

控制与决策

Control and Decision

矩阵权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化

熊如新, 妙锁霞, 巩勇杰, 刘俊秀, 苏厚胜

引用本文:

熊如新, 妙锁霞, 巩勇杰, 等. 矩阵权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化[J]. *控制与决策*, 2026, 41(4): 1089–1096.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0550>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

布尔控制网络的集成集可控

Ensemble set controllability of Boolean control networks

控制与决策. 2021, 36(9): 2187–2194 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1837>

求解非线性方程组的智能优化算法综述

Overview of intelligent optimization algorithms for solving nonlinear equation systems

控制与决策. 2021, 36(4): 769–778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0379>

基于复杂昂贵仿真的体系效能多目标优化

Complex and expensive simulation based multi-objective optimization to system-of-system effectiveness

控制与决策. 2021, 36(3): 589–598 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0844>

基于分解的多目标多因子进化算法

A multiobjective multifactorial evolutionary algorithm based on decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 637–644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0525>

基于知识粒度特征的多目标粗糙集属性约简算法

Multi objective rough set attribute reduction algorithm based on characteristics of knowledge granularity

控制与决策. 2021, 36(1): 196–205 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0490>

矩阵权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化

熊如新¹, 妙锁霞^{1,2†}, 巩勇杰¹, 刘俊秀³, 苏厚胜⁴

- (1. 江西水利电力大学 理学院, 南昌 330000;
2. 江西水利电力大学 工程数学与先进计算重点实验室, 南昌 330000;
3. 广西师范大学 广西类脑计算与智能芯片重点实验室, 广西 桂林 541000;
4. 华中科技大学 人工智能与自动化学院, 武汉 430000)

摘要: 针对矩阵权重网络上的一阶混杂多智能体系统的分布式优化问题, 提出一种新颖的分布式优化控制算法, 对于连续时间子系统采用了采样控制方法. 在所提出的优化控制协议下, 基于矩阵理论、Lyapunov 稳定性理论和不等式技术等方法建立了该混杂系统实现优化一致的代数条件, 并进一步推导出代数图条件. 具体而言, 如果混杂系统的采样周期满足一定条件以及每个智能体的局部代价函数为强凸时, 当拉普拉斯矩阵的零空间跨越一致性子空间或者矩阵权重图中包含正生成树时, 系统可以在全局最优解处达到一致. 最后, 通过数值仿真验证了所提出算法的有效性.

关键词: 混杂多智能体系统; 分布式优化; 矩阵权重; Lyapunov 函数; 凸优化; 不等式技术

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0550

引用格式: 熊如新, 妙锁霞, 巩勇杰, 等. 矩阵权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化 [J]. 控制与决策, 2026, 41(4): 1089-1096.

Distributed optimization for hybrid multi-agent systems on matrix-weighted networks

XIONG Ru-xin¹, MIAO Suo-xia^{1,2†}, GONG Yong-jie¹, LIU Jun-xiu³, SU Hou-sheng⁴

- (1. School of Science, Jiangxi University of Water Resources and Electric Power, Nanchang 330000, China;
2. Key Laboratory of Engineering Mathematics and Advanced Computing, Jiangxi University of Water Resources and Electric Power, Nanchang 330000, China;
3. Guangxi Key Laboratory of Brain-inspired Computing and Intelligent Chips, Guangxi Normal University, Guilin 541000, China;
4. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430000, China)

Abstract: This paper addresses a distributed optimization problem for first-order hybrid multi-agent systems on matrix-weighted networks, and proposes a novel distributed optimization control algorithm, in which a sampled control method is utilized in the continuous-time subsystem. Under the proposed optimal control protocol, an algebraic condition for achieving optimization consensus in the hybrid systems is established based on matrix theory, the Lyapunov stability theory, and inequality techniques, and further an algebraic graph condition is derived. Specifically, if the sampling period for the hybrid system satisfies certain condition and the local cost function of each agent is strongly convex, the system can achieve consensus at the global optimal solution when the null space of the Laplacian matrix spans the consensus subspace or the matrix-weighted graph contains a positive spanning tree. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is verified by numerical simulation.

Keywords: hybrid multi-agent systems; distributed optimization; matrix-weighted; Lyapunov function; convex optimization; inequality technique

0 引言

多智能体系统是由多个具有自主性、协作性和

竞争性的智能体组成的系统. 近年来, 随着物联网、边缘计算、智能交通等技术的快速发展, 多智能体系

收稿日期: 2025-05-28; **录用日期:** 2025-07-31.

基金项目: 国家自然科学基金地区项目 (62263024); 国家杰出青年科学基金项目 (62425602); 国家自然科学基金面上项目 (62273159); 广西类脑计算与智能芯片重点实验室开放基金课题项目 (BCIC-23-K2); 湖北省自然科学基金创新群体项目 (2025AFA027); 江西水利电力大学科研启动基金项目 (2023kyqd021).

责任编辑: 王凌.

†通信作者. E-mail: suoxiamiao1215@163.com.

统分布式优化问题已成为多智能体系统协同控制领域的研究热点. 与集中式优化相比, 分布式优化在应对大规模数据集和高性能计算的需求时可以展现出更好的性能, 并且具有更好的隐私性和鲁棒性, 在智能电网^[1-2]、机器人编队控制^[3-4]和无人机协同控制^[5-6]等多个领域得到了广泛的应用.

近年来, 多智能体系统的分布式优化问题取得了众多的研究成果. 文献 [7] 研究了一种基于衰减步长的次梯度离散时间控制协议, 并分析了算法的收敛性; 同时, 文献 [8] 进一步设计了投影次梯度算法, 解决了智能体的状态被限制在凸集上的问题. 文献 [7-8] 构建了分布式凸优化的基础框架. 随后, 在此框架上, 国内外学者展开了大量研究, 这些研究工作可以分为离散时间模型^[9-11]和连续时间模型^[12-15]. 然而, 上述研究内容均基于同质的动力学模型, 但在现实世界中, 连续时间动力学智能体和离散时间动力学智能体会经常同时出现在同一系统中. 例如, 能切换陆空模式的两栖无人机系统, 诸如此类的系统被称作混杂多智能体系统. 目前, 混杂多智能体系统的协调控制^[16-19]问题已受到国内外众多学者的关注. 文献 [16] 设计了 3 种一致性控制协议, 并基于矩阵理论和图理论, 建立了在不同采样周期限制下混杂多智能体系统达成一致的充要条件. 在此基础上, 文献 [17] 进一步研究混杂多智能体系统的二阶一致性问题; 文献 [18] 研究了一阶混杂多智能体和连续时间异构多智能体系统的分布式优化问题; 文献 [19] 设计了一种分布式优化算法, 解决了混杂多智能体系统上非平衡有向图下的分布式复合凸优化问题.

文献 [16-19] 中研究的混杂多智能体系统协调控制都是基于标量权重网络, 在现实世界的系统中, 智能体状态通常是具有多维耦合关系的, 标量权重不能捕获这种多维依赖关系. 例如在观点动力学中, 人与人之间的观点的统一不仅受到每个人不同观点的影响, 还受每个人的动作、神情等方面影响^[20]. 因此, 矩阵权重网络自然出现在许多场景中, 如多智能体系统的协调控制^[21-25]和混杂多智能体系统的协调控制^[26-28]. 分析上述研究成果可知, 虽然矩阵权重网络上混杂多智能体系统的一致性控制、可控性控制等问题获得了一些研究成果, 但对于分布式优化问题的研究成果目前尚少. 由于互联网技术的兴起, 需要大规模计算的场景增多, 分布式优化在处理大规模数据集、保障数据隐私和提升系统鲁棒性方面优势明显, 并且广泛应用于智能电网和无人机集群等

领域. 因此, 针对实际系统中普遍存在的混杂动力学与多维耦合需求, 受文献 [14, 26] 的启发, 本文研究矩阵权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化问题, 并设计一种分布式优化算法使得混杂多智能体系统可以在全局最优解处达到一致. 本文的主要工作如下:

1) 提出一种分布式优化控制算法, 对于连续时间子系统, 采用采样控制方法进行分析, 可降低通信和资源消耗.

2) 所提出的分布式控制协议中的离散时间子系统的采样步长是一个常数, 只需要满足一个简单的代数条件. 与文献 [18-19] 中设置的衰减步长相比, 不仅放松了对步长的限制, 还提高了算法的收敛速度.

3) 在所设计的优化控制协议下, 基于矩阵理论、Lyapunov 稳定性理论和不等式技术等方法, 得到了混杂系统实现优化一致的条件. 此外, 一阶连续时间、离散时间的多智能体系统的分布式优化问题, 以及一阶标量权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化问题, 都可以看作是本文的一种特殊情况. 因此, 本文的研究内容更具有一般性.

1 预备知识与问题描述

1.1 符号说明

符号说明如表 1 所示.

表1 符号说明

符号	含义
$\mathbb{R}^{Nd \times Nd}$	$Nd \times Nd$ 维实矩阵
$\mathbf{1}_n$	所有元素均为 1 的 n 维列向量
$\mathbf{0}_{p \times q}$	$p \times q$ 维零矩阵
$\ \cdot\ $	欧几里得范数
I_d	$d \times d$ 维单位矩阵
$\text{Range}\{W\}$	矩阵 W 的值域
\otimes	克罗内克积
\mathcal{I}_m	从整数 1 到整数 m 的集合
$\mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_m$	从整数 $m+1$ 到整数 N 的集合

1.2 图论知识

在由 N 个节点组成的混杂多智能体系统中, 令 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 为矩阵权重的无向通信图, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 为节点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集, $\mathcal{A} = \{A_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d} | A_{ij}^\top = A_{ji} \geq 0, (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 为权重集. 当 $(j, i) \notin \mathcal{E}$ 时, 连接两个智能体边的权重 $A_{ij} = \mathbf{0}_{d \times d}$. 定义 $\mathcal{N}_i = \{j | (j, i) \in \mathcal{E}, j \in \mathcal{V}\}$ 为节点 i 的邻居节点集合. 图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{Nd \times Nd}$, 其中 $l_{ij} = -A_{ij}, i \neq j, l_{ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}, i = j$. 如果无向图 \mathcal{G}

是无环的, 并且在任何两个节点之间都有一条路径, 则称它为一棵树, 进一步包含 G 中所有节点且连接每个节点之间的边的权重都是一个正定矩阵的树称为正生成树.

1.3 凸优化知识

本部分将介绍一些与凸优化相关的基本概念.

如果对于任意的 $z, x \in S$ 以及 $\psi \in [0, 1]$, 都有 $\psi z + (1 - \psi)x \in S$, 则集合 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 被定义为凸集^[13].

如果对于所有 $\psi \in [0, 1]$, 不等式 $f(\psi z + (1 - \psi)x) \leq \psi f(z) + (1 - \psi)f(x)$ 对任意 $z, x \in S$ 都成立, 则函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数^[13].

如果对于所有 $\psi \in [0, 1]$, 不等式 $f(\psi z + (1 - \psi)x) < \psi f(z) + (1 - \psi)f(x)$ 对任意 $z \neq x \in S$ 都成立, 则函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为严格凸函数^[13].

1.4 问题描述

考虑一个由 N 个智能体所构成的一阶矩阵权重混杂多智能体系统, 系统中包含 m 个连续时间动态智能体与 $N - m$ 个离散时间动态智能体, 其中 m 满足 $0 \leq m \leq N$. 为了便于分析, 将它们从 $1 \sim N$ 进行编号, 其中连续时间动态智能体依次编号为 $1 \sim m$, 离散时间动态智能体依次编号为 $m + 1 \sim N$. 其具体形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t), & i \in \mathcal{I}_m; \\ x_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) + \tau u_i(t_k), & i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_m. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i(\cdot) \in \mathbb{R}^d$ 是混杂系统中智能体 i 的位置状态; $u_i(\cdot) \in \mathbb{R}^d$ 是混杂系统的控制输入; $\tau = t_{k+1} - t_k > 0$ 是采样周期, $t_k = k\tau, k \in \mathbb{Z}^+$.

假设 $f_i(x_i) = [f_{i1}(x_{i1}), f_{i2}(x_{i2}), \dots, f_{id}(x_{id})]^T$ ($i = 1, 2, \dots, N$)是智能体 i 的局部代价函数, $F(x) = \left[\sum_{i=1}^n f_{i1}(x_{i1}), \dots, \sum_{i=1}^n f_{id}(x_{id}) \right]^T$ 是全局代价函数. 本文的研究目标是通过设计一种分布式优化控制协议来最小化全局代价函数 $F(x)$, 即

$$X^* = \arg \min_x F(x), \quad (2)$$

其中 $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_d^*]^T$.

注 1 对于传统的分布式优化问题, 全局代价函数通常是一个标量, 其优化目标是通过智能体之间的相互协作去最小化一个全局代价函数. 然而, 在矩阵权重网络下的分布式优化问题中, 智能体的局部代价函数是多维的, 每一个维度皆被视作一个独立的优化单元, 并且每个维度都有其自身的全局代价函数, 这类问题的优化目标是最小化每个维度上的全局代价函数. 因此, 最优解不再是一个标量, 而是

一个 d 维列向量.

定义 1 当一阶混杂多智能体系统 (1) 满足以下条件时, 则说明实现了分布式优化一致:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(t_{k+1}) = X^*.$$

为了解决分布式优化问题 (2), 提出如下假设.

假设 1 全局代价函数 $F(x)$ 是严格凸函数, 对于所有 $x \neq y$, 有 $(y - x)^T(\nabla F(y) - \nabla F(x)) > 0$.

假设 2 局部代价函数 $f_i(x_i)$ 的每个维度的函数 $f_{ij}(x_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, d$)是 μ_i -强凸的, 对于所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 有 $(y - x)^T(\nabla f_{ij}(y) - \nabla f_{ij}(x)) \geq \mu \|y - x\|^2$.

假设 3 局部代价函数 $f_i(x_i)$ 的每个维度的函数 $f_{ij}(x_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, d$)的次梯度满足 θ_i -利普希茨条件 ($\theta_i > 0$), 即对于所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 有 $\|\nabla f_{ij}(y) - \nabla f_{ij}(x)\| \leq \theta_i \|y - x\|$.

2 主要结果

为了解决分布式优化问题 (2), 设计如下的矩阵权重网络上多智能体系统的分布式优化控制协议, 给出在此控制协议下使得混杂多智能体系统 (1) 实现优化一致的代数条件, 并进一步推导出代数图条件, 即

$$\begin{cases} u_i(t) = -\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_k); \\ \dot{\varphi}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})), \\ \quad i \in \mathcal{I}_m, t \in [t_k, t_{k+1}]; \\ u_i(t_k) = -\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_k); \\ \varphi_i(t_{k+1}) = \varphi_i(t_k) + \tau \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})), \\ \quad i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_m. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\varphi_i(t) \in \mathbb{R}^d$ 和 $\varphi_i(t_k) \in \mathbb{R}^d$ 是积分反馈项.

注 2 在文献 [18] 设计的分布式控制协议中, 离散时间子系统的采样步长为一个衰减步长, 要求当时间趋于无穷时, 步长要衰减到0. 在本文中, 分布式控制协议 (3) 中所设计的采样步长 τ 是一个固定步长, 只需要满足一个简单的代数条件即可, 并且采用固定步长可以很好地避免衰减步长所带来的收敛速度较慢的影响.

结合式 (1) 和 (3) 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_k), \\ \dot{\varphi}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})); \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} x_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) + \tau[-\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_k)], \\ \varphi_i(t_{k+1}) = \varphi_i(t_k) + \tau \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})). \end{cases} \quad (4b)$$

对式 (4a) 中 $\dot{x}_i(t)$ 从 $t_k \sim t$ 积分, $\dot{\varphi}_i(t)$ 从 $t_k \sim t_{k+1}$ 积分得到

$$\begin{cases} x_i(t) = \\ x_i(t_k) + (t - t_k)\{-\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_k)\}, \\ \varphi_i(t_{k+1}) = \\ \varphi_i(t_k) + (t_{k+1} - t_k)\left\{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1}))\right\}. \end{cases} \quad (5)$$

令 $t = t_{k+1}$, 可以得到在特定的时间序列下矩阵权重网络上的混杂多智能体系统的统一形式为

$$\begin{aligned} x_i(t_{k+1}) = & \\ x_i(t_k) + \tau \left\{ -\nabla f_i(x_i(t_k)) - (\varphi_i(t_{k+1}) - \right. & \\ \left. \tau \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1}))) \right\}. & \quad (6) \end{aligned}$$

对式 (6) 进行收敛性分析, 得到如下定理.

定理 1 若假设 1 ~ 假设 3 成立, $\sum_{i=1}^N \varphi_i(0) = 0$, $\tau < \min \left\{ \frac{2\mu}{\theta^2 + \lambda_{Nd}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda_{Nd}}} \right\}$, 且 $N(L) = \text{Range}\{1_N \otimes I_d\}$, 则混杂多智能体系统 (1) 可以在控制协议 (3) 下解决矩阵权重网络上的优化问题 (2).

证明 将式 (6) 进一步分解可以得到

$$\begin{cases} x_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) - \tau \nabla f_i(x_i(t_k)) - \tau \varphi_i(t_k), \\ \varphi_i(t_{k+1}) = \varphi_i(t_k) + \tau \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})). \end{cases} \quad (7)$$

随后, 将式 (7) 写成矩阵的形式为

$$\begin{cases} X(t_{k+1}) = X(t_k) - \tau \nabla F(X(t_k)) - \tau \varphi(t_k), \\ \varphi(t_{k+1}) = \varphi(t_k) + \tau LX(t_{k+1}). \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla F(X(t_k)) = & \\ [\nabla f_1(x_1(t_k))^T, \dots, \nabla f_N(x_N(t_k))^T]^T \in \mathbb{R}^{Nd}, & \\ X(t_k) = [x_1(t_k)^T, \dots, x_N(t_k)^T]^T \in \mathbb{R}^{Nd}, & \\ \varphi(t_k) = [\varphi_1(t_k)^T, \dots, \varphi_N(t_k)^T]^T \in \mathbb{R}^{Nd}. & \end{aligned}$$

假设系统的平衡点为 (X^*, φ^*) , 可以得到

$$\begin{cases} LX^* = 0, \\ \nabla F(X^*) + \varphi^* = 0. \end{cases}$$

定义系统误差为 $\alpha(t_k) = X(t_k) - X^*$, $\beta(t_k) = \varphi(t_k) - \varphi^*$, 根据式 (8) 可以得到

$$\begin{cases} \alpha(t_{k+1}) = \alpha(t_k) - \tau g(t_k) - \tau \varphi(t_k), \\ \beta(t_{k+1}) = \beta(t_k) + \tau LX(t_{k+1}), \end{cases}$$

其中 $g(t_k) = \nabla F(\alpha(t_k) + X^*) - \nabla F(X^*)$.

构造一个正交矩阵 $Q = [r, R] \in \mathbb{R}^{Nd \times Nd}$ 使其元素满足以下条件:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1_N \otimes I_d}{\sqrt{N}}, \quad (1_N \otimes I_d)^T R = \mathbf{0}_{d \times (N-1)d}, \\ R^T R &= I_{(N-1)d}, \\ RR^T &= I_{Nd} - \frac{(1_N \otimes I_d)(1_N \otimes I_d)^T}{N}. \end{aligned}$$

根据构造的正交矩阵, 对 $\alpha(t_k)$, $\beta(t_k)$ 进行如下变换:

$$\tilde{\alpha}(t_k) = Q^T \alpha(t_k), \quad \tilde{\beta}(t_k) = Q^T \beta(t_k).$$

将 $\tilde{\alpha}(t_k)$, $\tilde{\beta}(t_k)$ 分解成一致项和非一致项得

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_d(t_{k+1}) = \tilde{\alpha}_d(t_k) - \tau r^T g(t_k), \\ \tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_{k+1}) = R^T \tilde{\alpha}(t_{k+1}) = \\ \tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_k) - \tau R^T g(t_k) - \tau \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k), \\ \tilde{\beta}_d(t_{k+1}) = r^T \tilde{\beta}(t_{k+1}) = \tilde{\alpha}_d(t_k), \\ \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_{k+1}) = R^T \tilde{\beta} = \\ \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \tau (R^T LR) \tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_{k+1}). \end{cases} \quad (9)$$

根据式 (9) 的结果, 设计如下的李亚普诺夫函数:

$$V(t_k) = V_1(t_k) + (1 - \lambda_{Nd} \tau^2) V_2(t_k). \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} V_1(t_k) = \\ \tilde{\alpha}_d^T(t_k) \tilde{\alpha}_d(t_k) + \tilde{\beta}_{(N-1)d}^T(t_k) (R^T LR)^{-1} \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k), \\ V_2(t_k) = \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k) \tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_k). \end{cases}$$

分别对 $V_1(k)$, $V_2(k)$ 进行差分, 可以得到

$$\begin{aligned} \nabla V_1(t_k) = V_1(t_{k+1}) - V_1(t_k) = & \\ -2\tau \tilde{\alpha}_d^T(t_k) r^T g(t_k) + \tau^2 g^T(t_k) r r^T g(t_k) + & \\ 2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_{k+1}) \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + & \\ \tau^2 \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_{k+1}) (R^T LR) \tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_{k+1}), & \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla V_2(t_k) = V_2(t_{k+1}) - V_2(t_k) = & \\ -2\tau \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k) R^T g(t_k) - & \\ 2\tau \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k) \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + & \\ 2\tau^2 g^T(t_k) R \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + & \\ \tau^2 g^T(t_k) R R^T g(t_k) + & \\ \tau^2 \tilde{\beta}_{(N-1)d}^T(t_k) \tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k). & \quad (12) \end{aligned}$$

根据对称矩阵的谱分解性质可得

$$\begin{aligned}
 & 2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_{k+1})\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \\
 & \tau^2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_{k+1})(R^T LR)\tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_{k+1}) \leq \\
 & 2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_{k+1})\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \\
 & \lambda_{Nd}\tau^2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_{k+1})\tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_{k+1}). \quad (13)
 \end{aligned}$$

将式 (9) 中的结果代入 (13), 并结合式 (11) 和 (12) 的结果可得

$$\begin{aligned}
 & \nabla V_1(t_k) \leq \\
 & -2\tau\tilde{\alpha}_d^T(t_k)r^T g(t_k) - 2\tau^2 g^T(t_k)R\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \\
 & 2\tau\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \tau^2 g^T(t_k)rr^T g(t_k) - \\
 & 2\tau^2\tilde{\beta}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \\
 & \lambda_{Nd}\tau^2(\nabla V_2(t_k) + \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_k)). \quad (14)
 \end{aligned}$$

因此, 结合式 (12), (14) 的结果, 可以得到

$$\begin{aligned}
 & \nabla V(t_k) \leq \\
 & \tau^2\tilde{\beta}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \\
 & \tau^2(g^T(t_k)rr^T g(t_k) + g^T(t_k)RR^T g(t_k)) - \\
 & 2\tau(\tilde{\alpha}_d^T(t_k)r^T g(t_k) + \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k)R^T g(t_k)) + \\
 & \lambda_{Nd}\tau^2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_k). \quad (15)
 \end{aligned}$$

由假设 2 和假设 3 可以得到

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\alpha}_d^T(t_k)r^T g(t_k) + \tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k)R^T g(t_k) \geq \mu\tilde{\alpha}^T\tilde{\alpha}, \\
 & g^T(t_k)rr^T g(t_k) + g^T(t_k)RR^T g(t_k) \leq \theta^2\tilde{\alpha}^T\tilde{\alpha}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

将式 (16) 的结果代入 (15) 可得

$$\begin{aligned}
 & \nabla V(t_k) \leq \\
 & -2\tau\mu\tilde{\alpha}^T\tilde{\alpha} + \tau^2\theta^2\tilde{\alpha}^T\tilde{\alpha} - \\
 & \tau^2\tilde{\beta}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k) + \\
 & \lambda_{Nd}\tau^2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\alpha}_{(N-1)d}(t_k) \leq \\
 & -c_1\tilde{\alpha}_d^T\tilde{\alpha}_d - c_2\tilde{\alpha}_{(N-1)d}^T\tilde{\alpha}_{(N-1)d} - \\
 & \tau^2\tilde{\beta}_{(N-1)d}^T(t_k)\tilde{\beta}_{(N-1)d}(t_k). \quad (17)
 \end{aligned}$$

其中: $c_1 = \tau^2\theta^2 + 2\tau\mu$, $c_2 = \lambda_{Nd}\tau^2 + \tau^2\theta^2 - 2\tau\mu$, 当 $c_2 < 0, 1 - \lambda_{Nd}\tau^2 > 0, \tau < \min\left\{\frac{2\mu}{\theta^2 + \lambda_{Nd}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda_{Nd}}}\right\}$ 时, 可以得到 $V(t_k) > 0, \nabla V(t_k) \leq 0$. 根据 LaSalle 不变原理, 可以说明系统实现了优化一致, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(t_k) = X^*.$$

接下来, 针对连续时间子系统进行收敛性分析.

$$\begin{aligned}
 & \|x_i(t) - x_i(t_k)\| = \\
 & \left\| (t - t_k) \left(-\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_{k+1}) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. (t - t_k) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})) \right) \Big\| \leq \\
 & \left\| \tau \left(-\nabla f_i(x_i(t_k)) - \varphi_i(t_{k+1}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \tau \sum_{j \in \mathcal{N}_i} A_{ij}(x_i(t_{k+1}) - x_j(t_{k+1})) \right) \right\| \leq \\
 & \|x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)\|, t \in (t_k, t_{k+1}]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

因此, 当 $t \rightarrow \infty$, 即 $k \rightarrow \infty$ 时, 可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(t_k) = X^*.$$

综上所述, 矩阵权重网络上的混杂多智能体系统 (1) 在控制协议 (3) 作用下实现了优化一致. □

注 3 对于连续时间子系统部分, 本文使用了采样控制方法, 可以降低通信和计算负担, 提高系统效率. 此外, 运用采样控制方法还能增强系统的鲁棒性, 使其在存在干扰、不确定性、通信延迟或数据丢包的情况下, 仍能基于最近采样数据进行控制决策, 可以有效补偿系统延迟, 提升系统的稳定性和性能.

注 4 当 $m = 0$ 时, 矩阵权重网络上混杂多智能体系统 (1) 就变成一阶矩阵权重网络上离散时间多智能体系统; 当 $m = N$ 时, 矩阵权重网络上混杂多智能体系统 (1) 就变成一阶矩阵权重网络上连续时间多智能体系统; 当 $d = 1$ 时, 矩阵权重网络就变成了标量权重网络. 因此, 一阶连续时间、离散时间的多智能体系统的分布式优化问题, 以及一阶标量权重网络上混杂多智能体系统的分布式优化问题, 都可以看作是本文的一种特殊情况. 因此, 本文的研究内容更具有一般性.

推论 1 当假设 1 ~ 假设 3 成立, 控制协议中参数满足 $\sum_{i=1}^N \varphi_i(0) = \mathbf{0}, \tau < \min\left\{\frac{2\mu}{\theta^2 + \lambda_{Nd}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda_{Nd}}}\right\}$ 时, 如果图 \mathcal{G} 有一棵正生成树, 则矩阵权重网络上的混杂多智能体系统 (1) 可以通过控制协议 (3) 来实现优化问题 (2).

3 数值仿真

本节用数值实验来验证所提出算法的有效性. 考虑一个由 8 个智能体组成的一阶矩阵权重网络上混杂多智能体系统, 如图 1 所示. 智能体 1 ~ 智能体 4 表示连续时间智能体, 智能体 5 ~ 智能体 8 表示离散时间智能体.

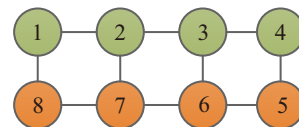


图1 8个智能体的通信拓扑图

每个智能体的初始状态分别设定为

$$\begin{aligned} x_1 &= [3; -1; -2], x_2 = [-1; 2; 1], \\ x_3 &= [0; -1; 2], x_4 = [2; 1; -1], \\ x_5 &= [1; 2; -2], x_6 = [-2; -1; 2], \\ x_7 &= [2; -1; 0], x_8 = [2; 1; 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{78} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{18} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \\ A_{67} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, A_{36} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

每个智能体的代价函数为

$$f_i(x_i, k) = \begin{bmatrix} a_1^{(k)}(x_{i1} - b_1^{(k)})^2 + c_1^{(k)}(x_{i1})^2 \\ a_2^{(k)}(x_{i2} - b_2^{(k)})^2 + c_2^{(k)}(x_{i2})^2 \\ a_3^{(k)}(x_{i3} - b_3^{(k)})^2 + c_3^{(k)}(x_{i3})^2 \end{bmatrix},$$

其中代价函数中的参数如表2所示.

表2 参数表

k	$a_1^{(k)}$	$b_1^{(k)}$	$c_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$b_2^{(k)}$	$c_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$	$b_3^{(k)}$	$c_3^{(k)}$
1	1	-1	1	1	1	1	1	-3	1
2	1	3	1	1	1	1	1	-4	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0	0
4	1	1	0	1	2	0	1	3	0
5	1	-1	1	1	2	1	1	-1	1
6	1	3	1	1	1	1	1	-4	1
7	2	0	0	1	0	1	1	0	2
8	1	2	0	1	1	0	1	2	0

连接每个智能体之间的边的权重为

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \\ A_{34} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, A_{56} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{27} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, A_{45} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

可以得到 $N(L) = \text{Range}\{1_8 \otimes I_3\}$, 设置采样周期 $\tau = 0.2$, 8个智能体状态的轨迹如图2所示, 8个智能体都收敛到了最优解. 每个智能体之间的边的权重为

$$\begin{aligned} A_{18} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \\ A_{23} &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{56} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \\ A_{67} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{78} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{45} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{34} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \\ A_{45} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{34} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \\ A_{36} &= \begin{bmatrix} 20.5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{27} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其他参数保持不变, 可得到 $N(L) \neq \text{Range}\{1_8 \otimes I_3\}$, 此时8个智能体状态的轨迹如图3所示, 呈现

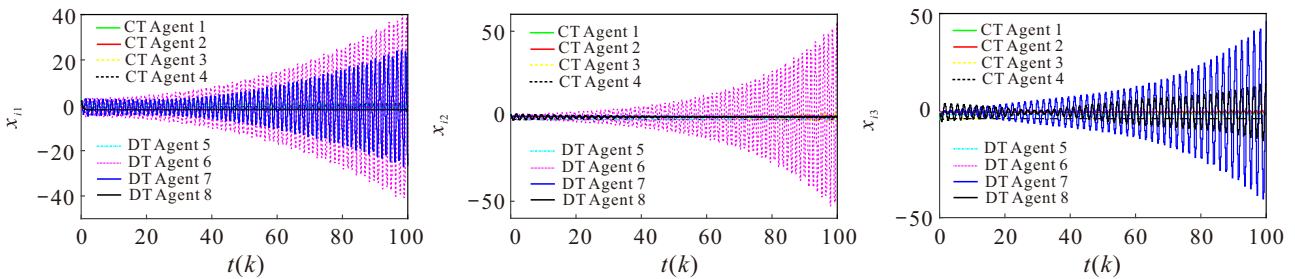


图2 当 $N(L) = \text{Range}\{1_8 \otimes I_3\}$ 时, 8个智能体状态的轨迹

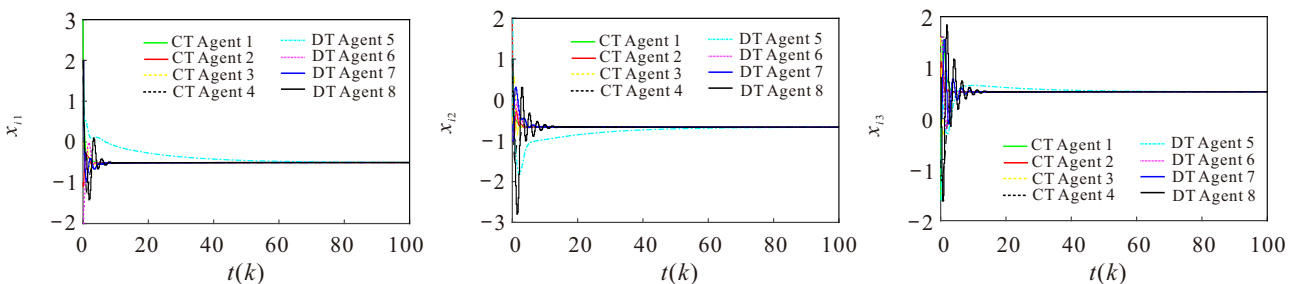


图3 当 $N(L) \neq \text{Range}\{1_8 \otimes I_3\}$ 时, 8个智能体状态的轨迹

出发散的状态, 这与本文给出的定理 1 中的结论一致.

4 结论

本文研究了矩阵权重网络上一阶混杂多智能体系统的分布式优化问题, 提出了一种基于梯度项和积分反馈项分布式优化算法, 采用矩阵理论、Lyapunov 稳定性理论和不等式技术等方法证明了智能体可以在设计的优化控制协议下实现优化一致. 最后, 利用数值仿真实例验证了所提出算法的有效性.

参考文献 (References)

- [1] 郭方洪, 徐博文, 张文安, 等. 基于学习优化的智能电网能量管理研究综述[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1089-1101.
(Guo F H, Xu B W, Zhang W A, et al. Learning-to-optimize based energy management in smart grid: A survey[J]. Control and Decision, 2022, 37(5): 1089-1101.)
- [2] Mao S, Dong Z W, Schultz P, et al. A finite-time distributed optimization algorithm for economic dispatch in smart grids[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 2068-2079.
- [3] Alonso-Mora J, Montijano E, Nägeli T, et al. Distributed multi-robot formation control in dynamic environments[J]. *Autonomous Robots*, 2019, 43(5): 1079-1100.
- [4] Zhang Y W, Oguz S, Wang S P, et al. Self-reconfigurable hierarchical frameworks for formation control of robot swarms[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, 54(1): 87-100.
- [5] 向雨竹, 邹文成, 郭健, 等. 无人机领导的多无人艇系统固定时间优化编队控制[J]. 控制与决策, 2025, 40(1): 223-230.
(Xiang Y Z, Zou W C, Guo J, et al. Fixed-time optimal formation control for multi-unmanned surface vessels under the leadership of unmanned aerial vehicle[J]. Control and Decision, 2025, 40(1): 223-230.)
- [6] 李海峰, 杨宏安, 盛梓茂, 等. 基于 MAPPO 的多无人机协同分布式动态任务分配[J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1429-1437.
(Li H F, Yang H A, Sheng Z M, et al. Multi-UAV collaborative distributed dynamic task allocation based on MAPPO[J]. Control and Decision, 2025, 40(5): 1429-1437.)
- [7] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48-61.
- [8] Nedic A, Ozdaglar A, Parrilo P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 922-938.
- [9] Zhu M H, Martinez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 151-164.
- [10] Nedić A, Olshevsky A, Shi W. Achieving geometric convergence for distributed optimization over time-varying graphs[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2017, 27(4): 2597-2633.
- [11] Qu G N, Li N. Harnessing smoothness to accelerate distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 5(3): 1245-1260.
- [12] 李璐珂, 甘勤涛, 孙海涛. 切换拓扑下多智能体系统的固定/预定时间优化一致性[J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1485-1493.
(Li L K, Gan Q T, Sun H T. Distributed fixed/predefined-time optimal consensus for multi-agent systems under switching topologies[J]. Control and Decision, 2025, 40(5): 1485-1493.)
- [13] Lin P, Zeng C Y, Zhang J H, et al. Distributed constrained continuous-time optimization with input and interaction constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, 70(6): 3862-3875.
- [14] Wang D, Wang D, Wang W, et al. A modified distributed optimization method for both continuous-time and discrete-time multi-agent systems[J]. *Neurocomputing*, 2018, 275: 725-732.
- [15] 杨涛, 常怡然, 张坤朋, 等. 基于预设时间收敛的分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2023, 38(8): 2364-2374.
(Yang T, Chang Y R, Zhang K P, et al. Distributed optimization algorithms based on predefined-time convergence[J]. Control and Decision, 2023, 38(8): 2364-2374.)
- [16] Zheng Y S, Ma J Y, Wang L. Consensus of hybrid multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(4): 1359-1365.
- [17] Zheng Y S, Zhao Q, Ma J Y, et al. Second-order consensus of hybrid multi-agent systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2019, 125: 51-58.
- [18] Sun C, Ye M J, Hu G Q. Distributed optimization for two types of heterogeneous multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(3): 1314-1324.
- [19] Wang Z, Wang D, Xu X P, et al. A hybrid multi-agent system approach for distributed composite convex optimization under unbalanced directed graphs[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2025, 12(2): 1267-1279.
- [20] Friedkin N E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Network science on belief system dynamics under logic constraints[J]. *Science*, 2016, 354(6310): 321-326.
- [21] Miao S X, Su H S. Bipartite consensus for second-order multiagent systems with matrix-weighted signed

- network[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(12): 13038-13047.
- [22] Miao S X, Su H S, Wang D. Event-based bipartite consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with matrix-weighted signed networks[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(4): 3077-3094.
- [23] Su H S, Miao S X. Consensus on directed matrix-weighted networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(4): 2529-2535.
- [24] Miao S X, Su H S, Chen S M. Matrix-weighted consensus of second-order discrete-time multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, 35(3): 3539-3548.
- [25] Miao S X, Su H S. Consensus of different-order switched multi-agent systems on matrix-weighted networks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2026, 508: 129610.
- [26] Miao S X, Su H S. Consensus of matrix-weighted hybrid multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(1): 668-678.
- [27] Miao S X, Su H S. Second-order hybrid consensus of multi-agent systems with matrix-weighted networks[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(6): 4338-4348.
- [28] Sun B, Zhang Q, Liu B, et al. Controllability of hybrid multiagent systems based on matrix-weights[C]. The 43rd Chinese Control Conference. Kunming, 2024: 5657-5661.

作者简介

熊如新 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为多智能体系统的分布式优化, E-mail: 2023320004@nit.edu.cn;

妙锁霞 (1983-), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为网络化系统优化控制、多智能体系统一致性控制, E-mail: suoxiamiao1215@163.com;

巩勇杰 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为多智能体系统的随机控制, E-mail: 18815776270@163.com;

刘俊秀 (1984-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为类脑计算、神经拟态系统, E-mail: junxiu6@outlook.com;

苏厚胜 (1979-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为多智能体系统的协调控制、无人艇集群协同, E-mail: houshengsu@gmail.com.