

控制与决策

Control and Decision

基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法

曾骏驰, 张欣, 钱鹏江, 方伟

引用本文:

曾骏驰, 张欣, 钱鹏江, 等. 基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 153-164.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0535>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for manyobjective optimization
控制与决策. 2021, 36(8): 1804-1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

基于分解的多目标多因子进化算法

A multiobjective multifactorial evolutionary algorithm based on decomposition
控制与决策. 2021, 36(3): 637-644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0525>

尺度自适应的多特征融合相关滤波目标跟踪算法

Scale adaptation and multi-feature fusion correlation filtering object tracking algorithm
控制与决策. 2021, 36(2): 429-435 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0445>

一种求解约束多目标问题的协作进化算法

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems
控制与决策. 2021, 36(11): 2656-2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

基于TOPSIS方法改进的多属性决策模型:最小化偏好反转

Modified MCDM model based on TOPSIS method: Minimizing preference reversal
控制与决策. 2021, 36(1): 216-225 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0536>

基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法

曾骏驰, 张欣[†], 钱鹏江, 方伟

(江南大学 人工智能与计算机学院, 无锡 214122)

摘要: 针对高维多目标优化问题中普遍存在的解集多样性维持困难、收敛性不足及复杂帕累托前沿适应性差等挑战, 提出一种基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法. 首先, 针对多样性和收敛性平衡问题, 提出一种基于灰色关联度的环境选择策略, 该策略通过灰色相似关联度衡量种群在目标空间的分布差异, 同时采用灰色接近关联度量化解与理想点的空间距离. 前者用于维持多样性, 后者能够保证收敛性. 在此基础上, 设计一种参考向量自适应更新策略, 通过动态生成新向量与周期性删减冗余向量, 追踪复杂帕累托前沿的拓扑演化. 实验结果表明, 在 9 个 DTLZ 系列基准问题和 2 个实际工程问题中, 所提算法在收敛性和多样性方面均显著优于其他 4 个代表性对比算法.

关键词: 高维多目标优化; 灰色相似关联度; 灰色接近关联度; 自适应参考向量; 多样性; 收敛性

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0535

引用格式: 曾骏驰, 张欣, 钱鹏江, 等. 基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法 [J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 153-164.

Grey relation-based evolutionary algorithm with self-adaptive reference vectors for many-objective optimization

ZENG Jun-chi, ZHANG Xin[†], QIAN Peng-jiang, FANG Wei

(School of Artificial Intelligence and Computer Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: To address the challenges of maintaining solution diversity, insufficient convergence, and inadequate adaptability to complex Pareto fronts in many-objective optimization problems, this paper proposes a grey relation-based evolutionary algorithm with self-adaptive reference vectors. First, to balance the diversity and convergence, a novel environmental selection strategy based on grey relational degree is proposed. This strategy employs grey similitude relational degree to measure distribution differences of solutions in the objective space, and adopts grey closeness relational degree to quantify the spatial distance between solutions and the ideal point. The former maintains diversity, whereas the latter ensures convergence. Then, a reference vector adaptation strategy is developed to track the topological evolution of complex Pareto fronts through dynamic insertion of new vectors and periodic deletion of redundant vectors. Experimental results on 9 DTLZ benchmark problems and two real-world cases demonstrate that the proposed algorithm significantly outperforms four other state-of-the-art algorithms in both convergence and diversity metrics.

Keywords: many-objective optimization; grey similitude relational degree; grey closeness relational degree; self-adaptive reference vector; diversity; convergence

0 引言

高维多目标优化问题 (MaOPs) 是指涉及 4 个及以上冲突性目标的复杂优化问题. 相较于传统多目标优化, 这类问题的目标空间维度随冲突性目标数量增加而显著升高, 导致解集在目标空间的分布稀疏性与支配关系弱化呈指数级恶化, 算法需同时应

对收敛性不足与多样性失衡的双重挑战^[1]. 由于目标空间的非线性关联与部分冲突特性, 算法需在高维空间中构建具有均衡特性的解集, 而非追求单一最优方案. 此类问题在智能制造、金融投资组合优化及环境能源系统设计等领域尤为常见, 其求解技术直接影响着大规模复杂系统的决策效率与鲁棒性.

收稿日期: 2025-05-24; 录用日期: 2025-08-28.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目 (62106088).

责任编委: 巩敦卫.

[†]通信作者. E-mail: zhangxin@jiangnan.edu.cn.

进化算法通过模拟自然选择、交叉和变异等生物进化机制,在解空间中并行搜索全局最优解.进化算法的群体智能特性使其在处理非线性、不可微或高维复杂优化问题时展现出显著优势.对于 MaOPs,多目标进化算法(MOEA)展现出独特适应性.基于分解的 MOEAs(如 NSGA-III^[2])将高维目标空间映射至一组均匀分布的权重向量,既缓解了维度灾难,又保证了帕累托前沿的均匀性;指标驱动的 MOEAs(如 IEAPG^[3])创新性地引入超体积等性能指标直接指导种群进化,通过量化解集的收敛性和多样性,规避了传统帕累托支配关系在高维空间失效的难题;基于多种群协同的 MOEAs(如 M-MOGA^[4])利用多种群并行探索目标空间,显著提升了对高维帕累托前沿结构的多样性覆盖能力,并降低了搜索过程的计算复杂度.

传统的基于分解的方法和基于多种群协同的方法对不规则 PF 的适应性较差.基于分解的方法虽通过均匀参考向量简化问题,但是向量的分布与真实 PF 的几何特性存在显著偏差.当实际 PF 呈现非均匀、不连续或退化形态时,解集多样性显著下降^[5].基于多种群协同的方法对动态变化的高维 PF 拓扑结构缺乏自适应调整能力,容易陷入局部最优,进而影响解集的均匀程度.不仅如此,指标驱动的方法虽能通过超体积等指标量化评估解集质量,但指标的计算复杂度随目标维度增加呈指数爆炸趋势^[6],严重制约算法实时性.

为了解决上述问题,本文提出一种基于灰色关联和自适应参考向量的高维多目标进化算法(GREARV).具体而言,所提算法的贡献如下:

1) 为了解决高维目标空间中多样性维持困难、收敛性不足及二者间的平衡问题,本文提出灰色关联环境选择策略.首先,利用混合相似关联度将解与参考向量关联起来,实现种群划分.混合相似关联度融合了余弦相似度与灰色相似关联度,前者量化解与参考向量间的方向对齐性,后者量化解与参考向量间的几何形态相似性.在此基础上,引入灰色接近关联度来度量解的目标向量与理想点的偏移面积,以此评估每个子种群中解的收敛性.最后,将多样性指标(混合相似关联度)与收敛性指标(灰色接近关联度)进行耦合,形成一种用于量化解质量的适应度评估函数——灰色关联适应度.该适应度函数在子种群内部选择时,优先保留灰色关联适应度最小的解.

2) 为了解决算法对不规则 PF 适应性差的难题,本文提出一种参考向量自适应调整策略.首先,在每

一代进化过程中,依据关联度阈值在活跃参考向量周围动态插入新的参考向量.同时,每隔固定周期移除那些长期没有前沿解与之关联的非活跃参考向量,以及位于过度拥挤区域的冗余参考向量.该策略在维持种群稳定性的同时,使参考向量分布实时追踪解集演化趋势.

1 相关工作

1.1 多目标优化和高维多目标优化问题

多目标优化问题(MOPs)是指通过决策变量协调优化多个相互冲突的目标函数,其数学形式可表述为

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))^T; \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &\in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: Ω 是决策空间, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D)$ 是一个候选解,里面包含了 D 个决策变量; $F(\mathbf{x})$ 表示需要同时优化的 M 个目标.若某个解满足条件:不存在其他解能在保持所有目标不劣化的同时,至少改进其中一个目标,则该解被称为帕累托最优解,则决策空间中所有帕累托最优解构成的集合称为帕累托解集(PS),PS在目标空间中的映射称为帕累托前沿(PF).当目标数量大于等于4时,MOPs演化为MaOPs.

1.2 基于分解的 MOEAs

基于分解的 MOEAs 可以分为基于权重聚合的分解方法和基于参考向量的分解方法.在基于权重聚合的分解方法中,通常采用一组向量,通过标量化方法将多目标优化问题转化为多个单目标优化问题.加权求和法、加权切比雪夫法(TCH)^[7]以及基于惩罚的边界交叉法(PBI)^[8]是应用最为广泛的3种标量化方法.基于参考向量的分解方法利用一组向量将目标空间划分为多个子空间,从而将一个多目标优化问题分解为若干子问题,其中每个子问题仍保持多目标特性.以 NSGA-III^[2]和 RVEA^[9]为例,两种算法分别根据解与向量之间的欧氏距离和夹角度量,将每个解关联至最近的向量.

在基于参考向量的分解方法中,参考向量的自适应更新对解集质量具有重要作用.实际优化问题的 PF 常呈现复杂几何特性,因此,需要动态增删参考向量并调整其密度分布,以实时追踪前沿形态变化.近年来,许多参考向量自适应更新策略被相继提出.例如,MOEA/D-AM2M^[10]和 AdaW^[11]分别基于当前种群和外部存档保存的历史优质解对既有参考向量进行周期性更新.除了直接修改既有参考向量外,另一种思路是在迭代过程中用新生成的参考向量替换非活跃参考向量^[12-13].需要注意的是,参考向

量的更新频率不宜过高, 频繁更新甚至错误更新参考向量将显著减缓收敛速度.

1.3 灰色关联分析

灰色关联分析作为灰色系统理论中处理不确定性与不完全信息系统的核心方法^[14], 通过构建数据序列的几何关系模型量化因素间的动态关联强度. 该方法尤其擅长处理小样本、非线性及多维异构数据, 现已被广泛应用于决策优化等领域. 其中, 灰色相似关联度与灰色接近关联度^[14]是两种典型的灰色关联分析模型.

灰色相似关联度是通过计算序列间几何形状相似性来量化系统因素间关联程度的指标. 令 $Y = (y(1), y(2), \dots, y(n))$ 为离散的数据序列, 其中 $y(k) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Y 的始点零化象^[14]表示为 Y^0 , 有

$$Y^0 = (y^0(1), y^0(2), \dots, y^0(n)).$$

其中

$$y^0(k) = y(k) - y(1), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

设 $Y_1 = (y_1(1), y_1(2), \dots, y_1(n))$ 和 $Y_2 = (y_2(1), y_2(2), \dots, y_2(n))$ 为两个不同的数据序列, 那么两者之间的灰色相似关联度为

$$gs(Y_1, Y_2) = \frac{1}{1 + |s_1 - s_2|}, \quad (3)$$

$$|s_1 - s_2| = \int_1^n (Y_1^0 - Y_2^0) dt =$$

$$\left| \sum_{k=2}^{n-1} (y_1^0(k) - y_2^0(k)) + \frac{1}{2} (y_1^0(n) - y_2^0(n)) \right|, \quad (4)$$

其中 $|s_1 - s_2|$ 表示两个序列的始点零化象对应折线之间所夹的面积.

灰色接近关联度是通过测度序列间空间位置接近程度来量化系统因素间关联程度的指标. 序列 Y_1 和序列 Y_2 之间的灰色接近关联度表示为

$$gp(Y_1, Y_2) = \frac{1}{1 + |S_1 - S_2|}, \quad (5)$$

$$|S_1 - S_2| = \int_1^n (Y_1 - Y_2) dt =$$

$$\left| \frac{1}{2} (y_1(1) - y_2(1)) + \sum_{k=2}^{n-1} (y_1(k) - y_2(k)) + \frac{1}{2} (y_1(n) - y_2(n)) \right|, \quad (6)$$

其中 $|S_1 - S_2|$ 表示两个序列对应折线之间所夹的面积.

2 GREA-ARV 算法介绍

算法 1 展示了 GREA-ARV 的主体框架. 首先, 该算法采用单纯形格点设计方法生成一组均匀参考向量, 同时初始化第 1 代解; 随后, GREA-ARV 依次

循环执行子代繁殖、灰色关联环境选择以及参考向量自适应更新 3 个步骤.

算法1 GREA-ARV算法框架.

输入: 最大迭代次数 t_{\max} , 参考向量删除频率 f_r ;

输出: 最终种群 $P_{t_{\max}}$.

1: 初始化参考向量 $V_0 = \{v_{0,1}, v_{0,2}, \dots, v_{0,N}\}$;

2: 初始化第1代种群 P_0 , 其中包含 N 个随机生成的解;

3: while $t < t_{\max}$ do

4: $O_t =$ 子代繁殖(P_t);

5: $P_t = P_t \cup O_t$;

6: $P_{t+1} =$ 灰色关联环境选择(P_t, V_t);

7: $V_{t+1} =$ 参考向量自适应更新($P_t, V_t, f_r, t, t_{\max}$);

8: $t = t + 1$;

9: end while

1) 子代繁殖: 采用模拟二进制交叉^[15]和多项式变异^[16]算子生成子代解集 O_t , 然后将子父代种群合并.

2) 灰色关联环境选择: 首先通过混合相似关联度将合并种群 P_t 中的解与参考向量关联起来; 然后计算所有解与理想点之间的灰色接近关联度; 最后, 对于每个参考向量, 从与其相关联的所有解中选择灰色关联适应度最小的解. 所有被选择的精英解组成下一代种群 P_{t+1} .

3) 参考向量自适应更新: 该步骤包括基于关联度阈值的参考向量生成和基于活跃状态的参考向量删除两个操作. 生成操作在每一代中均执行, 删除操作每隔 $f_r \cdot t_{\max}$ 代执行一次.

2.1 参考向量初始化

采用标准单纯形格点设计方法在单位超平面上生成一组均匀分布的参考点^[17]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = (u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^M), \\ \mathbf{u}_i^j \in \left\{ \frac{0}{H}, \frac{1}{H}, \dots, \frac{H}{H} \right\}, \sum_{j=1}^M u_i^j = 1. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N$, M 为目标函数个数, H 为单纯形格点设计方法的正整数参数. 给定参数 H 和 M , 则总共可生成 $N - \left(\frac{H+M-1}{M-1} \right)$ 个点. 通过向量单位化, 可得到 \mathbf{u}_i 所对应的单位参考向量

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|}. \quad (8)$$

单位化操作将所有参考点从超平面映射到超球体上, 进而得到一组均匀分布且长度为 1 的参考向量.

2.2 灰色关联环境选择策略

GREA-ARV 利用参考向量将目标空间划分为

若干子空间. 在每一代中, 每个子空间内的解均与划分该空间的参考向量建立关联, 并从各个子空间中筛选出一个精英解保留至下一代. 具体而言, 灰色关联环境选择策略包含 4 个步骤: 1) 解的目标值平移; 2) 基于混合相似关联度的种群多样性划分; 3) 基于灰色接近关联度的收敛性评估; 4) 基于灰色关联适应度的精英选择.

2.2.1 解的目标值平移

本文采用的参考向量以坐标原点为初始点. 为保持定义一致性, 需对合并种群 P_t 中所有解的目标值进行平移变换. 记第 t 代种群目标值集合为 $F_t = \{f_{t,1}, f_{t,2}, \dots, f_{t,|P_t|}\}$, 则可通过以下公式对其进行平移变换:

$$f'_{t,i} = f_{t,i} - z_t^{\min}. \quad (9)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, |P_t|$; $f_{t,i}$ 和 $f'_{t,i}$ 分别表示种群中第 i 个解平移变换前后的目标向量; $z_t^{\min} = (z_{t,1}^{\min}, z_{t,2}^{\min}, \dots, z_{t,m}^{\min})$ 表示理想点, 由 F_t 中各个目标的最小值组成. 目标值平移操作能够确保所有平移后的目标值均位于第 1 象限内, 使各目标函数的极值点落在相应坐标轴上, 从而最大化参考向量的覆盖范围. 同时, 平移操作将理想点设置为坐标系原点, 简化了后续灰色接近关联度的计算.

2.2.2 基于混合相似关联度的种群多样性划分

完成目标值转换后, 通过将每个解关联到对应的参考向量, 将种群 P_t 划分为若干个子种群 $P_{t,1}, P_{t,2}, \dots, P_{t,|V_t|}$, 其中 $|V_t|$ 是参考向量的个数. 余弦相似度是关联解和参考向量的常用方法, 它能够衡量解与参考向量的方向一致性. 然而, 单纯依赖余弦相似度的关联策略, 可能因过度关注解和向量间方向对齐而忽略两者间的形态差异, 导致方向相近但形态差异较大的解被关联至同一参考向量, 破坏解集的均匀性. 如 1.3 节所述, 灰色相似关联度能够较为贴切地反映两个序列在几何形状上的相似程度. 如果将参考向量和解的目标向量视为两个不同的离散数据序列, 即可基于灰色相似关联度建立两者的关联关系.

为有效整合两种关联方式的优势, 本文提出一种混合关联策略——混合相似关联度:

$$\text{hs}(f'_{t,i}, v_{t,j}) = \frac{\arccos(\frac{f'_{t,i} \cdot v_{t,j}}{|f'_{t,i}| |v_{t,j}|})}{\pi/2} \cdot \left(1 + \frac{|S_i - S_j|}{1 + |S_i - S_j|}\right). \quad (10)$$

方向差异项 形态差异项

其中: $f'_{t,i}$ 表示第 t 代种群中第 i 个解平移之后的目标向量, $v_{t,j}$ 表示第 t 代的第 j 个参考向量, $|S_i - S_j|$ 表

示 $f'_{t,i}$ 与 $v_{t,j}$ 的始点零化象对应折线之间所夹的面积. 混合相似关联度由方向差异项和形态差异项构成, 前者采用余弦相似度的反函数计算, 后者由灰色相似关联度的补数表示. 解与参考向量之间的混合相似关联度越小, 表明两者间的关联程度越强. 当解与某一参考向量间的混合相似关联度小于其他所有参考向量时, 该解与该参考向量相关联. 如式 (10) 所示, 当解与参考向量的方向完全一致时, 方向差异项归零, 此时无论形态如何, 混合相似关联度均为零, 直接触发解与参考向量的关联. 这种机制确保每个参考向量优先捕获与其方向高度一致的解. 当方向差异存在时, 形态差异项对解的局部波动、幅度差异进行惩罚, 避免仅因方向接近但形态迥异的解被关联至同一参考向量. 例如, 设解 x_1 和 x_2 的目标向量分别为 (1, 2, 3, 4, 5) 和 (1, 3, 2, 5, 4). 两个目标向量间的方向差异项约为 0.172, 这表明两者在 5 维目标空间中的方向较为接近. 然而, x_1 的目标向量呈线性增长, x_2 的目标向量则剧烈震荡, 二者之间的形态差异项约为 0.333. 此时, 形态差异项会放大两者差异. 即便二者方向差异项相近, 也不会被关联至同一参考向量, 从而提升解集局部分布的均匀性.

当且仅当 $f'_{t,i}$ 与参考向量 $v_{t,k}$ 的混合相似关联度小于其他所有参考向量时, 解 $x_{t,i}$ 与 $v_{t,k}$ 相关联, 且 $x_{t,i}$ 会被分配到对应的子种群 $P_{t,k}$ 中.

$$P_{t,k} = \{x_{t,i} | k = \arg \min_{k \in \{1, \dots, |V_t|\}} \text{hs}(f'_{t,i}, v_{t,k})\}, \quad (11)$$

其中 $x_{t,i}$ 表示 P_t 中的第 i 个解.

2.2.3 基于灰色接近关联度的收敛性评估

种群划分完毕后, 需进一步衡量每个子种群中所有解与理想点 z_t^{\min} 之间接近程度, 以此来评估解的收敛性. 如 1.3 节所述, 灰色接近关联度可准确测量两个序列间的接近程度, 因此该方法同样适用于解与理想点之间距离的量化分析. 为增强数值敏感性, 本文将灰色接近关联度的补数代替原值. 这样一来, 解与理想点间的灰色相似关联度越小, 两者在高维目标空间中越接近. 前面已对所有解的目标向量进行平移操作, 故理想点即为各维度坐标均为 0 的原点. 基于此, 解的目标向量 $f'_{t,i}$ 与理想点 z_t^{\min} 之间的实际灰色接近关联度表示为

$$\text{gp}(f'_{t,i}) = \frac{|S_i|}{1 + |S_i|}, \quad (12)$$

其中 $|S_i|$ 表示 $f'_{t,i}$ 与理想点 (原点) 对应折线之间所夹的面积. 灰色接近关联度通过量化的目标向量与理想点在标准化空间中的整体偏移程度来反映解的收敛性. 解的目标向量越接近理想点, 各目标值越趋近于零, 两者间的灰色接近关联度越小. 如式 (6) 所

示, 灰色接近关联度的计算过程无需进行复杂的平方或开方运算, 仅需线性叠加各维度的数值即可完成评估. 相较于欧氏距离, 灰色接近关联度在计算机硬件层面的整体运算效率更高.

2.2.4 基于灰色关联适应度的精英选择

对于 $|V_t|$ 个子种群 $P_{t,1}, P_{t,2}, \dots, P_{t,|V_t|}$, 各子种群依据既定标准选取一个精英解, 共同构成下一代种群 P_{t+1} . 精英解的筛选依据包括收敛性标准和多样性标准. 在第 j 个子种群中, 第 i 个解的收敛性标准由其目标向量 $f'_{t,i}$ 与对应参考向量 $v_{t,j}$ 的混合相似关联度衡量, 而多样性标准则通过 $f'_{t,i}$ 与理想点间的灰色接近关联度评估. 为有效平衡两个选择标准, 本文提出灰色关联适应度函数, 其数学表达式为

$$\text{GRF}(f'_{t,i}, v_{t,j}) = \left(1 + M \cdot \left(\frac{t}{t_{\max}}\right) \cdot \frac{\text{hs}(f'_{t,i}, v_{t,j})}{\tau(v_{t,j})}\right) \cdot \text{gp}(f'_{t,i}); \quad (13)$$

$$\tau(v_{t,j}) = \min\{\text{hs}(v_{t,k}, v_{t,j})\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, |V_t|\}, i \neq k. \quad (14)$$

其中: M 是目标个数, $|V_t|$ 是参考向量个数, t_{\max} 是最大迭代次数, $\tau(v_{t,j})$ 是参考向量 $v_{t,j}$ 与其他参考向量间的最小混合相似关联度. (t/t_{\max}) 是时间衰减因子, 使迭代初期增强收敛压力, 后期逐步强调解的多样性. 在每个子种群中, 选出 $\text{GRF}(f'_{t,i}, v_{t,j})$ 最小的解作为精英解进入下一代. 算法 2 展示了灰色关联环境选择策略的伪代码.

算法 2 灰色关联环境选择.

输入: 第 t 代合并种群 P_t , 第 t 代参考向量 V_t ;

输出: 下一代种群: P_{t+1} .

```

1: /*目标值平移*/
2: 计算理想点  $z_t^{\min}$ ;
3: for  $i = 1$  to  $|P_t|$  do
4: 通过式(9)计算  $f'_{t,i}$ ;
5: end for
6: /*关联解和参考向量*/
7: for  $i = 1$  to  $|P_t|$  do
8:  for  $j = 1$  to  $|V_t|$  do
9:  通过式(10)计算  $\text{hs}(f'_{t,i}, v_{t,j})$ ;
10:  end for
11: end for
12: for  $i = 1$  to  $|P_t|$  do
13:   $k = \arg \min_{k \in \{1, \dots, |V_t|\}} \text{hs}(f'_{t,i}, v_{t,k})$ ;
14:   $P_{t,k} = P_{t,k} \cup \{x_{t,i}\}$ 
15: end for

```

16: /*精英选择*/

17: for $j = 1$ to $|V_t|$ do

18: for $i = 1$ to $|P_{t,j}|$ do

19: 计算 $f'_{t,i}$ 与 $v_{t,j}$ 之间的灰色关联适应度;

20: end for

21: end for

22: for $j = 1$ to $|V_t|$ do

23: 从 $P_{t,j}$ 中选择具有最小灰色关联适应度的解 $x_{c,j}$;

24: $P_{t+1} = P_{t+1} \cup \{x_{c,j}\}$;

25: end for

2.3 参考向量自适应更新策略

PF 的复杂几何特性可能导致固定参考向量偏离真实解集分布. 为此, 本文提出一种结合参考向量生成与删除的自适应调整机制: 在每一代中, 根据解集分布实时生成新参考向量, 以捕捉前沿形态的局部变化; 同时, 每隔特定代数, 执行参考向量删减操作以消除冗余向量. 这种差异化更新频率设计既能避免频繁删减引发的种群稳定性波动, 又可保留关键向量对解多样性的长效引导作用.

2.3.1 基于关联度阈值的参考向量生成

在参考向量生成过程中, 核心挑战在于如何确定新增向量的插入位置. 错误的向量生成可能会误导搜索方向, 进而导致收敛速度下降, 种群多样性衰减. 因此, 本文通过为每个参考向量设定独立的阈值来判定新增向量的时机, 从而确保搜索过程中的潜力解最大概率得以保留.

前面已经提到, 本文采用混合相似关联度建立解与参考向量之间的关联. 基于关联度阈值的参考向量生成方法遵循以下核心原则: 仅当前沿解与所关联的参考向量间的混合相似关联度超过该向量的阈值时, 才基于该前沿解生成新参考向量. 前沿解的定义是, 在经过非支配排序后, 位于第 1 前沿到关键前沿的解. 具体而言, 合并种群 P_t 经过非支配排序后被划分为若干前沿 $(F_1, F_2, \dots, F_k, \dots)$. 当 F_k 满足 $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{k-1}| < N$ 且 $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| \geq N$ 时, 该前沿被定义为关键前沿, 记作 F_c . 参考向量的关联度阈值由其周边解的分布密度决定. 设 $v_{t,j}^a$ 为第 t 代中第 j 个至少与一个前沿解相关联的参考向量, 则 $v_{t,j}^a$ 的关联度阈值 $\varphi_{t,j}$ 定义如下:

$$\varphi_{t,j} = \frac{\sum_{x \in P_{t,j}} \text{hs}(f'_x, v_{t,j}^a) + \sum_{k \in \{j_1, j_2, \dots, j_M\}} |X_{t,k}| \text{hs}(v_{t,k}, v_{t,j}^a)}{|X_{t,j}| + \sum_{k \in \{j_1, j_2, \dots, j_M\}} |X_{t,k}|}. \quad (15)$$

其中: $X_{t,j}$ 表示与参考向量 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 关联的前沿解的集合; $\text{hs}(\mathbf{f}'_x, \mathbf{v}_{t,j}^a)$ 表示解 \mathbf{x} 对应的平移后的目标向量与 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 之间的混合相似关联度, $\mathbf{x} \in X_{t,j}$; j_1, j_2, \dots, j_M 表示离 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 最近的 M 个邻近参考向量的索引. 对于 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 的每个邻近参考向量 $\mathbf{v}_{t,k}$, $k \in \{j_1, j_2, \dots, j_M\}$, $|X_{t,k}|$ 表示与其关联的前沿解的数量. 如果所有邻近参考向量均位于 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 的同一侧, 则随机选取其中一个邻近参考向量. $\text{hs}(\mathbf{v}_{t,k}, \mathbf{v}_{t,j}^a)$ 是 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 与各邻近参考向量 (\mathbf{v}_{t,j_1} 至 \mathbf{v}_{t,j_M}) 之间的混合相似关联度.

图1展示了新参考向量的生成过程. 在该示例中, 相较于 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 , 参考向量 \mathbf{v}_1 附近的解较为密集 (即与 \mathbf{v}_1 相关联的解较多). 因此, \mathbf{v}_1 的重要程度更高, 其关联度阈值也更低. 更低的关联度阈值意味着 \mathbf{v}_1 附近会生成更多的新参考向量. 图中解 A 与 \mathbf{v}_1 之间的混合相似关联度超过 \mathbf{v}_1 的关联度阈值, 因此算法基于 A 生成一个新的参考向量. 参考向量生成策略的伪代码见算法3中第6行到第18行.

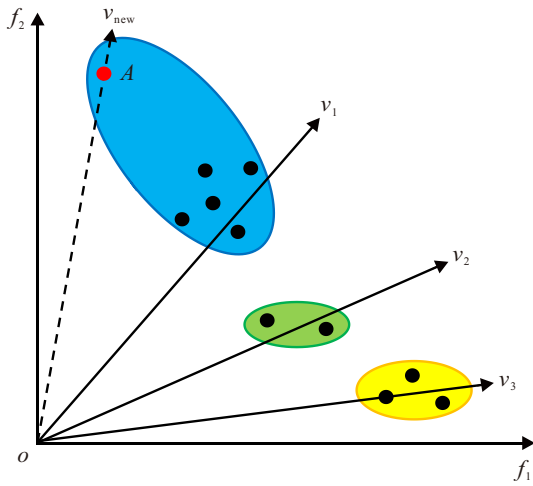


图1 参考向量生成过程

算法3 参考向量自适应调整.

输入: 第 t 代合并种群 P_t , 第 t 代参考向量 V_t , 参考向量删除频率 f_r , 当前迭代次数 t , 最大迭代次数 t_{\max} ;

输出: 下一代参考向量: V_{t+1} .

1: $V_{t+1} = V_t$;

2: /*更新活跃时间*/

3: $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_c = \text{非支配排序}(P_t)$;

4: 将 $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_c$ 中的解与参考向量关联起来;

5: 将与前沿解关联的参考向量的活跃时间增加1;

6: /*参考向量生成*/

7: $V_a \leftarrow$ 筛选出与前沿解关联的参考向量;

8: for $j = 1$ to $|V_a|$ do

9: $\mathbf{v}_{t,j_1}, \mathbf{v}_{t,j_2}, \dots, \mathbf{v}_{t,j_M} \leftarrow$ 筛选出距离 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 最近的 M 个邻近参考向量;

10: 通过式(15)计算 $\mathbf{v}_{t,j}^a$ 的关联度阈值 $\varphi_{t,j}$;

11: for each \mathbf{x} in $|X_{t,j}|$ do

12: if $\text{hs}(\mathbf{f}'_x, \mathbf{v}_{t,j}^a) > \varphi_{t,j}$ then

13: 通过单位化向量 \mathbf{f}'_x 得到一个新参考向量 \mathbf{v}_{new} ;

14: 将新向量 \mathbf{v}_{new} 的活跃时间增加1;

15: end if

16: $V_{t+1} = V_{t+1} \cup \{\mathbf{v}_{\text{new}}\}$;

17: end for

18: end for

19: /*参考向量删除*/

20: if $\text{mod}(t, (f_r \cdot t_{\max})) == 0$ then

21: for $j = 1$ to $|V_{t+1}|$ do

22: if $\mathbf{v}_{t,j}$ 的活跃时间 = 0 then

23: $V_{t+1} = V_{t+1} \setminus \{\mathbf{v}_{t,j}\}$;

24: end if

25: end for

26: if $|V_{t+1}| < N$ then

27: $V_{t+1} \leftarrow$ 通过角度计算删除拥挤区域的参考向量;

28: end if

29: end if

2.3.2 基于活跃状态的参考向量删除

若参考向量总数超过种群规模, 则删除非活跃向量以及处于过度拥挤区域的向量. 将活跃时间不为0的向量称为活跃参考向量. 其中, 活跃时间是指参考向量存在与之关联的前沿解所经历的代数之和. 若参考向量在一段时期 (每 $f_r \cdot t_{\max}$ 代) 内活跃时间始终为0, 则被判定为非活跃参考向量. 在具体实施时, 算法每隔 $f_r \cdot t_{\max}$ 代执行一次冗余向量删除操作. 首先删除所有非活跃参考向量, 若删除后活跃向量数量仍超过种群规模, 则依据向量间夹角关系逐个删除拥挤区域中的向量. 具体而言, 计算所有活跃参考向量间的两两夹角, 并识别夹角最小的一对向量, 然后比较两者的活跃时间并删除较小者 (若活跃时间一致, 则随机删除其一). 该过程会持续迭代直至参考向量数量降至预设的种群规模. 完成参考向量的删除操作后, 所有保留参考向量的活跃时间将被重置为0.

图2简要展示了参考向量的删除过程. 其中共有5个参考向量, 假定预设的参考向量数量为3, 那么需要从中删除2个向量. 图2中各向量标注的方括号内数值表示其活跃时间, F_1 、 F_2 和 F_c 中的解均为前沿解. 首先, 由于 \mathbf{v}_4 的活跃时间为0, 这说明 \mathbf{v}_4 在连续 $f_r \cdot t_{\max}$ 代的时间内都没有与之关联的前

沿解, 故优先将其移除; 随后, 通过两两向量间的夹角计算, 发现 v_2 与 v_3 之间的夹角最小, 且 v_3 的活跃时间小于 v_2 , 因此选择删除 v_3 . 参考向量删除操作伪代码详见算法 3 中第 19 行到第 29 行.

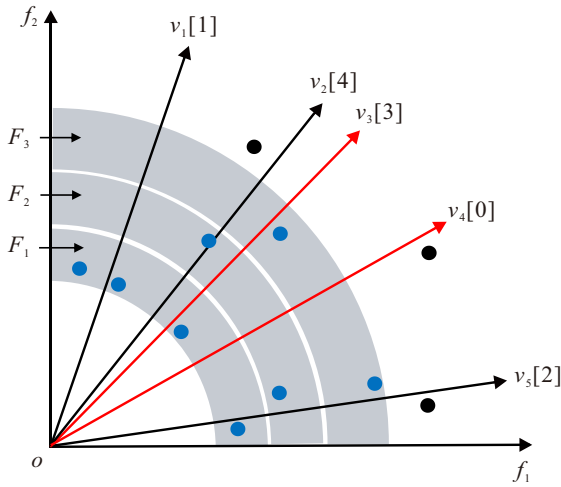


图2 参考向量删除过程

2.4 计算复杂度分析

本节分析 GREA-ARV 在一次迭代过程中的计算复杂度. 除了交叉和变异等遗传操作外, 主要的计算成本来自于灰色关联环境选择和参考向量自适应更新两个部分.

如算法 2 所示, 灰色关联环境选择由以下步骤组成: 1) 目标值平移; 2) 解与参考向量的关联; 3) 精英选择. 步骤 1) 的计算复杂度为 $O(MN)$, 其中 M 是目标数, N 是种群规模. 步骤 2) 的计算复杂度为 $O(MN|V| + |V|N)$, 其中 $|V|$ 是参考向量的数量, 该值的变化范围为 $[N, 3N/2]$, 因此其计算复杂度可简化为 $O(MN|V|)$. 在最坏的情况下, 步骤 3) 的计算复杂度为 $O(M|V|^2) + O$, 自适应调整的计算复杂度为 $O(|V|^2)$. 根据上述分析结果, 灰色关联环境选择的计算复杂度为 $O(M|V|^2)$. 参考向量自适应调整分为向量生成和删除两个过程. 在最坏的情况下, 向量生成与向量删除的计算复杂度分别为 $O(|V_a||V|N)$ 和 $O(|V| + |V|^2)$, 其中 $|V_a|$ 是与前沿解关联的参考向量, 且 $|V_a| < |V|$. 因此, 参考向量自适应调整的计算复杂度为 $|V_a||V|N$.

总体而言, 除遗传变异操作外, 本文算法在最坏情况下单次迭代的计算复杂度为 $O(M|V|^2 + |V_a||V|N)$, 这表明 GREA-ARV 具有较高的计算效率.

3 实验分析

3.1 实验设计

实验选取 C-TAEA^[18]、hpaEA^[19]、CARV-MOEA^[13] 及 SPARVEA^[20] 作为对比算法, 测试问题集包含 9 个

基准测试问题和 2 个实际优化问题. 基准测试问题具体涵盖 DTLZ 系列问题 (DTLZ1-DTLZ7)^[21]、缩放型 DTLZ1 (SDTLZ1)^[2] 及倒置型 DTLZ2 (IDTLZ2)^[22], 所有基准问题均在 5 目标、10 目标和 15 目标 3 种维度下进行实验验证. DTLZ1 ~ DTLZ4 的 PF 分布较为规则. 其中: DTLZ1 和 DTLZ3 具有多模态特性, 算法需克服局部最优陷阱; DTLZ4 具有倾斜分布特性, PF 上的解会偏向某些目标方向, 用于测试算法对非均匀分布 PF 的鲁棒性. DTLZ5 ~ DTLZ7、SDTLZ1 以及 IDTLZ2 的 PF 分布不规则. 其中: DTLZ5 和 DTLZ6 的 PF 呈退化曲线, 算法需适应退化 PF; DTLZ7 的 PF 由多个离散的帕累托最优区域组成, 具有不连续特性; SDTLZ1 对 DTLZ1 的目标值进行非均匀缩放, 能够测试算法对目标值尺度变化的适应性; IDTLZ2 在 DTLZ2 的基础上对目标函数进行倒置变换, 检验算法面对 PF 由凸转凹的适应能力. 实际优化问题为水资源规划问题 (WRP) 和车辆驾驶舱设计问题 (CCD)^[23]. 实验采用反向世代距离 (IGD)^[24] 和超体积指标 (HV)^[25] 对算法得到的最终解集进行评估. HV 与 IGD 指标均能同时反映解集的收敛性和多样性.

种群规模由单纯形格点设计因子 H 与目标数 M 共同决定. 当目标数 $M > 5$ 时, 采用双层向量生成策略, 该策略不仅在 PF 外部边界生成参考向量, 同时在 PF 内部各层也生成相应向量^[26]. 表 1 汇总了种群规模的具体设置. 针对 5 目标、10 目标和 15 目标优化问题, 实验分别设置 150 000 次、200 000 次和 240 000 次适应度评估作为终止条件.

表1 单纯形格点因子 (H_1 与 H_2) 及种群规模

M	(H_1, H_2)	Population size
5	(5, 0)	126
10	(3, 2)	275
15	(2, 1)	135

GREA-ARV 涉及一个关键参数 f_r . 经过敏感性测试分析 (见第 3.5 节), f_r 设置为 0.1 时, 算法性能达到最优的状态. 其他对比算法的参数均严格参照其原始文献推荐值进行设置.

3.2 基准问题结果分析

对 5 种算法在全部基准问题上的 IGD 进行系统性测试. 所有算法均在 9 个基准测试问题上分别执行 30 次独立实验运行, 以消除随机因素对实验结果的影响. 表 2 完整记录了 5 种算法在所有基准问题上的 IGD 指标测量结果, 其中数据呈现采用“平均值 (标准差)”的格式进行展示. 在每个测试实例上取

得的最佳结果以深灰色高亮标注. 符号“+”表示 GREA-ARV 显著优于对比算法, 符号“-”表示显著

差于对比算法, 符号“≈”则表示与对比算法结果相当.

表2 5种算法在9个基准测试实例上所得解集的IGD均值与标准差

基准问题	M	GREA-ARV	C-TAEA	hpaEA	CARV-MOEA	SPARVEA
DTLZ1	5	5.199e-2 (1.45e-3)	3.781e-1 (4.26e-2) +	2.430e-1 (1.31e-2) +	4.623e-2 (1.82e-3) -	2.011e-1 (1.43e-2) +
	10	1.292e-1 (2.31e-3)	3.034e-1 (7.85e-2) +	1.926e-1 (2.21e-2) +	2.679e-1 (1.32e-2) +	1.014e-1 (3.54e-3) ≈
	15	2.318e-1 (4.64e-2)	2.277e-1 (3.49e-2) ≈	2.896e-1 (2.24e-2) +	2.012e-1 (5.32e-2) ≈	2.895e-1 (2.66e-2) +
DTLZ2	5	2.972e-1 (5.40e-3)	3.051e-1 (7.50e-3) ≈	4.676e-1 (2.98e-2) +	2.185e-1 (3.55e-3) -	4.070e-1 (1.15e-1) +
	10	3.662e-1 (3.68e-3)	4.942e-1 (4.34e-2) +	4.496e-1 (9.02e-3) +	5.462e-1 (4.05e-3) +	4.243e-1 (7.91e-3) +
	15	6.122e-1 (4.11e-2)	7.015e-1 (2.83e-1) +	6.955e-1 (1.59e-2) +	5.391e-1 (1.63e-2) -	5.272e-1 (2.73e-2) -
DTLZ3	5	4.702e-1 (3.53e-2)	5.292e-1 (1.91e-1) +	5.065e-1 (6.34e-2) ≈	3.673e-1 (3.75e-2) -	4.328e-1 (1.92e-2) ≈
	10	4.879e-1 (4.34e-3)	6.396e-1 (1.52e-1) +	6.417e-1 (1.56e-1) +	6.968e-1 (2.95e-1) +	5.588e-1 (6.93e-2) +
	15	6.237e-1 (3.99e-2)	7.753e-1 (5.39e-1) ≈	8.894e-1 (1.79e-1) +	8.575e-1 (6.85e-2) +	7.141e-1 (2.98e-2) +
DTLZ4	5	2.744e-1 (5.45e-3)	4.558e-1 (1.03e-2) +	6.633e-1 (3.19e-2) +	4.314e-1 (2.39e-1) +	6.292e-1 (7.36e-3) +
	10	3.177e-1 (2.28e-3)	5.161e-1 (3.64e-2) +	7.019e-1 (6.86e-2) +	4.811e-1 (5.35e-2) +	6.884e-1 (2.33e-2) +
	15	4.993e-1 (2.41e-2)	5.933e-1 (2.16e-2) +	7.774e-1 (5.58e-2) +	5.637e-1 (4.90e-2) +	8.055e-1 (4.36e-2) +
DTLZ5	5	2.046e-1 (4.18e-2)	2.409e-1 (4.21e-2) +	1.042e-1 (8.91e-2) -	1.821e-1 (3.64e-2) ≈	1.640e-1 (2.03e-2) -
	10	1.873e-1 (2.76e-2)	2.753e-1 (4.34e-2) +	1.463e-1 (5.52e-2) -	4.745e-1 (3.41e-2) +	1.861e-1 (3.56e-2) ≈
	15	1.865e-1 (4.21e-2)	3.676e-1 (5.86e-2) +	1.920e-1 (5.21e-2) ≈	4.929e-1 (4.74e-2) +	2.196e-1 (5.20e-2) ≈
DTLZ6	5	1.829e-1 (3.97e-2)	5.323e-1 (1.96e-2) +	2.333e-1 (5.41e-2) +	2.427e-1 (9.03e-2) +	2.016e-1 (6.19e-2) ≈
	10	3.009e-1 (3.91e-2)	5.923e-1 (2.10e-2) +	3.473e-1 (5.81e-2) +	2.662e-1 (5.39e-2) -	2.604e-1 (7.24e-2) -
	15	2.603e-1 (6.61e-2)	6.476e-1 (2.598e-2) +	3.516e-1 (1.815e-1) +	2.334e-1 (8.08e-2) ≈	2.101e-1 (8.98e-2) -
DTLZ7	5	6.556e-1 (1.23e-2)	7.212e-1 (2.07e-2) +	1.235e+0 (1.97e-1) +	9.320e-1 (5.16e-2) +	9.122e-1 (1.30e-1) +
	10	8.538e-1 (2.72e-2)	9.928e-1 (1.86e-2) +	1.119e+0 (1.41e-1) +	1.565e+0 (1.63e-1) +	1.180e+0 (2.99e-1) +
	15	3.867e+0 (3.07e-1)	3.548e+0 (2.79e-1) -	4.139e+0 (8.61e-1) ≈	5.959e+0 (8.35e-2) +	4.056e+0 (3.12e-1) ≈
SDTLZ1	5	5.832e-2 (5.51e-3)	4.448e-1 (4.73e-2) +	3.454e-1 (1.51e-2) +	6.681e-2 (4.04e-3) -	3.429e-1 (2.75e-2) +
	10	3.084e-1 (6.56e-3)	6.049e-1 (4.97e-2) +	5.659e-1 (7.89e-2) +	3.533e-1 (2.78e-2) ≈	3.828e-1 (2.24e-2) +
	15	4.497e-1 (3.50e-2)	6.869e-1 (5.02e-2) +	6.163e-1 (4.63e-2) +	3.689e-1 (6.72e-2) -	3.882e-1 (4.54e-2) -
IDTLZ2	5	4.782e-1 (2.35e-2)	6.196e-1 (3.38e-2) +	4.569e-1 (5.56e-2) ≈	3.815e-1 (6.01e-2) -	4.997e-1 (1.92e-1) ≈
	10	3.887e-1 (8.44e-3)	6.506e-1 (6.05e-2) +	5.185e-1 (8.24e-3) +	5.977e-1 (4.45e-2) +	7.110e-1 (1.34e-2) +
	15	5.231e-1 (4.22e-2)	8.137e-1 (1.09e-1) +	6.875e-1 (4.97e-2) +	9.195e-1 (4.78e-2) +	8.878e-1 (5.08e-2) +
		+/-/≈	23/1/3	21/2/4	15/8/4	15/5/7

由表2可以分析出, GREA-ARV在不同类型MaOPs上的性能与问题特性及目标维度密切相关. 在多模态问题(DTLZ1, DTLZ3)中, GREA-ARV在DTLZ3的所有目标维度上展现出较优的收敛性与多样性平衡能力, 且鲁棒性表现稳定. 但在DTLZ1问题上, GREA-ARV在M=10时的表现稍弱于SPARVEA, 在M=5和M=15时的表现稍逊于CARV-MOEA. 由于DTLZ1具有标准且均匀的线性PF, 本文算法解决不规则PF方面的优势难以充分展现. 相反, DTLZ3的PF呈现凸超球面结构, 更能够体现GREA-ARV的特性优势. 得益于参考向量自适应调整策略, GREA-ARV在复杂形状PF问题(如DTLZ4的倾斜分布和DTLZ7的不连续结构)上表

现突出, 仅在15目标DTLZ7问题上的IGD值差于C-TAEA. 在DTLZ4问题上, GREA-ARV在所有目标维度上均展现出全面最优性能. 在退化前沿问题DTLZ5和DTLZ6中, GREA-ARV的综合表现优于多数对比算法, 但存在维度敏感性. 对于DTLZ5, GREA-ARV在低维和高维场景下与SPARVEA和CARV-MOEA性能相当, 但在中等维度场景下表现稍弱于hpaEA. 在5目标DTLZ6中, 本文算法的解集质量显著优于其他算法, 但当维度提升至10和15时, GREA-ARV的收敛效果略逊于SPARVEA和CARV-MOEA. GREA-ARV在DTLZ5和DTLZ6上的性能波动可能源于两者的退化特性, 这种特性会降低算法的鲁棒性. 针对缩放与倒置结构变体问题

(SDTLZ1 和 IDTLZ2), GREA-ARV 在多数目标维度下均展现出显著的性能优势. 这是因为灰色关联适应度函数仅针对混合相似关联度 (与解的方向和形态有关) 构建惩罚项, 算法对各目标值空间上的缩放和倒置不敏感. 此外, 灰色关联适应度函数中引入的时间衰减因子能够在进化初期强化收敛性能, 在后期增强多样性保持能力, 显著提升算法对缩放型问题的求解效果. 整体而言, 相较于其他 4 个先进算法, GREA-ARV 在 9 个基准问题上的综合性能是最优的.

图 3 通过平行坐标图直观对比了 5 种算法在

10 目标 DTLZ4 问题下的非支配解集分布的几何形态. C-TAEA 的线条存在轻微偏向性, 表明算法在平衡多目标时存在偏好偏差, 导致多样性不足. SPARVEA 算法的线条在一些目标上出现离散的峰值分布, 线条间缺乏连续性, 部分目标轴刻度低于 1.00, 说明解集偏离真实 PF 的边界, 收敛性差. CARV-MOEA 的线条虽整体贴近真实 PF 的分布, 但在部分目标轴上出现轻微聚集, 削弱了解集分布的均匀性. hpaEA 的线条分布范围广但异常扩张, 说明算法得到的解集分布极度不均匀, 稳定性差. 相比之下, GREA-ARV 的解集的分布状况与真实 PF 的吻合度最高.

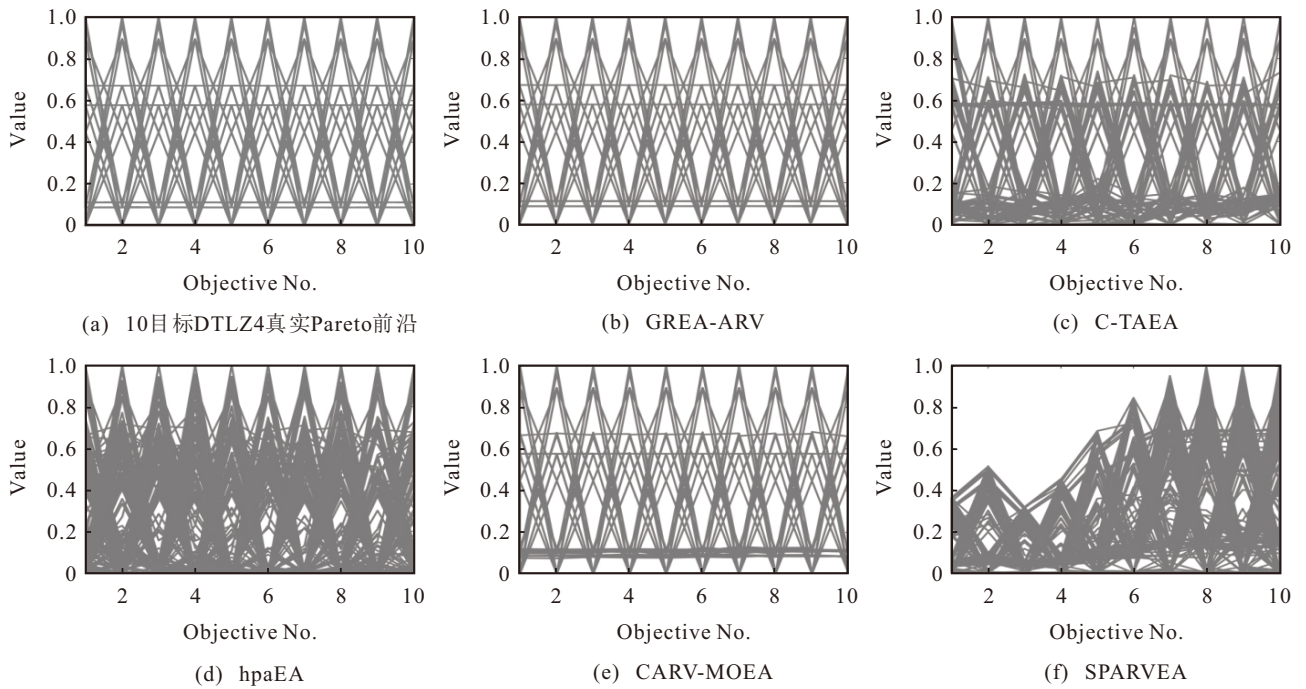


图 3 5 种算法在 10 目标 DTLZ4 问题上获得的非支配前沿平行坐标图 (基于 IGD 中位数运行结果)

3.3 实际问题结果分析

本节旨在探究 GREA-ARV 处理实际带约束 MaOPs 的性能. 实验选取了两个实际问题 (WRP 和 CDD). 由于真实 PF 未知, 实验采用 HV 指标进行评估. 首先将所有算法 30 次独立运行获得的解整合在一个集合中, 然后基于该解集的理想点和最差点对各算法的最终解进行归一化处理, 最后采用统一参考点 $R = (1.1, \dots, 1.1)$ 进行 HV 计算.

为提升 GREA-ARV 的约束处理能力, 引入一种约束处理方法^[27]. 该方法采用约束违反函数量化候选解的约束偏离程度, 即

$$CV(x) = \sum_{j=1}^J \max\{g_j(x), 0\} + \sum_{k=1}^K |h_k(x)|. \quad (16)$$

其中: $g_j(x) < 0$ 和 $h_k(x) = 0$ 分别表示不等式约束

和等式约束, J 和 K 分别是不等式约束和等式约束的数量. 该约束处理精英选择策略的核心思想是在选择过程中引入约束违反度评估. 对于第 t 代第 k 个子种群 $P_{t,k}$, 首先筛选出所有不可行解. 若不可行解的数量等于 $P_{t,k}$ 的规模 (即 $P_{t,k}$ 中的所有解均不满足约束条件), 则选择其中约束违反值最小的解保留至下一代; 否则, 从所有可行解中选取具有最小灰色关联适应度的解进入下一代.

表 3 通过 HV 量化评估了 6 种算法在处理 WRP 和 CCD 时的综合性能. 结果显示, 无论是 WRP 问题还是 CCD 问题, GREA-ARV 的 HV 值均优于其他 4 种算法, 且解集的稳定性也是最优的. 这一对比充分表明, GREA-ARV 在处理现实多目标优化问题时, 能够有效协调多样性与收敛性, 兼顾复杂约束与多目标冲突的稳健优化能力.

表3 5种算法在两个实际约束问题上所得解集的 HV 均值与标准差

实际问题	GREA-ARV	C-TAEA	hpaEA	CARV-MOEA	SPARVEA
WRP	1.525e+0 (4.435e-3)	1.453e+0 (6.267e-3)	1.493e+0 (8.260e-3)	1.504e+0 (4.953e-3)	1.483e+0 (7.135e-3)
CCD	3.339e-1 (1.108e-2)	2.823e-1 (1.608e-2)	3.261e-1 (8.957e-3)	2.926e-1 (1.174e-2)	2.423e-1 (1.328e-2)

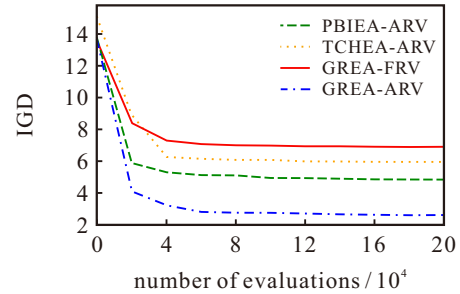
3.4 灰色关联环境选择和参考向量自适应调整的有效性分析

前面已经提到,在基于分解的 MOEAs 中,加权求和法、加权切比雪夫法 (TCH)^[7] 以及基于惩罚的边界交叉法 (PBI)^[8] 是 3 种常用的标量化方法,这些方法均可应用于本文算法.为了系统验证灰色关联环境选择策略的有效性,特别设计两种 GREA-ARV 的变体: TCHEA-ARV 和 PBIEA-ARV,其中环境选择模块分别采用加权 TCH 法和 PBI 法替代原有的灰色关联适应度 (GRF).不仅如此,为了评估自适应参考向量调整机制对 GREA-ARV 性能的影响,本文在原算法基础上设计了算法变体 GREA-FRV,该变体在种群进化过程中自始至终采用固定均匀分布的参考向量.基于此,开展了 GREA-ARV 与 3 种算法变体的对比实验研究.

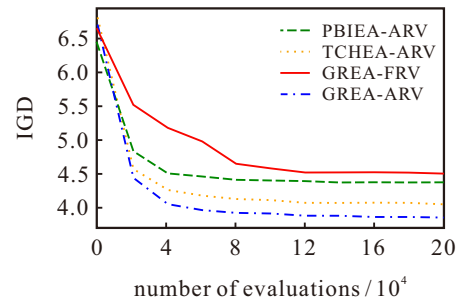
实验测试了 4 种算法在多个测试问题上的表现 (目标数设为 15),并通过 IGD 指标进行评估.结果显示, GREA-ARV 算法在所有测试问题上都取得了最优的 IGD 值,尤其在处理 DTLZ6、DTLZ7、SDTLZ1 和 IDTLZ2 时优势最为明显.图 4 展示了 4 种算法在这 4 个问题上 IGD 值随评估次数增加的变化趋势,其中折线的每一个节点取 20 次独立运行的平均值.从图 4 可以看出, GREA-ARV 展现出更快的收敛速度和更优的种群多样性.

相较于 TCHEA-ARV 和 PBIEA-ARV, GREA-ARV 在解决 SDTLZ1 和 IDTLZ2 时具有显著优势.该优势主要源于两方面原因:其一, GRF 基于混合相似关联度 (而非距离) 构建惩罚项,这使得算法对目标函数取值范围的变化 (包括缩放和倒置) 相对不敏感;其二, GRF 中的时间衰减因子在进化初期优先保证收敛性,当目标向量被缩放至远离理想点时,这一特性尤为有效.

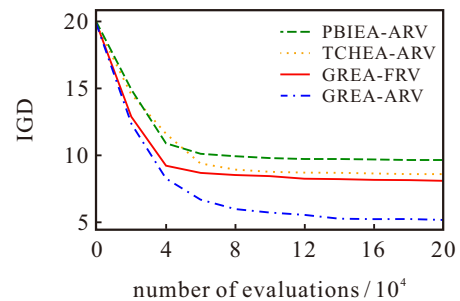
相较于 GREA-FRV, GREA-ARV 的自适应参考向量显著提升了算法对 DTLZ6 和 DTLZ7 这类具有复杂 PF 的问题的适应性.一方面,基于关联度阈值的向量生成策略能够准确识别并响应 PF 的局部变化特征;另一方面,周期性向量删减操作有效维持了种群分布的稳定性.



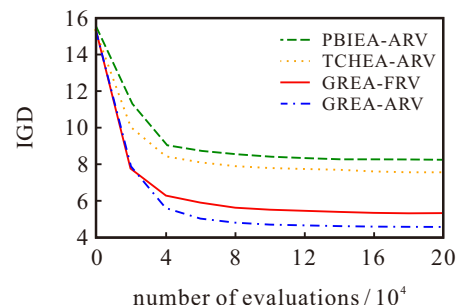
(a) DTLZ6



(b) DTLZ7



(c) SDTLZ1



(d) IDTLZ2

图4 4种算法的 IGD 变化曲线

3.5 参数敏感性分析

在 GREA-ARV 算法中,参数 f_r 的作用是控制参考向量的删除频率. f_r 设置得越大,向量删除频率越低.为了探究算法性能对 f_r 参数设置的敏感性,选取 9 个 10 目标基准测试问题,针对 f_r 的不同取值 (0.01,

0.05, 0.1, 0.2, 0.5) 开展对比实验, 每组参数独立运行 20 次, 基于 IGD 指标的均值结果进行性能分析。

如表 4 所示, 不同 f_r 对 GREA-ARV 算法性能的影响存在显著差异。当 f_r 设置过低 (如 0.01) 时, IGD 均值普遍较高, 表明算法在解集收敛性和多样性平衡方面表现欠佳。随着 f_r 逐渐增大至 0.1, 各测试问题的 IGD 值均呈现显著下降趋势, 且在 $f_r \geq 0.1$ 后趋于稳定, 性能提升幅度逐渐收敛。这一规律表明: 频繁删除向量可能误移除潜在活跃向量, 削弱算法对复杂 PF 结构的追踪能力, 进而降低解集质量; 而适当的 f_r 既能周期性消除冗余向量以保证参考向量数量与种群规模一致, 又能保留足够时间窗口维持参考向量分布的稳定性, 从而在全局探索与局部开发间取得平衡。此外, 当 f_r 超过 0.1 后, IGD 指标趋于平稳, 说明此时参考向量的自适应调整已能有效捕捉 PF 的演化特征, 进一步增加 f_r 对性能提升不再显著。

表4 GREA-ARV 在不同 f_r 下的 IGD 均值

问题	$f_r = 0.01$	$f_r = 0.05$	$f_r = 0.1$	$f_r = 0.2$	$f_r = 0.5$
DTLZ1	1.516e-1	1.208e-1	1.014e-1	1.014e-1	1.011e-1
DTLZ2	4.035e-1	3.674e-1	3.662e-1	3.660e-1	3.665e-1
DTLZ3	5.890e-1	5.713e-1	5.588e-1	5.591e-1	5.589e-1
DTLZ4	3.327e-1	3.220e-1	3.177e-1	3.177e-1	3.177e-1
DTLZ5	3.279e-1	2.343e-1	1.873e-1	1.870e-1	1.869e-1
DTLZ6	3.565e-1	3.186e-1	3.009e-1	3.013e-1	3.010e-1
DTLZ7	1.104e+0	9.228e-1	8.538e-1	8.532e-1	8.537e-1
SDTLZ1	3.421e-1	3.201e-1	3.084e-1	3.088e-1	3.091e-1
IDTLZ2	4.715e-1	3.899e-1	3.887e-1	3.883e-1	3.884e-1
IDTLZ2	4.715e-1	3.899e-1	3.887e-1	3.883e-1	3.884e-1

4 结论

本文提出了一种基于灰色关联与参考向量自适应调整的高维多目标优化算法。在环境选择阶段, 算法利用混合相似关联度实现解集在复杂目标空间的多样分布, 结合灰色接近关联度量化解的收敛程度, 通过灰色关联适应度函数筛选进入下一代的精英解; 在参考向量调整阶段, 采用一种结合动态生成和周期性删减的自适应策略, 提升算法对不规则 PF 的追踪能力。实验结果表明, 所提算法在收敛精度、多样程度及复杂 PF 适应性方面均优于其他 4 种对比算法。未来的研究方向是将 GREA-ARV 扩展至大规模超多目标优化领域, 重点提升算法在高维解空间中的全局搜索效率和多样性保持能力。

参考文献 (References)

[1] 王林锋, 揭丽琳, 黎明, 等. 基于自适应双阶段分级均

衡的约束高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1512-1522.

(Wang L F, Jie L L, Li M, et al. Constrained many-objective evolutionary algorithm based on adaptive two-stage hierarchical equilibrium[J]. Control and Decision, 2025, 40(5): 1512-1522.)

- [2] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601.
- [3] Yuan J W, Liu H L, Yang S P. An adaptive parental guidance strategy and its derived indicator-based evolutionary algorithm for multi- and many-objective optimization[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 84: 101449.
- [4] Ma H P, Fei M R, Jiang Z H, et al. A multipopulation-based multiobjective evolutionary algorithm[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(2): 689-702.
- [5] He L J, Camacho A, Ishibuchi H. Another difficulty of inverted triangular Pareto fronts for decomposition-based multi-objective algorithms[C]. Proceedings of the 2020 Genetic and Evolutionary Computation Conference. Cancún, 2020: 498-506.
- [6] Shang K, Ishibuchi H, He L J, et al. A survey on the hypervolume indicator in evolutionary multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(1): 1-20.
- [7] Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization[M]. Boston: Springer, 1999.
- [8] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [9] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [10] Liu H L, Chen L, Zhang Q F, et al. Adaptively allocating search effort in challenging many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(3): 433-448.
- [11] Li M Q, Yao X. What weights work for you? adapting weights for any Pareto front shape in decomposition-based evolutionary multiobjective optimisation[J]. *Evolutionary Computation*, 2020, 28(2): 227-253.
- [12] Liu Q Q, Jin Y C, Heiderich M, et al. Adaptation of reference vectors for evolutionary many-objective optimization of problems with irregular Pareto fronts[C]. 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Wellington, 2019: 1726-1733.
- [13] Liu Q Q, Jin Y C, Heiderich M, et al. Coordinated adaptation of reference vectors and scalarizing functions in evolutionary many-objective optimization[J]. *IEEE*

- [Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems](#), 2023, 53(2): 763-775.
- [14] Liu S F. Grey systems analysis: Methods, models and applications[M]. Singapore: Springer, 2024.
- [15] Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. *Complex Systems*, 1995, 9(2): 115-148.
- [16] Deb K, Goyal M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design[J]. *Computer Science and Informatics*, 1996, 26(4): 30-45.
- [17] Cornell J A. Experiments with mixtures: Designs, models, and the analysis of mixture data[M]. Hoboken: Wiley, 2011.
- [18] Li K, Chen R, Fu G, et al. Two-archive evolutionary algorithm for constrained multiobjective optimization[J]. [IEEE Transactions on Evolutionary Computation](#), 2019, 23(2): 303-315.
- [19] Chen H, Tian Y, Pedrycz W, et al. Hyperplane assisted evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. [IEEE Transactions on Cybernetics](#), 2020, 50(7): 3367-3380.
- [20] Li W, Chen Y T, Dong Y H, et al. A solution potential-based adaptation reference vector evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. [Swarm and Evolutionary Computation](#), 2024, 84: 101451.
- [21] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization[C]. *Evolutionary Multiobjective Optimization*. London: Springer, 2005: 105-145.
- [22] Jain H, Deb K. An improved adaptive approach for elitist nondominated sorting genetic algorithm for many-objective optimization[C]. *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Berlin: Springer, 2013: 307-321.
- [23] Palakonda V, Kang J M, Jung H. Benchmarking real-world many-objective problems: A problem suite with baseline results[J]. [IEEE Access](#), 2024, 12: 49275-49290.
- [24] Bosman P A N, Thierens D. The balance between proximity and diversity in multiobjective evolutionary algorithms[J]. [IEEE Transactions on Evolutionary Computation](#), 2003, 7(2): 174-188.
- [25] While L, Hingston P, Barone L, et al. A faster algorithm for calculating hypervolume[J]. [IEEE Transactions on Evolutionary Computation](#), 2006, 10(1): 29-38.
- [26] Li K, Deb K, Zhang Q, Kwong S. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. [IEEE Transactions on Evolutionary Computation](#), 2015, 19(5): 694-716.
- [27] Jain H, Deb K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to an adaptive approach[J]. [IEEE Transactions on Evolutionary Computation](#), 2014, 18(4): 602-622.

作者简介

曾骏驰 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为多目标优化, E-mail: 6233115024@stu.jiangnan.edu.cn;

张欣 (1992-), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为人工智能、计算智能及其应用, E-mail: zhangxin@jiangnan.edu.cn;

钱鹏江 (1979-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为模式识别理论与技术、机器学习理论与技术和生物信息学, E-mail: qianpjiang@jiangnan.edu.cn;

方伟 (1980-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为智能优化、大数据分析、复杂生产过程建模、优化与调度, E-mail: fangwei@jiangnan.edu.cn.