义一个能完全描述超图拓扑结构的二维邻接矩阵, 该矩阵由各超边的子邻接矩阵组成, 基于此结构构建新的超图动力学模型, 并通过线性化分析推导出其同步变分方程; 其次, 在对耦合函数施加其在同步流形附近雅可比行为一致的假设下, 将复杂的变分方程转化为一个由单一等效耦合矩阵和雅可比矩阵决定的标准主稳定函数 (MSF) 形式, 减少对超图结构和耦合形式的严格限制; 此外, 等效耦合矩阵包含所有超边的拓扑结构信息以及耦合强度, 利用 MSF 系统分析系统参数与同步稳定性的关系, 为设计和控制具有高阶相互作用的复杂网络系统提供新的理论工具; 最后, 通过两个实际系统的数值仿真验证理论结果的有效性.

关键词: 高阶相互作用; 超图; 同步; 耦合矩阵; 主稳定函数

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0502

引用格式: 苑文颖, 顾伟, 张天良, 等. 高阶相互作用下超图的同步稳定性研究 [J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 267-275.

Synchronization stability for hypergraph in high-order interactions

YUAN Wen-ying¹, GU Wei¹, ZHANG Tian-liang², TONG Tian-chi¹, DONG Qian¹, SUN Jin-sheng^{1†}

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

Abstract: To address the limitations of existing hypergraph modeling and analysis, a new framework for analyzing the synchronization stability of higher-order networks is proposed. First, we define a two-dimensional adjacency matrix that can fully describe the topology of a hypergraph, which is composed of the sub-adjacency matrices of each hyperedge. Subsequently, based on this structure, we construct a new dynamical model for the hypergraph and derive its variational equation for synchronization stability through linearization analysis. Then, under the assumption that the coupling functions have consistent Jacobian behavior near the synchronization manifold, the complex variational equation is transformed into a standard master stability function (MSF) form, determined by a single effective coupling matrix and a Jacobian matrix, so as to reduce the strict restrictions on the hypergraph structure and coupling forms. This effective coupling matrix contains the topological information and coupling strengths of all hyperedges. Using the MSF, the relationship between system parameters and synchronization stability is analyzed, providing a novel theoretical tool for the design and control of complex networks with higher-order interactions. Finally, the validity of the theoretical results is verified through numerical simulations of two actual systems.

Keywords: higher-order interactions; hypergraph; synchronization; coupling matrix; master stability function

0 引言

网络科学已发展成为一种强有力的建模工具, 用以描述由相互作用的个体单元构成的复杂系统, 在物理学^[1]、生物学^[2]、工程学^[3]及社会科学^[4-5]等众多领域获得了广泛应用. 以往对复杂系统的研究大多聚焦于单元间的成对相互作用^[6]. 尽管对于某些动

力学过程而言, 该假设具有一定的合理性, 但大多数实际系统中的单元常以包含两个以上成员的群体形式进行交互. 事实上, 在许多工程与科学领域, 从电力系统的级联故障预防^[7]到脑网络^[8]等实际系统中, 单元间的相互作用呈现出多体相互作用特性. 鉴于此, 近年来, 能够刻画更为复杂的高阶相互作用结构

收稿日期: 2025-05-14; 录用日期: 2025-08-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12426609, 62203220); 国家留学基金项目 (202306840130).

责任编辑: 张丹.

[†]通信作者. E-mail: jssun67@163.com.

及其动力学行为的研究日益受到关注.

超图^[9-10]作为传统图的推广,其核心特征在于利用超边连接多个节点,从而能够有效地将多体相互作用机制融入系统模型.超图模型已在诸多研究领域展现出广泛的应用价值,例如网络同步现象^[11]、多智能体一致性问题^[12]、多机器人协同控制^[13]等方面.在智能电网^[14]中,一个区域的失稳往往不是单个发电机的问题,而是多个发电机和变电站构成的高阶结构相互作用的结果.目前,描述超图拓扑结构的方法依赖于邻接张量或关联矩阵^[15-16].然而,这些传统方法在应用于动力学分析时面临着固有局限:邻接张量在数值上处理复杂,而关联矩阵会丢失关键的交互信息.因此,研究更一般的高阶相互作用结构建模方法对于精确分析其同步稳定性具有一定意义.

在复杂网络动力学的研究领域,系统的集体行为,尤其是同步现象,是理解其协同演化规律的热点问题.从智能电网中发电机组的稳定并网^[17],到大脑皮层中神经元集群的协同放电^[8],再到多机器人系统的协同编队^[13],同步稳定性都是确保系统正常、高效运行的重要前提.相较于传统的成对耦合网络模型,目前关于超图耦合结构如何影响系统同步稳定性的理论探究仍相对不足^[18].针对经典网络的同步稳定性分析,研究者们已发展出多种成熟的方法,例如主稳定函数(MSF)方法^[19]、李雅普诺夫指数方法^[20]和牵制控制策略^[20]等.这些方法中,MSF是应用最广泛的分析工具之一,它为研究不同耦合模式下网络系统的同步行为提供了一个强有力的理论框架.因此,本文利用传统的MSF方法研究高阶拓扑结构作用网络的同步机制具有深刻的理论意义.

近年来,研究人员已将MSF方法拓展至超图领域.然而,这些工作往往建立在特定的假设基础之上,例如节点动力学的线性化近似^[14]、系统耦合强度的均匀性假设^[21]或对超边类型的特定限制^[22]等.这些前提假设无疑限制了MSF方法在分析具有复杂结构的真实超网络的普适性与有效性.为克服上述局限,本研究不再局限于特定的结构或耦合假设,而是面向更为一般的超图结构建立动力学模型,利用MSF方法研究网络拓扑结构和耦合强度与系统同步稳定性之间的关系.因此,本文旨在精确刻画系统参数与同步稳定性之间关系的理论框架,从而为基于超图结构的控制策略设计提供理论基础.本文主要研究目标为:首先,对于超图的拓扑结构,提出一种新的基于子邻接矩阵的定义,该二维邻接矩阵能够解构并统一刻画超图的拓扑结构和高阶相互信息;其次,基于该拓扑结构的定义,构建一个能精确地刻画高

阶相互作用耦合特性的非线性动力学模型;最后,将该高阶模型转化为标准的线性系统模型,利用MSF方法分析超图的同步稳定性与系统参数之间的关系.通过实现上述研究目标,本文主要贡献体现在:

1) 提出描述超边内部节点连接关系的子邻接矩阵,基于此,定义一种新颖的超图邻接矩阵、度矩阵和拉普拉斯矩阵.该方法能够同时捕捉节点间的连接和节点-超边的关联关系.

2) 基于子邻接矩阵构建超图动力学模型,推导围绕同步解的线性化变分方程.同时,在对超边耦合函数的假设下,证明可以将等价变分方程严格转化为针对每个节点状态的标准MSF子系统分析形式.

3) 应用标准MSF方法,通过分析最大李雅普诺夫指数分析超图的同步稳定性与系统参数之间的关系,并依据MSF曲线将稳定性分为3种类别特征.

1 超图

一个超图是一个偶对 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为节点集合, $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k\}$ 为超边集合.这里 \mathcal{E}_h 代表超图 \mathcal{G} 中的第 h 条超边,其大小为 $|\mathcal{E}_h|$,表示该超边包含的节点数量.为了描述超边内部的交互特性,定义其交互阶数为 $r_h = |\mathcal{E}_h| - 1$.特别地,在超边 \mathcal{E}_h 中,任意一个节点都需要同时与其他 r_h 个节点进行高阶耦合.

传统上,超图的拓扑结构通常由邻接张量或关联矩阵来描述^[10-11].然而,前者在数值分析上处理复杂,后者无法区分一个成对连接是由哪一个高阶相互作用产生的.为克服这些局限性,本文提出一种新的超图定义方式,将高阶相互作用的结构特征解构并统一到一个二维邻接矩阵中,从而为后续的理论分析奠定基础.下面给出相关定义.

1.1 邻接矩阵的定义与性质

定义 1 对于一个包含 N 个节点和 k 条超边的超图,其邻接矩阵 $A = (a_{ij}^{(h)})_{N \times Nk}$ 定义如下:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & \dots & a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1N}^{(k)} \\ a_{21}^{(1)} & \dots & a_{2N}^{(1)} & \dots & a_{21}^{(k)} & \dots & a_{2N}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & \dots & a_{NN}^{(1)} & \dots & a_{N1}^{(k)} & \dots & a_{NN}^{(k)} \end{bmatrix}_{N \times Nk}$$

其中: $i, j = 1, 2, \dots, N$; \mathcal{E}_h 表示一条超边, $h = 1, 2, \dots, k$; $a_{ij}^{(h)}$ 为超边 \mathcal{E}_h 内部节点 v_i 与节点 v_j 之间的连接关系,若节点 v_i, v_j 同时存在于超边 \mathcal{E}_h 中,即 $v_i, v_j \in \mathcal{E}_h$,则 $a_{ij}^{(h)} = a_{ji}^{(h)} = 1$,否则 $a_{ij}^{(h)} = a_{ji}^{(h)} = 0$,特别地,当 $i = j$ 时,通常设定 $a_{ii}^{(h)} = 0$.

根据定义1中超图邻接矩阵 A 的定义,可以观察到,矩阵元素 $a_{ij}^{(h)}$ 同时关联节点和超边.基于此,超

边的子邻接矩阵 $A^{(h)}$ 的构造方法被进一步提出.

定义 2 对于一个包含 N 个节点和 k 条超边的超图, 根据节点与超边的隶属关系以及超图邻接矩阵元素 $a_{ij}^{(h)}$ 的定义, 每条超边 \mathcal{E}_h 对应的子邻接矩阵 $A^{(h)} = (a_{ij}^{(h)})_{N \times N}$ 定义如下:

$$A^{(h)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(h)} & \cdots & a_{1N}^{(h)} \\ a_{21}^{(h)} & \cdots & a_{2N}^{(h)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}^{(h)} & \cdots & a_{NN}^{(h)} \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

因此, 每个子邻接矩阵 $A^{(h)}$ 仅包含了隶属于该超边 \mathcal{E}_h 的节点间的连接信息. 进而, 整个超图的邻接矩阵 A 可以表示为这些子邻接矩阵的水平拼接, 即

$$A = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ \cdots \ A^{(k)}] \in \mathbb{R}^{N \times Nk}.$$

本文将传统图论推广到高阶超图, 所提出的邻接矩阵融合了传统图论中邻接矩阵和关联矩阵的概念. 首先, 将每条超边 \mathcal{E}_h 的高阶交互关系映射到一个独立的子邻接矩阵 $A^{(h)} = (a_{ij}^{(h)})_{N \times N}$ 中, 从而完整保留了每条超边作为一个独立交互单元的拓扑信息; 其次, 将所有子矩阵沿水平方向拼接, 构建了一个全局的二维邻接矩阵 $A = (a_{ij}^{(h)})_{N \times Nk}$. 因此, 这种从张量到矩阵的维度展开, 将复杂的高阶网络结构解构并展开为一个易于分析的二维形式, 更加有利于直观地揭示超图的高阶拓扑结构. 显然, 本文所定义的邻接矩阵 A 及其子邻接矩阵 $A^{(h)}$ 同时描述了节点之间的连接关系以及节点与超边之间的关联关系.

1.2 拉普拉斯矩阵与度矩阵的定义

基于上文定义的邻接矩阵 $A = (a_{ij}^{(h)})_{N \times Nk}$, 并借鉴图论中度矩阵与拉普拉斯矩阵的构造方式, 进一步定义超图的度矩阵 D 与拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} .

定义 3 给定一个超图 \mathcal{G} , 对应于每条超边 \mathcal{E}_h 的子拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}^{(h)} = (l_{ij}^{(h)})_{N \times N}$ 定义如下:

$$l_{ij}^{(h)} = \begin{cases} -a_{ij}^{(h)}, & i \neq j; \\ \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(h)}, & i = j. \end{cases}$$

进而, 超图的拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = (l_{ij}^{(h)})_{N \times Nk}$ 定义为这些子拉普拉斯矩阵的水平拼接, 即

$$\mathcal{L} = [\mathcal{L}^{(1)} \ \mathcal{L}^{(2)} \ \cdots \ \mathcal{L}^{(k)}] \in \mathbb{R}^{N \times Nk}.$$

其中: $i, j = 1, 2, \dots, N; h = 1, 2, \dots, k$.

由定义 3 可知, 与传统图论相似, 超图的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 及其子拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}^{(h)}$ 同样满足行和为零的性质, 即 $\sum_{j=1}^N l_{ij}^{(h)} = 0, \sum_{h=1}^k \sum_{j=1}^N l_{ij}^{(h)} = 0$ 对任意 i, h 成立.

定义 4 给定一个超图 \mathcal{G} , 定义其度矩阵 D 为

$$D = [D^{(1)} \ D^{(2)} \ \cdots \ D^{(k)}] \in \mathbb{R}^{N \times Nk},$$

其中每个子度矩阵 $D^{(h)}$ 对应于超边 \mathcal{E}_h , 定义为

$$D^{(h)} = \text{diag}\{d_1^{(h)}, d_2^{(h)}, \dots, d_N^{(h)}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

其对角元素 $d_i^{(h)} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(h)}$ 表示节点 v_i 在超边 \mathcal{E}_h 中的度, 如果节点 $v_i \in \mathcal{E}_h$, 则该度值等于超边 \mathcal{E}_h 中除 v_i 自身以外的节点数量, 即 $d_i^{(h)} = r_h$. 因此, 本文提出的超图拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 、邻接矩阵 A 、度矩阵 D 及其各自对应的子矩阵 $\mathcal{L}^{(h)}$ 、 $A^{(h)}$ 、 $D^{(h)}$ 之间满足

$$\mathcal{L} = D - A, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}^{(h)} = D^{(h)} - A^{(h)}. \quad (2)$$

2 超图的系统模型

不同于传统直接在抽象的邻接张量上构建超图动力学模型的方法^[9-10], 本文基于前面所定义的子邻接矩阵, 将邻接张量解构为关于每条超边中节点之间的连接关系, 并利用此关系构建超图的动力学模型. 下面考虑一个包含 N 个节点和 k 条超边的超图动力学模型, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & f(x_i(t)) + \sum_{\mathcal{E}_h \in \mathcal{E}} \frac{\sigma_h}{r_h} \sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \cdots a_{ij_{r_h}}^{(h)} \times \\ & g_{\mathcal{E}_h}(x_i, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r_h}}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 为第 i 个节点的状态向量, $\sigma_h (h = 1, 2, \dots, k)$ 为超边 \mathcal{E}_h 的耦合强度, $f(x_i(t)) \in \mathbb{R}^m$ 为描述节点 v_i 自身动力学的连续可微非线性函数, $A = (a_{ij}^{(h)})_{N \times Nk}$ 为定义 1 中描述超图拓扑的邻接矩阵, $g_{\mathcal{E}_h}(\cdot)$ 为描述超边 \mathcal{E}_h 内部节点间非线性耦合关系的函数. 特别地, 假设该耦合函数满足非侵入性条件, 即对于任意同步状态 $x(t)$, 恒有 $g_{\mathcal{E}_h}(x(t), x(t), \dots, x(t)) = 0$.

本文提出的超图动力学模型 (3) 通过子邻接矩阵解构了多体耦合关系, 不仅能有效描述节点间高阶非线性耦合引发的集体同步、分簇与群体行为, 还可扩展作为多智能体协作控制、群体博弈、复杂传播动力学等多种高阶相互作用研究的建模框架, 具有较高的建模灵活性和适用性.

假设 1 对于同步解 x_s , 假设超边 \mathcal{E}_h 的耦合函数 $g_{\mathcal{E}_h}(\cdot)$ 具有如下分解形式:

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{E}_h}(x_i, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r_h}}) = & \\ h_{\mathcal{E}_h}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r_h}}) - h_{\mathcal{E}_h}(x_i, x_i, \dots, x_i). \end{aligned} \quad (4)$$

并且, 对于任意相同的状态输入 x , 不同超边的辅助

函数 $h_{\varepsilon_h}(\cdot)$ 在该输入下的取值均相等,即

$$h_{\varepsilon_1}(x, x, \dots, x) = \dots = h_{\varepsilon_k}(x, x, \dots, x), \quad (5)$$

其中 $h = 1, 2, \dots, k$. 函数 $h_{\varepsilon_h}(\cdot)$ 是定义耦合关系的一个辅助函数.

定义 5 考虑由 N 个节点组成的超图,其动力学由式(3)给出.若存在同步流形

$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) | x_1 = x_2 = \dots = x_N = x_s\}$, 同步解满足 $\dot{x}_s = f(x_s)$,使得当所有节点初始状态满足 $x_i(0)$ 在 \mathcal{M} 附近时,系统状态在耦合作用下随着时间渐近收敛到 \mathcal{M} ,则该系统实现同步稳定.

本文研究的同步稳定性是网络动力学系统的内在特性之一,取决于节点自身动力学、超边耦合拓扑、耦合强度及耦合函数形式等固有参数,并不依赖外部输入.为研究该同步解的稳定性,定义系统状态相对于同步解的偏差变量为 $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_s$.下面对动力学方程在同步流形 $x_1 = x_2 = \dots = x_N = x_s$ 附近进行线性化,以进行线性同步稳定性分析.

引理 1 给定一个由超图 \mathcal{G} 描述耦合关系的动力学方程(3),若其耦合函数 $g_{\varepsilon_h}(\cdot)$ 满足非侵入性,则系统状态在同步解 x_s 附近的线性化动力学行为(描述同步稳定性)可由如下变分方程描述:

$$\delta \dot{x}(t) = \mathbf{JF}(s(t))\delta x(t) - \sum_{\varepsilon_h \in \mathcal{E}} \frac{\sigma_h}{r_h!} (\Phi^{(h)} \otimes \mathbf{JG}^{\varepsilon_h})\delta x(t). \quad (6)$$

其中: $\delta x(t) = [\delta x_1^T(t), \delta x_2^T(t), \dots, \delta x_N^T(t)]^T$ 为系统状态偏差向量, $\mathbf{JF}(x_s) = I_N \otimes \mathbf{Jf}(x_s)$, $\mathbf{JG}^{\varepsilon_h}(x_s)$ 为与耦合函数相关的雅可比矩阵.等效耦合矩阵 $\Phi^{(h)}$ 定义为

$\Phi^{(h)} = (\varphi_{ij}^{(h)})_{N \times N} = (D^{(h)})^{r_h-1} \mathcal{L}^{(h)}$, $h = 1, 2, \dots, k$. 该矩阵的元素可表示为

$$\varphi_{ij}^{(h)} = \begin{cases} (d_i^{(h)})^{r_h-1} l_{ij}^{(h)}, & i \neq j; \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

证明 首先考虑第 h 条超边的耦合函数 $g_{\varepsilon_h}(x_i, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r_h}})$,利用泰勒展开并忽略高阶项,其在同步解 x_s 处的线性化形式为

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon_h}(x_i, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r_h}}) &= \\ \frac{\partial g_{\varepsilon_h}(\cdot)}{\partial x_i} \Big|_{x_s} (x_i(t) - x_s) &+ \frac{\partial g_{\varepsilon_h}(\cdot)}{\partial x_{j_1}} \Big|_{x_s} (x_{j_1}(t) - x_s) + \\ \dots &+ \frac{\partial g_{\varepsilon_h}(\cdot)}{\partial x_{j_{r_h}}} \Big|_{x_s} (x_{j_{r_h}}(t) - x_s) = \\ \mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_i(t) &+ \mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_1}(t) + \\ \dots &+ \mathbf{Jg}_{j_{r_h}}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_{r_h}}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{Jg}_j^{\varepsilon_h}(x_s) = \frac{\partial g_{\varepsilon_h}(\cdot)}{\partial x_j} \Big|_{x_s} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为对节点 j_k 的

状态求偏导得到的雅可比矩阵.

将式(7)代入动力学方程(3)并利用 $\dot{x}_s = f(x_s)$,得到偏差变量 $\delta x_i(t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_i(t) &= \\ \mathbf{Jf}(x_s)\delta x_i(t) &+ \sum_{\varepsilon_h \in \mathcal{E}} \frac{\sigma_h}{r_h!} \sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} \times \\ &[\mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_i(t) + \mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_1}(t) + \\ &\mathbf{Jg}_{j_2}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_2}(t) + \dots + \mathbf{Jg}_{j_{r_h}}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_{r_h}}(t)], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{Jf}(x_s) = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \Big|_{x_s}$ 为函数 $f(\cdot)$ 在同步解 x_s 处的 $m \times m$ 雅可比矩阵.

对于式(8)中的求和项 $\sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)}$,

依据邻接矩阵 A 的定义,元素 $a_{ij}^{(h)}$ 与其所在的超边 ε_h 有关,因此,求和项进一步转化为

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} [\mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_i(t) + \\ &\mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_1}(t) + \dots + \mathbf{Jg}_{j_{r_h}}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_{r_h}}(t)] = \\ &\sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} \mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_i(t) + \\ &\sum_{j_2, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} \sum_{j_1=1}^N a_{ij_1}^{(h)} \mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_1}(t) + \dots + \\ &\sum_{j_1, \dots, j_{r_h-1}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h-1}}^{(h)} \sum_{j_r=1}^N a_{ij_r}^{(h)} \mathbf{Jg}_{j_r}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_r}(t) = \\ &\sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} \mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_i(t) + \\ &(d_i^{(h)})^{r_h-1} \sum_{j_1=1}^N a_{ij_1}^{(h)} \mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_1}(t) + \dots + \\ &(d_i^{(h)})^{r_h-1} \sum_{j_{r_h}=1}^N a_{ij_{r_h}}^{(h)} \mathbf{Jg}_{j_{r_h}}^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_{j_{r_h}}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

考虑到耦合函数 $g^{\varepsilon_h}(\cdot)$ 具有同步非侵入性,即 $g^{\varepsilon_h}(x_s, \dots, x_s) = 0$.对其求关于第1个变量(对应 x_i)的偏导,再对后面 r_h 个变量(对应 x_{j_k})求偏导,并在同步状态 x_s 处求值,根据链式法则,可以推断出

$$\mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s) + \mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s) + \dots + \mathbf{Jg}_{j_{r_h}}^{\varepsilon_h}(x_s) = 0. \quad (10)$$

因此,利用性质(10),有

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} \mathbf{Jg}_i^{\varepsilon_h}(x_s)\delta x_i(t) = \\ &- (d_i^{(h)})^{r_h} (\mathbf{Jg}_{j_1}^{\varepsilon_h}(x_s) + \dots + \mathbf{Jg}_{j_{r_h}}^{\varepsilon_h}(x_s)). \end{aligned} \quad (11)$$

根据(11)式,并且结合定义3中拉普拉斯矩阵的定义,式(9)可以进一步简化为

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)} [\mathbf{J}g_i^{\mathcal{E}_h}(x_s) \delta x_i(t) + \\ & \mathbf{J}g_{j_1}^{\mathcal{E}_h}(x_s) \delta x_{j_1}(t) + \dots + \mathbf{J}g_{j_{r_h}}^{\mathcal{E}_h}(x_s) \delta x_{j_{r_h}}(t)] = \\ & (d_i^{(h)})^{r_h-1} \sum_{j_1=1}^N l_{ij_1}^{(h)} \mathbf{J}g_{j_1}^{\mathcal{E}_h}(x_s) \delta x_{j_1}(t) + \dots + \\ & (d_i^{(h)})^{r_h-1} \sum_{j_{r_h}=1}^N l_{ij_{r_h}}^{(h)} \mathbf{J}g_{j_{r_h}}^{\mathcal{E}_h}(x_s) \delta x_{j_{r_h}}(t) = \\ & (d_i^{(h)})^{r_h-1} \sum_{j=1}^N l_{ij}^{(h)} (\mathbf{J}g_{j_1}^{\mathcal{E}_h}(x_s) + \mathbf{J}g_{j_2}^{\mathcal{E}_h}(x_s) + \\ & \mathbf{J}g_{j_3}^{\mathcal{E}_h}(x_s) + \dots + \mathbf{J}g_{j_{r_h}}^{\mathcal{E}_h}(x_s)) \delta x_j(t). \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 结合式 (12), 超图的系统模型 (8) 转化为

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_i(t) &= \mathbf{J}f(s(t)) \delta x_i(t) - \\ & \sum_{\mathcal{E}_h \in \mathcal{E}} \frac{\sigma_h}{r_h!} \sum_{j=1}^N (d_i^{(h)})^{r_h-1} l_{ij}^{(h)} (\mathbf{J}g_{j_1}^{\mathcal{E}_h}(x_s) + \\ & \mathbf{J}g_{j_2}^{\mathcal{E}_h}(x_s) + \dots + \mathbf{J}g_{j_{r_h}}^{\mathcal{E}_h}(x_s)) \delta x_j(t). \end{aligned} \quad (13)$$

定义 $\mathbf{J}G^{\mathcal{E}_h} = \mathbf{J}g_{j_1}^{\mathcal{E}_h}(x_s) + \dots + \mathbf{J}g_{j_{r_h}}^{\mathcal{E}_h}(x_s)$. 根据子度矩阵 $D^{(h)}$ 的定义 (见定义 4) 以及子拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}^{(h)}$, 并利用克罗内克积, 可以将所有节点的线性化方程 (13) 写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \mathbf{J}F(s(t)) \delta x(t) - \\ & \frac{\sigma_1}{r_1!} ((D^{(1)})^{r_1-1} \mathcal{L}^{(1)} \otimes \mathbf{J}G^{\mathcal{E}_1}) \delta x(t) - \\ & \dots - \frac{\sigma_k}{r_k!} ((D^{(k)})^{r_k-1} \mathcal{L}^{(k)} \otimes \mathbf{J}G^{\mathcal{E}_k}) \delta x(t) = \\ & \mathbf{J}F(s(t)) \delta x(t) - \sum_{\mathcal{E}_h \in \mathcal{E}} \frac{\sigma_h}{r_h!} (\Phi^{(h)} \otimes \mathbf{J}G^{\mathcal{E}_h}) \delta x(t). \end{aligned} \quad (14)$$

引理 1 得证. \square

借助与各超边关联的子拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}^{(h)}$ 以及耦合函数 $g_{\mathcal{E}_h}(\cdot)$ 的非侵入性等性质, 由引理 1 推导得到超图系统等价变分方程 (6). 方程中描述超边 \mathcal{E}_h 耦合贡献的等效耦合矩阵 $\Phi^{(h)} = (D^{(h)})^{r_h-1} \mathcal{L}^{(h)}$ 是一个 $N \times N$ 方阵. 相较于现有文献^[10-11] 中处理超图同步问题的一些方法, 本文所提出的分析方法能够更紧密地融合超图的拓扑结构信息 (体现在 $\Phi^{(h)}$ 中) 与节点间的非线性耦合特性 (体现在 $\mathbf{J}G^{\mathcal{E}_h}$ 中).

注 1 对系统 (8) 线性化时, 利用传统张量方法

难以直接处理耦合求和项 $\sum_{j_1, \dots, j_{r_h}=1}^N a_{ij_1}^{(h)} a_{ij_2}^{(h)} \dots a_{ij_{r_h}}^{(h)}$,

因此本文利用所提出的拓扑结构的定义方法能够将系统模型进行简化. 首先, 利用子邻接矩阵 $A^{(h)}$ 的结构, 将元素 $a_{ij}^{(h)}$ 与有关超边耦合函数的雅可比矩阵

$\mathbf{J}g_j^{\mathcal{E}_h}(x_s)$ 相结合, 进而将求和项分离; 其次, 通过节点度 $d_i^{(h)}$ 和非侵入性条件, 将对角项 $\mathbf{J}g_i^{\mathcal{E}_h}(x_s)$ 与非对角项 $\mathbf{J}g_{j_k}^{\mathcal{E}_h}(x_s)$ 合并, 从而得到一个关于子拉普拉斯矩阵 $L^{(h)}$ 的线性动力学模型 (13).

为便于运用 MSF 方法分析超图的同步稳定性, 关键步骤在于采用基于特征值的方法对系统进行解耦, 进而考虑解耦后各子系统的稳定性. 然而, 本文定义的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 并非方阵. 因此, 为满足 MSF 分析框架对耦合矩阵为方阵的要求, 本文的核心思路在于: 将超图中由超边表现的多体相互作用等效地转化为基于每条超边 \mathcal{E}_h 内部节点间的耦合关系, 进而可以刻画每个节点 v_i 通过不同超边 \mathcal{E}_h 所受到的耦合影响.

3 超图的同步稳定性

为利用 MSF 方法对超图的系统模型 (6) 进行解耦并分析超图的同步稳定性, 进一步将该模型转化为适用于 MSF 分析的标准形式.

定理 1 令假设 1 成立. 对于由超图 \mathcal{G} 描述的力学系统 (3), 若其耦合函数满足非侵入性条件, 则基于引理 1 中得到的同步解 x_s 附近的线性化动力学变分方程 (6), 可以进一步表示为如下形式:

$$\delta \dot{x}(t) = \mathbf{J}F(s(t)) \delta x(t) - \sigma_1 (\tilde{\Phi} \otimes \mathbf{J}H) \delta x(t), \quad (15)$$

其中等效耦合矩阵 $\tilde{\Phi}$ 定义为

$$\tilde{\Phi} = \Phi^{(1)} + \frac{\sigma_2}{2! \sigma_1} \Phi^{(2)} + \dots + \frac{\sigma_h}{r_h! \sigma_1} \Phi^{(h)}. \quad (16)$$

基于此动力学方程 (15), 超图的同步稳定性可以分为 3 类 (λ_i 为 $\tilde{\Phi}$ 的非零特征值):

- 1) 任意拓扑结构下, 超图均无法实现同步稳定;
- 2) 对于任意 $\sigma_1 \lambda_i$, 当 $\sigma_1 \lambda_i > \omega_c$ 时, 超图可以实现同步稳定, $(\omega_c, 0)$ 是 MSF 曲线与横轴的唯一交点;
- 3) 对于任意 $\sigma_1 \lambda_i$, 当其落在稳定区间 $(\omega_{c1}, \omega_{c2})$ 内, 超图可以实现同步稳定, 且 $(\omega_{c1}, 0)$ 和 $(\omega_{c2}, 0)$ 是 MSF 曲线与横轴的两个交点, $0 < \omega_{c1} < \omega_{c2}$.

证明 在超图的等价变分方程 (6) 中, 存在与耦合函数相关的雅可比矩阵 $\mathbf{J}G^{\mathcal{E}_h}(x_s)$ 可能随超边 \mathcal{E}_h 的不同而变化, 这使得直接应用需要单一耦合雅可比矩阵的 MSF 方法变得困难.

基于假设 1 中对耦合函数的假设, 考虑 $g_{\mathcal{E}_h}$ 对 $x_{j_k} (k = 1, 2, \dots, r_h)$ 的偏导, 可以得到

$$\mathbf{J}G^{\mathcal{E}_h} = \sum_{k=1}^{r_h} \mathbf{J}h_k^{\mathcal{E}_h}(x_s) =: \mathbf{J}H^{\mathcal{E}_h}, \quad (17)$$

其中 $\mathbf{J}H^{\mathcal{E}_h} = \sum_{k=1}^{r_h} \mathbf{J}h_k^{\mathcal{E}_h}(x_s)$ 为由辅助函数 $h_{\mathcal{E}_h}$ 的雅可比导出的矩阵.

根据假设 1 的式 (5), 进一步得到

$$\mathbf{JH}^{\varepsilon_1} = \mathbf{JH}^{\varepsilon_2} = \dots = \mathbf{JH}^{\varepsilon_k} = \mathbf{JH}, \quad (18)$$

其中 \mathbf{JH} 是一个与具体超边 h 无关的 $m \times m$ 雅可比矩阵.

利用式 (17) 和 (18), 超图在同步解 x_s 处的等价动力学方程可以重写为

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) = & \mathbf{JF}(s(t))\delta x(t) - \sum_{\varepsilon_h \in \mathcal{E}} \frac{\sigma_h}{r_h!} (\Phi^{(h)} \otimes \mathbf{JH})\delta x(t) = \\ & \mathbf{JF}(s(t))\delta x(t) - \left(\left(\sigma_1 \Phi^{(1)} + \frac{\sigma_2}{2!} \Phi^{(2)} + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\sigma_h}{r_h!} \Phi^{(h)} \right) \otimes \mathbf{JH} \right) \delta x(t) = \\ & \mathbf{JF}(s(t))\delta x(t) - \sigma_1 \left(\left(\Phi^{(1)} + \frac{\sigma_2}{2! \sigma_1} \Phi^{(2)} + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\sigma_h}{r_h! \sigma_1} \Phi^{(h)} \right) \otimes \mathbf{JH} \right) \delta x(t). \end{aligned} \quad (19)$$

因此, 超图系统的线性化动力学方程 (3) 转化为如下标准 MSF 形式:

$$\delta \dot{x}(t) = \mathbf{JF}(s(t))\delta x(t) - \sigma_1 (\tilde{\Phi} \otimes \mathbf{JH})\delta x(t). \quad (20)$$

超图的等价变分方程 (6) 转化为包含单个等效耦合矩阵 $\tilde{\Phi}$ 和雅可比矩阵 \mathbf{JH} 的标准 MSF 形式, 如式 (20). 矩阵 $\tilde{\Phi}$ 是一个 $N \times N$ 的方阵, 它综合了所有超边的拓扑结构信息以及相对耦合强度 $\sigma_h/r_h!$ 的权重, $\mathbf{JH}(x_s)$ 刻画了节点间的耦合作用方式. 因此, 可以通过分析矩阵 $\tilde{\Phi}$ 的特征值 λ_i 来应用 MSF 方法.

利用变量替换的方法, 引入变换 $\delta x(t) = V\delta y(t)$, 可以将系统方程 (20) 映射到特征空间. 经过变换, 耦合动力学方程 (20) 变为

$$\delta \dot{y}(t) = \mathbf{JF}(x_s)\delta y(t) - \sigma_1 (\Lambda \otimes \mathbf{JH})\delta y(t). \quad (21)$$

其中: V 为矩阵 $\tilde{\Phi}$ 的特征向量矩阵, $\Lambda = V^{-1}\tilde{\Phi}V$ 为等效耦合矩阵 $\tilde{\Phi}$ 的特征矩阵, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

式 (21) 实际上代表了 N 个解耦子系统, 因此解耦后的每个节点 $\delta y_i(t)$ 的动力学由下式描述:

$$\delta \dot{y}_i(t) = \mathbf{Jf}(x_s)\delta y_i(t) - \omega_i \delta y_i(t), \quad (22)$$

其中 $\omega_i = \sigma_1 \lambda_i$.

通过分析子系统 (22) 的稳定性, 本文能够综合考虑超图的拓扑结构和节点间的耦合关系来研究同步稳定性. 同时, 运用 MSF 方法, 关注耦合强度和拓扑结构对超图同步稳定性的影响. MSF 定义为子系统 (22) 的最大李雅普诺夫指数, 它是参数 $\omega = \sigma_1 \lambda_i$ 的函数: $\Upsilon_{\max} = \Upsilon_{\max}(\omega)$, 其中 λ_i 为 $\tilde{\Phi}$ 的非零特征值. 系统实现同步的充要条件是, 对于所有非零特征值 λ_i , 总有 $\Upsilon_{\max}(\sigma_1 \lambda_i) < 0$. 基于 MSF $\Upsilon_{\max}(\omega)$ 的形状,

可以将超图的同步稳定性分为以下 3 类:

1) 对于所有可能的 $\omega = \sigma_1 \lambda_i$, $\Upsilon_{\max}(\omega)$ 始终大于零, 在这种情况下, 无论如何选择耦合强度 σ_1 和超图拓扑 (即改变 $\tilde{\Phi}$ 的特征值 λ_i), 系统都无法实现同步.

2) $\Upsilon_{\max}(\omega)$ 与横轴相交一次, 存在一个临界值 $\omega_c > 0$. 系统实现同步的条件是所有 $\sigma_1 \lambda_i$ 都落在稳定区域内, 即 $\sigma_1 \lambda_i > \omega_c$. 此时同步阈值为

$$\sigma^{\text{critical}} = \omega_c / \lambda_{\min},$$

其中 λ_{\min} 为 $\tilde{\Phi}$ 的最小非零正特征值.

3) $\Upsilon_{\max}(\omega)$ 与横轴有两个交点, 定义稳定区间 $(\omega_{c1}, \omega_{c2}) (0 < \omega_{c1} < \omega_{c2})$. 系统实现同步的条件是, 对于所有非零特征值 λ_i , 对应的 $\sigma_1 \lambda_i$ 必须落在稳定区间内, 这通常转化为对耦合强度 σ_1 的要求

$$\sigma_1 \lambda_{\min}^{\text{effective}} > \omega_{c1}, \quad \sigma_1 \lambda_{\max}^{\text{effective}} > \omega_{c2},$$

其中 $\lambda_{\min}^{\text{effective}}$ 和 $\lambda_{\max}^{\text{effective}}$ 分别为 $\tilde{\Phi}$ 的最小和最大非零特征值. 在这种情况下, 比值 $\lambda_{\max}^{\text{effective}} / \lambda_{\min}^{\text{effective}}$ 可以视为衡量超图拓扑结构同步能力的一个指标. 该比值越接近 1, 意味着允许同步的耦合强度 σ_1 的范围可能越宽.

对于第 3 类系统, 同步稳定性对耦合强度 σ_1 的选择尤为敏感. 如果 σ_1 选择不当 (过小或过大), 则系统很可能会失同步. 因此, 基于超图的标准 MSF 形式 (15) 以及解耦得到的变分子系统 (22), 超图 (3) 中节点之间的耦合关系以及其拓扑结构与其同步稳定性之间的关系被分为 3 类进行分析讨论. □

4 数值仿真与验证

为进一步验证所提出基于 MSF 分析超图同步稳定性的有效性, 分别选取 Rössler 振子和蔡氏电路作为节点动力学, 并在一个具体的超图结构上进行数值仿真.

考虑一个包含 $N = 5$ 个节点 $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $k = 4$ 条超边 $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4\}$ 的超图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. 其拓扑结构如图 1 所示, 各超边包含的节点分别为 $\mathcal{E}_1 = \{3, 4\}$, $\mathcal{E}_2 = \{1, 3, 5\}$, $\mathcal{E}_3 = \{2, 4, 5\}$, $\mathcal{E}_4 = \{2, 3, 4, 5\}$, 即一条绿色超边的大小为 2 (连接节点 3 和 4), 两条黄色超边的大小为 3 (分别连接节点 1、3、5 和节点 2、4、5), 一条蓝色超边的大小为 4 (连接节点 2、3、4、5). 对于每个节点 i , 其状态向量定义为

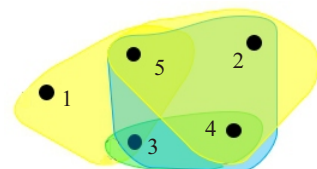


图1 超图的拓扑结构

$$x_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}]^T \in \mathbb{R}^3.$$

设定不同超边的耦合强度分别为: 超边 \mathcal{E}_1 的耦合强度为 σ_1 , 超边 \mathcal{E}_2 和 \mathcal{E}_3 的耦合强度均为 σ_2 , 超边 \mathcal{E}_4 的耦合强度为 σ_3 . 基于该超图拓扑, 并根据假设 1, 下面两组关于 4 条超边的非线性耦合函数 $g_{\mathcal{E}_h}(\cdot)$ 分别选取为

$$1) g_{\mathcal{E}_1}(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} x_{j1}^3 \\ x_{j2}^3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{i1}^3 \\ x_{i2}^3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_{\mathcal{E}_2}(x_i, x_j, x_k) = g_{\mathcal{E}_3}(x_i, x_j, x_k) = \begin{bmatrix} x_{j1}^2 x_{k1} \\ x_{j2}^2 x_{k2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{i1}^3 \\ x_{i2}^3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_{\mathcal{E}_\Delta}(x_i, x_j, x_k, x_m) = \begin{bmatrix} x_{j1} x_{k1} x_{m1} \\ x_{j2} x_{k2} x_{m2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{i1}^3 \\ x_{i2}^3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$2) g_{\mathcal{E}_1}(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{j2}^3 \\ x_{j3}^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ x_{i2}^3 \\ x_{i3}^3 \end{bmatrix},$$

$$g_{\mathcal{E}_2}(x_i, x_j, x_k) = g_{\mathcal{E}_3}(x_i, x_j, x_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{j2}^2 x_{k2} \\ x_{j3}^2 x_{k3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ x_{i2}^3 \\ x_{i3}^3 \end{bmatrix},$$

$$g_{\mathcal{E}_4}(x_i, x_j, x_k, x_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{j2} x_{k2} x_{m2} \\ x_{j3} x_{k3} x_{m3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ x_{i2}^3 \\ x_{i3}^3 \end{bmatrix}.$$

4.1 耦合 Rössler 振子

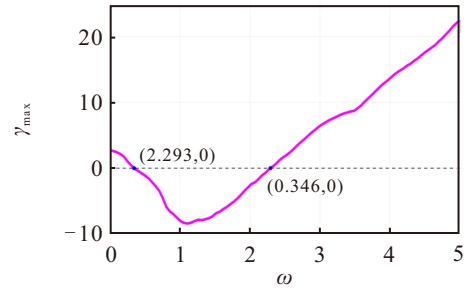
考虑一个耦合 Rössler 振子超图系统, 其动力学方程描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = -x_{i2} - x_{i3} + \sum_{\mathcal{E}_h=\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_4} \sum_{j=1}^5 \frac{\sigma_h}{r_h!} a_{ij}^{(h)} g_{\mathcal{E}_h}(x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{r_h}}), \\ \dot{x}_{i2} = x_{i1} + a_1 x_{i2}, \\ \dot{x}_{i3} = b_1 + x_{i3}(x_{i1} - c_1). \end{cases} \quad (23)$$

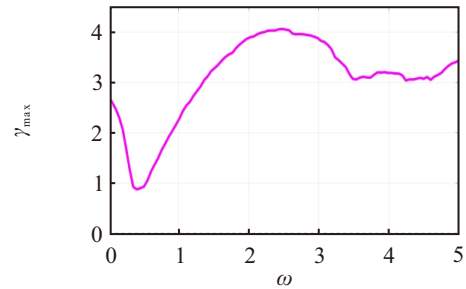
其中: $i = 1, 2, 3, 4, 5$; $g_{\mathcal{E}_h}(\cdot)$ 为超边 \mathcal{E}_h 的耦合函数向量; 系统参数设置为 $a_1 = b_1 = 0.2, c_1 = 5.7$.

图 2 为 Rössler 振子超图的 MSF 曲线, 即最大李雅普诺夫指数 Υ_{\max} 随参数 $\omega = \sigma_1 \lambda$ 的变化关系. 通过考虑两种不同的非线性耦合函数情况, 图 2(a) 对应于第 1 组耦合函数的计算结果. 该 MSF 曲线表现出定理 1 的第 3 类特征. 具体地, 当参数 ω 的值落在区间 $(0.346, 2.293)$ 内时, $\Upsilon_{\max}(\omega) < 0$, 表明此情况下的超图是稳定的. 基于 MSF 的这一预测, 选取一组特定的耦合强度参数: $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.092, \sigma_3 = 0.221$. 通过计算在此参数下 $\tilde{\varphi}$ 的特征值 λ_i , 并得到对应的 $\omega_i = 0.1 \lambda_i$, 验证了所有的 ω_i 值确实均位于稳定区间 $(0.353, 2.313)$ 内. 图 3(a) 展示了网络中所有节点状态 $x_i(t)$ 随时间的轨迹, 可以观察其最终趋于一致, 这与 MSF 的预测相符.

致, 这与 MSF 的预测相符.

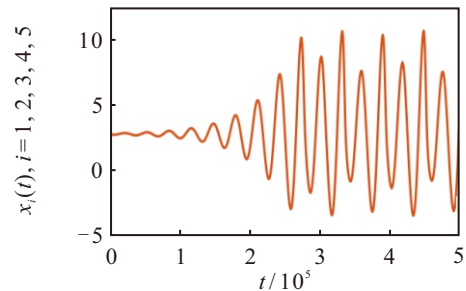


(a) 第1组耦合函数

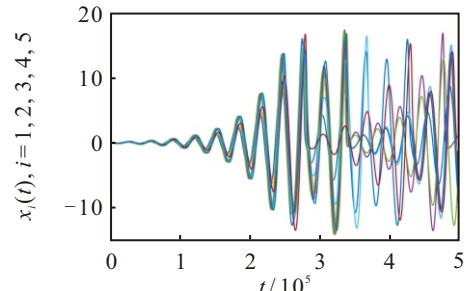


(b) 第2组耦合函数

图2 Rössler 振子超图的同步稳定性分析



(a) 第1组耦合函数



(b) 第2组耦合函数

图3 超图的节点状态 $x_i(t)$ 轨迹

同时, 图 2(b) 展示了考虑第 2 组耦合函数计算得到的 MSF 曲线. 该曲线始终位于横轴上方, 即 $\Upsilon_{\max}(\omega) > 0$ 对所有 ω 值均成立, 这对应于定理 1 中的第 1 类不稳定情况. 为验证预测结果, 选取一组耦合强度: $\sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.03, \sigma_3 = 0.08$, 图 3(b) 体现了相应耦合强度下节点状态 $x_i(t)$ 随时间的轨迹. 通过观察图 3(b) 可以发现, 系统状态保持发散或持续的非同步振荡行为, 验证了定理 1 中对于 MSF 曲线第 1 类情况结果预测的准确性.

4.2 蔡氏电路

蔡氏电路超图系统的动力学方程描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a_2(y_i - x_i - f(x_i)) + \\ \sum_{\varepsilon_h=\varepsilon_1}^{\varepsilon_4} \sum_{j=1}^5 \frac{\sigma_h}{r_h!} a_{ij}^{(h)} g_{\varepsilon_h}(x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{r_h}}), \\ \dot{y}_i = x_i - y_i + z_i, \\ \dot{z}_i = -b_2 y_i. \end{cases} \quad (24)$$

其中: $a_2 = 15.6, b_2 = 28, f(x_i) = m_1 x_i + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_i + 1| - |x_i - 1|), m_0 = -8/7, m_1 = -5/7.$

图4展示了蔡氏电路超图的同步稳定性分析. 首先分析图4(a)所对应的情况. 显然, 该MSF曲线所表现的稳定性情况体现在定理1中第2类情形, 其揭示了一个明确的同步区域. 具体而言, 当参数 ω 的值大于临界点0.968时, 有 $\Upsilon_{\max}(\omega) < 0$, 即只要耦合参数 ω 落在稳定区间 $(0.968, +\infty)$ 内, 该超图网络就是同步稳定的. 为了对这一理论预测进行数值验证, 在稳定区间内任意选取一组耦合强度参数 $\sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 0.2, \sigma_3 = 0.03$, 图5(a)展示了在此参数下网络中所有节点状态 $x_i(t)$ 随时间的变化轨迹. 从图中可以观察到, 尽管初始状态不同, 但所有节点的轨迹最终收敛并完全重合, 系统达到同步状态. 这与MSF曲线预测的结果一致, 从而验证了本文在定理1中基于超图模型分析系统同步稳定性所得到的理论结果的有效性.

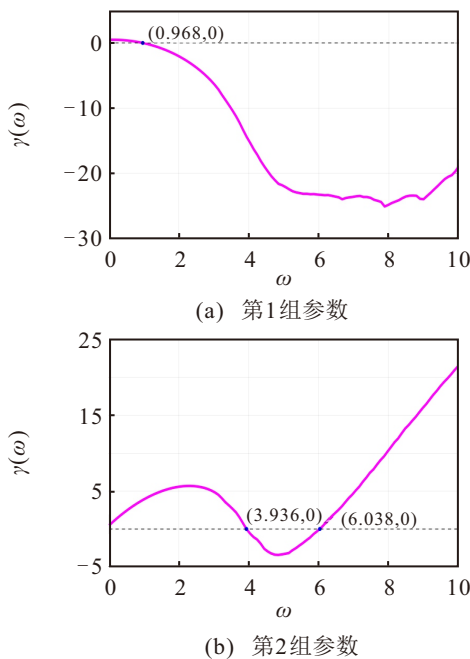


图4 蔡氏电路超图的同步稳定性分析

与此相对, 图4(b)展示了在另一组耦合函数下计算得到的MSF曲线. 该曲线的稳定性情况与图2(a)

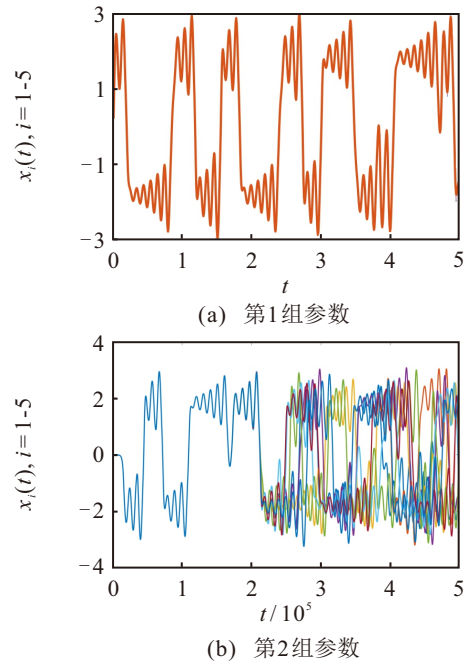


图5 超图的节点状态 $x_i(t)$ 轨迹

相似, 均体现了定理1中第3种情形, 其存在一个封闭的稳定区间 $(3.936, 6.038)$. 与图3(a)所考虑情况不同, 为了验证图4(b)非同步情况, 在非稳定区域选取一组耦合强度 $\sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.1, \sigma_3 = 0.09$, 图5(b)给出了此耦合参数下节点状态 $x_i(t)$ 随时间演化轨迹. 如图所示, 各个节点的状态轨迹无法收敛到同一状态, 呈现出持续的、复杂的非同步振荡行为. 这一仿真结果同样有力地验证了MSF方法的预测能力: 只有当系统参数落在MSF预测的稳定域内时, 网络才能实现同步.

5 结论

本文首先提出了一种新颖的超图矩阵表示方法, 该方法通过子邻接矩阵刻画了节点间连接和节点-超边关联关系. 基于此, 构建了超图动力学模型, 并将变分方程转化为包含耦合矩阵和耦合雅可比矩阵的标准MSF形式. 运用MSF方法, 对超图网络的同步稳定性进行了讨论. 最后, 选取Rössler振子和蔡氏电路作为节点动力学进行了数值仿真, 验证了所提出理论结果的有效性. 与传统网络相比, 超图能够刻画更复杂的多体相互作用, 使得控制策略可以同时结合多节点状态进行设计, 拓展了分布式控制的鲁棒性. 此外, 该高阶相互作用结构也可用于多智能体群体内外的协作与对抗决策建模, 为研究基于高阶网络的混合博弈及分布式最优策略提供了理论基础.

参考文献 (References)

[1] Estrada E, Hatano N, Benzi M. The physics of communicability in complex networks[J]. *Physics*

- Reports, 2012, 514(3): 89-119.
- [2] 谭璐, 姜璐. 系统生物学与生物网络研究[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2005, 2(4): 1-9.
(Tian L, Jiang L. A review on system biology and the research of biological networks[J]. Complex Systems and Complexity Science, 2005, 2(4): 1-9.)
- [3] Herrera M, Pérez-Hernández M, Kumar Parlikad A, et al. Multi-agent systems and complex networks: Review and applications in systems engineering[J]. Processes, 2020, 8(3): 312.
- [4] Patania A, Petri G, Vaccarino F. The shape of collaborations[J]. EPJ Data Science, 2017, 6(1): 18.
- [5] Li Z F, Liang A M, Xu M Q. Author network of arctic social science research in China[J]. World Regional Studies, 2018, 27(3): 30-41.
- [6] Wang J A, Yang Z L, Wang X, et al. Finite-time synchronization of delayed complex network under event-dependent intermittent control[J]. Control and Decision, 2024, 39(11): 3673-3680.
- [7] Olmi S, Gambuzza L V, Frasca M. Multilayer control of synchronization and cascading failures in power grids[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2024, 180: 114412.
- [8] Xi X J, Li J H, Wang Z, et al. The effect of high-order interactions on the functional brain networks of boys with ADHD[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2024, 233(4): 817-829.
- [9] Contisciani M, Battiston F, de Bacco C. Inference of hyperedges and overlapping communities in hypergraphs[J]. Nature Communications, 2022, 13: 7229.
- [10] Cheng D Y, Guo J L. Node classification method of higher order network based on graph attention[J]. Application Research of Computers, 2023, 40(4): 1095-1100.
- [11] Gambuzza L V, Di Patti F, Gallo L, et al. Stability of synchronization in simplicial complexes[J]. Nature Communications, 2021, 12: 1255.
- [12] 向雨竹, 邹文成, 郭健, 等. 无人机领导的多无人艇系统固定时间优化编队控制[J]. 控制与决策, 2025, 40(1): 223-230.
(Xiang Y Z, Zou W C, Guo J, et al. Fixed-time optimal formation control for multi-unmanned surface vessels under the leadership of unmanned aerial vehicle[J]. Control and Decision, 2025, 40(1): 223-230.)
- [13] Anwar M S, Sar G K, Perc M, et al. Collective dynamics of swarmalators with higher-order interactions[J]. Communications Physics, 2024, 7: 59.
- [14] 纪良浩, 翟盼盼, 李华青. 基于事件触发机制的分布式经济调度加速优化算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(4): 1217-1227.
(Ji L H, Zhai P P, Li H Q. Distributed event-triggered accelerated optimization algorithm for solving smart grid economic dispatch problem on directed unbalanced communication topology[J]. Control and Decision, 2025, 40(4): 1217-1227.)
- [15] Boccaletti S, de Lellis P, del Genio C I, et al. The structure and dynamics of networks with higher order interactions[J]. Physics Reports, 2023, 1018: 1-64.
- [16] Wang Y, Chen S, Yang M L, et al. Low-frequency oscillation in power grids with virtual synchronous generators: A comprehensive review[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2025, 207: 114921.
- [17] Gao C L, Lao X L, Cen Y Z, et al. Realization of grid connection control of diesel generator set in offshore platform grid[J]. Petrochemical Industry Technology, 2025, 32(5): 85-87.
- [18] Jiruska P, de Curtis M, Jefferys J G R, et al. Synchronization and desynchronization in epilepsy: Controversies and hypotheses[J]. The Journal of Physiology, 2013, 591(4): 787-797.
- [19] Mulas R, Kuehn C, Jost J. Coupled dynamics on hypergraphs: Master stability of steady states and synchronization[J]. Physical Review E, 2020, 101(6): 062313.
- [20] Zhou Y P, Gan X L, Liu X X, et al. Partial component consensus of second-order multi-agent systems via adaptive intermittent pinning control[J]. Control and Decision, 2023, 38(10): 2996-3002.
- [21] Zhang L Y, Guo J F, Wang J Z, et al. Hypergraph and uncertain hypergraph representation learning theory and methods[J]. Mathematics, 2022, 10(11): 1921.
- [22] Yu Z X, Li J T, Chen L, et al. Unifying multi-associations through hypergraph for bundle recommendation[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 255: 109755.

作者简介

苑文颖 (1996-), 女, 博士生, 主要研究方向为高阶非线性系统分析与安全控制, E-mail: wenyinyuan-nj@njust.edu.cn;

顾伟 (1995-), 男, 博士后, 主要研究方向为风力发电系统控制, E-mail: dafenguwei@126.com;

张天良 (1991-), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为随机系统分析与控制, E-mail: t_lzhang@163.com;

童天驰 (1992-), 男, 博士生, 主要研究方向为复杂网络建模与分析, E-mail: t_c_tong@njust.edu.cn;

董倩 (1994-), 女, 博士生, 主要研究方向为复杂动态网络的故障诊断, E-mail: dongqian1994@njust.edu.cn;

孙金生 (1967-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为多智能体协同控制, E-mail: jssun67@163.com.