

控制与决策

Control and Decision

分数阶多项式驱动的自适应灰色模型在碳排放预测中的应用

樊学秀, 江可申, 覃素平, 许泽东

引用本文:

樊学秀, 江可申, 覃素平, 等. 分数阶多项式驱动的自适应灰色模型在碳排放预测中的应用[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 143-152.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0657>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑碳限额的制造/再制造混合系统生产优化决策

Production optimization decision of manufacturing/remanufacturing under carbon emission permits

控制与决策. 2021, 36(9): 2249-2256 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1457>

基于随机系数回归模型的退化过程及维修策略

Degradation process and maintenance planning based on random coefficient regression model

控制与决策. 2021, 36(3): 754-760 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1087>

基于多维泰勒网的超前d步预测模型

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network

控制与决策. 2021, 36(2): 345-354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

考虑退化轨迹差异性与相似性的轴承RUL预测

Prediction of bearing remaining useful life involving difference and similarity of degradation trajectories

控制与决策. 2021, 36(11): 2833-2840 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1028>

基于图像随机分布模型的电熔镁炉工况识别

Conditions recognition of fused magnesia furnace based on dynamic characteristics of B-spline network

控制与决策. 2021, 36(11): 2735-2742 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0570>

分数阶多项式驱动的自适应灰色模型 在碳排放预测中的应用

樊学秀^{1,2}, 江可申¹, 覃素平^{3†}, 许泽东¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106;
2. 桂林航天工业学院 外语外贸学院, 广西 桂林 541004;
3. 广西财经学院 学报编辑部, 南宁 530000)

摘要: 针对传统灰色模型在拟合复杂非线性指数序列中的局限性, 构建分数阶多项式驱动的自适应灰色预测模型(GMFP(1, 1, N)), 通过引入非整数阶指数多项式函数提升模型的适应性. 系统地探讨模型的构建机制、参数估计方法以及时间响应函数, 并分析参数在特定取值下的模型性质演变. 为进一步增强模型性能, 采用线性递减权重粒子群算法(LDW-PSO)对模型超参数进行优化. 实验基于中国碳排放数据预测, 实验结果表明所提出模型在拟合和预测阶段均展现出高准确性和稳定性, 其性能显著优于传统GM(1, 1)模型以及其他优化模型, 验证了所提出模型在碳排放领域复杂数据建模中的有效性和适用性.

关键词: 灰色预测模型; 分数阶多项式; GMFP(1, 1, N)模型; 碳排放预测

中图分类号: N941.5 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0657

引用格式: 樊学秀, 江可申, 覃素平, 等. 分数阶多项式驱动的自适应灰色模型在碳排放预测中的应用[J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 143-152.

An adaptive grey prediction model driven by fractional-order polynomial and its application in carbon emission forecasting

FAN Xue-xiu^{1,2}, JIANG Ke-shen¹, QIN Su-ping^{3†}, XU Ze-dong¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. School of Foreign Languages and International Business, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin 541004, China; 3. Editorial Department of Journal, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning 530000, China)

Abstract: To address the fitting limitations of traditional grey models in handling complex non-linear exponential sequences, this study proposes an adaptive grey prediction model driven by a fractional-order polynomial, abbreviated as GMFP(1, 1, N). A systematic framework is established, covering the model's construction mechanism, parameter estimation method, and time response function. Furthermore, the evolution of model properties under specific parameter settings is analyzed to deepen theoretical understanding. To further enhance the performance, the linear decreasing weight particle swarm optimization (LDW-PSO) algorithm is employed to optimize the model's hyperparameters. Experimental validation is conducted using China's carbon emission data prediction, demonstrating that the GMFP(1, 1, N) model achieves superior accuracy and stability in both fitting and forecasting stages compared to the classical GM(1, 1) model and other optimized variants. This verifies the effectiveness and applicability of the proposed model in modeling complex carbon emission datasets characterized by nonlinearity and uncertainty, providing a robust tool for high-precision forecasting in this specific domain with limited data samples.

Keywords: grey forecasting model; fractional-order polynomial; GMFP(1, 1, N); carbon emission forecasting

0 引言

灰色系统理论由我国学者邓聚龙教授于1982

年创立, 其核心在于解决“部分信息已知、部分信息未知”的小样本、贫信息不确定性问题^[1]. 该理论通

收稿日期: 2025-06-21; 录用日期: 2025-09-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(72271120); 国家社会科学基金项目(24BJY066); 桂林航天工业学院启航学者基金项目.

责任编辑: 王光臣.

†通信作者. E-mail: qinsuping123@163.com.

过对有限数据的生成和挖掘,揭示系统运行的内在规律,为数据匮乏场景下的决策提供方法论支撑.作为灰色预测的核心模型,GM(1,1)模型因其计算简洁、所需样本量少而被广泛应用.其建模本质是通过一阶累加生成(1-AGO)弱化原始序列的随机性特征,继而通过灰色微分方程提取数据的指数趋势.然而,该模型隐含着关键假设——原始序列需要满足近似齐次指数律(即 $x^{(0)}(k) \approx ae^{bk}$).在实际应用中,现实数据往往偏离这一理想形态:经济指标受政策干预呈现阶跃变化特征,环境数据因季节扰动产生周期性振荡,工业信号则常包含复杂的非线性成分.这种理论假设与实际数据分布的错位,导致传统GM(1,1)模型在处理复杂系统时误差显著增大,亟需在理论框架和建模方法上实现突破性创新.

为突破GM(1,1)模型的局限性,学者们从模型初始条件^[2]、背景值^[3-4]、参数估计^[5]以及模型结构^[6]等多个维度展开系统性优化,其中灰色作用量的革新被视为提升模型适应性的关键路径.如:崔杰等^[7]基于GM(1,1)模型的灰色微分方程,推导出适用于非齐次指数序列的NGM(1,1, k)模型,有效解决了传统GM(1,1)模型对非齐次指数序列的拟合缺陷;战立青等^[8]和Chen等^[9]进一步引入非齐次项,提出了更具普适性的灰色NGM模型. NGM模型通过非齐次结构扩展,有效突破了传统GM(1,1)模型在数据适应性、数值稳定性以及预测精度方面的局限性,为后续复杂系统建模提供了轻量化、高精度的新范式,因此,在其基础上涌现了大量具有代表性的研究成果.针对含线性时间项的非齐次指数序列,Zhang等^[10]和Xiang等^[11]在灰色作用量中引入了二次多项式,提出了二次多项式灰色模型,进一步扩展了模型适用范围;钱吴永等^[12]则针对兼具部分指数特征和时间幂次项(t^α)的序列,首创以时间幂函数作为灰色作用量,建立了GM(1,1, t^α)模型,突破了传统指数律的限制;吴紫恒等^[13]则解决了该模型基本形式与白化方程的最佳匹配问题,为其推广应用奠定了基础.然而,此类改进模型(如NGM(1,1, k)、二次多项式灰色模型、GM(1,1, t^α)等)的多样化发展导致模型种类繁多,其在结构设计、参数配置以及适用场景上缺乏统一的分类标准和理论框架,研究者和应用者难以高效筛选适配特定问题的模型.此外,模型因预设固定函数形式仍然存在结构刚性问题,难以灵活捕捉序列中的多模态特征.针对这一问题,Ding等^[14]构建了分数阶幂次项的SAGM(1,1, t^α)模型,并结合文化算法优化分数阶参数、Monte-Carlo算法提升了鲁棒性,显著增强了模型适应性;

Saxena^[15]在单一幂次项的基础上引入双时间幂次项,构建了分数阶多项式灰色模型(OFOFGM).但是,此类模型的计算过程仍然依赖近似积分技术(如梯形求积),其基于线性插值的理想化假设与真实数据的非线性特性存在根本性偏差,导致误差在建模和预测步骤中逐级放大,制约了高精度场景的应用可靠性.对于兼具指数规律和时间多项式(即含 t^N 项)特征的序列,罗党等^[16]提出了含时间多项式项的GMP(1,1, N)模型;Wei等^[17]和Luo等^[18]研究了该模型中多项式阶数 N 的判定准则;随后,Wei等^[19]又提出了离散多项式灰色模型(DPGM(1,1, N)),克服了灰色模型从离散到连续的跳跃性误差.但是,多项式函数的局部性特征使得模型误差在数据序列的不同阶段(尤其是边界或转折点)呈现非均匀分布,局部拟合效果受限.综上,尽管现有研究在灰色作用量革新方面取得显著进展,但是,模型分类标准缺失、结构刚性限制以及误差累积传导问题仍然制约着灰色预测理论体系的完善和复杂非线性系统的应用可靠性,亟需构建兼具结构灵活性与计算鲁棒性的统一框架,以实现理论和方法的突破性创新.

针对灰色预测模型存在的模型选择困境、结构刚性、计算误差等问题,本文提出分数阶多项式驱动的自适应灰色预测模型(GMFP(1,1, N)),其创新体系通过三重协同机制实现突破:首先,构建统一的分数阶多项式灰色作用量框架 $b_0 + b_1 t^{\gamma_1} + \dots + b_N t^{\gamma_N}$ ($\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}^+$),通过动态调节参数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ 实现模型结构柔性变化,实现在单一框架下兼容多种现有模型,从根本上化解模型选择难题和结构刚性问题;然后,革新计算机制——直接采用积分定义公式求解模型时间响应函数,避免传统方法中梯形求积公式的理想化误差,有效解决传统模型中时间幂项衍生的累积误差问题,显著提升模型计算精度;最后,设计智能参数学习机制,采用改进粒子群算法同步优化参数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$,显著提升模型对时变序列的自适应能力.该体系通过理论框架、求解算法与学习策略的深度协同,为复杂系统预测提供了兼具数学严谨性与工程实用性的新范式.案例分析结果表明了所提出方法的有效性和可行性.

1 灰色GMFP(1,1, N)模型构建与求解

1.1 模型构建

分数阶多项式灰色作用量的引入,能够生成比整数阶多项式更光滑、连续的响应曲线.这种光滑性不仅更贴合实际系统演化的内在连续性规律,还能有效缓解整数阶多项式灰色模型导致的误差分布不均问题,从而显著提升建模精度和预测鲁棒性.

设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为原始非负序列, $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ 为其一阶累加生成 (1-AGO) 序列, 其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) (k = 1, 2, \dots, n)$. $Z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 这里 $z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)) (k = 2, 3, \dots, n)$.

定义 1 设 $X^{(0)}$ 为原始非负序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 则称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b_0 + \frac{k^{\gamma_1+1} - (k-1)^{\gamma_1+1}}{\gamma_1 + 1} b_1 + \dots + \frac{k^{\gamma_N+1} - (k-1)^{\gamma_N+1}}{\gamma_N + 1} b_N \quad (1)$$

为灰色 GMFP(1, 1, N) 模型的基本形式, 称

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b_0 + b_1 t^{\gamma_1} + \dots + b_N t^{\gamma_N} \quad (2)$$

为灰色 GMFP(1, 1, N) 模型的白化方程. 其中: 参数 a 为模型的发展系数; $b_0 t^{\gamma_0} + b_1 t^{\gamma_1} + \dots + b_N t^{\gamma_N}$ 为分数阶多项式驱动项的灰色作用量; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ 为幂指数, 且满足 $\gamma_0 = 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_N, N \in \{0, 1, \dots\}$.

1.2 模型求解

在幂指数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ 已知的情况下, GMFP(1, 1, N) 模型的系统参数 a, b_0, b_1, \dots, b_N 可由下文定理 1 得到.

定理 1 设 $X^{(0)}$ 为原始非负序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列. 记

$$\mu(\gamma_i, k) = \frac{k^{\gamma_i+1} - (k-1)^{\gamma_i+1}}{\gamma_i + 1},$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 & \mu(\gamma_1, 2) & \dots & \mu(\gamma_N, 2) \\ -z^{(1)}(3) & 1 & \mu(\gamma_1, 3) & \dots & \mu(\gamma_N, 3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 & \mu(\gamma_1, n) & \dots & \mu(\gamma_N, n) \end{bmatrix}_{(n-1) \times (N+2)},$$

$$Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T,$$

且 $n \geq N + 4$, 则参数 $\kappa = (a, b_0, b_1, \dots, b_N)^T$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\kappa} = (\hat{a}, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_N)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (3)$$

证明 将 $k = 2, 3, \dots, n$ 和序列 $X^{(0)}$ 代入式 (1), 可得到方程组

$$\begin{cases} x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = \\ b_0 + \mu(\gamma_1, 2)b_1 + \dots + \mu(\gamma_N, 2)b_N, \\ x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = \\ b_0 + \mu(\gamma_1, 3)b_1 + \dots + \mu(\gamma_N, 3)b_N, \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = \\ b_0 + \mu(\gamma_1, n)b_1 + \dots + \mu(\gamma_N, n)b_N. \end{cases} \quad (4)$$

式 (4) 可记作矩阵形式

$$Y = B\kappa. \quad (5)$$

由 $n \geq N + 4$ 可知, 式 (5) 为超定方程, 不存在精确解. 对于 a, b_0, b_1, \dots, b_N 的一组估计值以 $-az^{(1)}(k) + b_0 + \mu(\gamma_1, k)b_1 + \dots + \mu(\gamma_N, k)b_N$ 代替左边的 $x^{(0)}(k) (k = 2, 3, \dots, n)$, 则误差序列平方和为

$$S = \sum_{k=2}^n (x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b_0 - \mu(\gamma_1, k)b_1 - \dots - \mu(\gamma_N, k)b_N)^2. \quad (6)$$

为使得式 (6) 误差序列平方和 S 最小, 参数 $\kappa = (a, b_0, b_1, \dots, b_N)^T$ 应满足

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) [x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b_0 - \mu(\gamma_1, k)b_1 - \dots - \mu(\gamma_N, k)b_N] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b_0} = -2 \sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b_0 - \mu(\gamma_1, k)b_1 - \dots - \mu(\gamma_N, k)b_N] = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial b_N} = -2 \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) [x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b_0 - \mu(\gamma_1, k)b_1 - \dots - \mu(\gamma_N, k)b_N] = 0. \end{cases} \quad (7)$$

整理式 (7), 可得到

$$\begin{cases} a \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - b_0 \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) - \dots - \\ b_N \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) z^{(1)}(k) = - \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k), \\ -a \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) + b_0(n-1) + b_1 \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_1, k) + \\ \dots + b_N \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) = \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k), \\ \vdots \\ -a \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) z^{(1)}(k) + b_0 \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) + \\ \dots + b_N \sum_{k=2}^n (\mu(\gamma_N, k))^2 = \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) x^{(0)}(k). \end{cases} \quad (8)$$

由式 (3), 可得到

$$B^T Y = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \dots & -z^{(1)}(n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu(\gamma_1, 2) & \mu(\gamma_1, 3) & \dots & \mu(\gamma_1, n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu(\gamma_N, 2) & \mu(\gamma_N, 3) & \dots & \mu(\gamma_N, n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)x^{(0)}(k) \\ \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \\ \vdots \\ \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k)x^{(1)}(k) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$B^T B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \dots & -z^{(1)}(n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu(\gamma_1, 2) & \mu(\gamma_1, 3) & \dots & \mu(\gamma_1, n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu(\gamma_N, 2) & \mu(\gamma_N, 3) & \dots & \mu(\gamma_N, n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 & \mu(\gamma_1, 2) & \dots & \mu(\gamma_N, 2) \\ -z^{(1)}(3) & 1 & \mu(\gamma_1, 3) & \dots & \mu(\gamma_N, 3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 & \mu(\gamma_1, n) & \dots & \mu(\gamma_N, n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 & -\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) & \dots & \dots \\ -\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) & n-1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k)z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) & \dots & \dots \\ -\sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k)z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=2}^n (\mu(\gamma_N, k))^2 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n (\mu(\gamma_N, k))^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=2}^n \mu(\gamma_N, k) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由式 (8) ~ (10), 可得到

$$B^T B \hat{\kappa} = B^T Y. \quad (11)$$

由于 $B^T B$ 可逆, 则

$$\hat{\kappa} = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (12)$$

证毕. □

在求得 GMFP(1, 1, N) 模型的系统参数后, 可通过求解模型的白化方程获得时间响应函数. 对于

原始序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 可通过下文定理 2 求得 GMFP(1, 1, N) 模型的时间响应序列及其还原值序列.

定理 2 设 B, Y 如定理 1 所述, $\hat{\kappa} = (B^T B)^{-1} \times B^T Y$, 则在给定初始条件 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 下, 灰色 GMFP(1, 1, N) 模型的时间响应序列及其还原值序列为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = x^{(0)}(1)e^{-\hat{a}(k-1)} + e^{-\hat{a}k} \Delta d \sum_{i=0}^M e^{\hat{a}\tau_i} f(\tau_i), \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\tau_i = 1 + i\Delta d$, $\Delta d = \frac{k-1}{M}$, $f(t) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t^{\gamma_1} + \dots + \hat{b}_N t^{\gamma_N}$.

证明 将定理 1 求得的参数代入 GMFP(1, 1, N) 模型的白化方程 (2), 可得到

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + \hat{a}x^{(1)}(t) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t^{\gamma_1} + \dots + \hat{b}_N t^{\gamma_N}. \quad (14)$$

令 $f(t) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t^{\gamma_1} + \dots + \hat{b}_N t^{\gamma_N}$, 对式 (14) 两端同时乘以 $e^{\hat{a}t}$, 可得到

$$e^{\hat{a}t} \left[\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + \hat{a}x^{(1)}(t) \right] = e^{\hat{a}t} f(t). \quad (15)$$

将式 (15) 左端合并, 可得到

$$\frac{d[x^{(1)}(t)e^{\hat{a}t}]}{dt} = e^{\hat{a}t} f(t). \quad (16)$$

对式 (16) 两边在区间 $[1, t]$ 上进行积分, 可得到

$$\int_1^t d[x^{(1)}(\tau)e^{\hat{a}\tau}] = \int_1^t e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau. \quad (17)$$

求解式 (17), 可得到

$$\int_1^t e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau = x^{(1)}(t)e^{\hat{a}t} - \hat{x}^{(1)}(1)e^{\hat{a}}. \quad (18)$$

从而, 解得

$$x^{(1)}(t) = \hat{x}^{(1)}(1)e^{-\hat{a}(t-1)} + e^{-\hat{a}t} \int_1^t e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau. \quad (19)$$

在初始条件 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 下, 可得到

$$x^{(1)}(t) = x^{(0)}(1)e^{-\hat{a}(t-1)} + e^{-\hat{a}t} \int_1^t e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau. \quad (20)$$

令 $t = k$, 可得到

$$x^{(1)}(k) = x^{(0)}(1)e^{-\hat{a}(k-1)} + e^{-\hat{a}k} \int_1^k e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau. \quad (21)$$

通常情况下, 对积分项 $\int_1^k e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau$ 利用下文梯形公式 (22) 近似求解. 但是, 考虑到积分区间长度不小, 因此, 梯形求积公式的截断误差是相当可观的, 导致式 (22) 的精确程度难以令人满意. 为了尽量消除误差, 本文采用下文代数精度更高的积分定义 (23) 对式 (22) 进行优化.

$$\int_1^k e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau = \sum_{j=2}^k \int_{j-1}^j e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k [e^{\hat{a}j} f(j) + e^{\hat{a}(j-1)} f(j-1)]. \quad (22)$$

此方法将区间 $[1, k]$ 分割为 $(k-1)$ 个长度为 1 的子区间, 其截断误差为 $O(h^2 f''(\xi))$, 其中 $h=1$. 由于 h 较大且 $f''(\xi)$ 随 $f(t)$ 变化, 误差阶为 $O(1)$, 导致精度受限.

$$\int_1^k e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^M e^{\hat{a}\tau_i} f(\tau_i) \Delta d. \quad (23)$$

这里: $\tau_i = 1 + i\Delta d$, $\Delta d = \frac{k-1}{M}$. 而此方法将 $[1, k]$ 分割为 M 个步长为 $\Delta d = \frac{k-1}{M}$ 的子区间, 截断误差为 $O((\Delta d)^2)$. 当 $M \gg 1$ 时 (如 $M=1000$), 步长 $\Delta d \ll 1$, 误差阶降至 $O(10^{-6})$ 量级, 可将误差降至可忽略水平.

为了直观地展示积分定义 (23) 相较于梯形公式 (22) 的优化效果, 下面通过具体数值实验对比两者在相同积分区间下的误差表现. 以函数 $f(t) = t^3$, 参数 $\hat{a} = 0.5$, $k = 10$, $M = 10000$ 为例, 计算解析解以及两种方法的近似值和误差.

1) 通过分部积分求解解析解为

$$\int e^{0.5\tau} \tau^3 d\tau = e^{0.5\tau} (2\tau^3 - 12\tau^2 + 48\tau - 96) + C,$$

则精确积分值为

$$\int_1^{10} e^{0.5\tau} \tau^3 d\tau = [e^{0.5\tau} (2\tau^3 - 12\tau^2 + 48\tau - 96)]_1^{10} = 1184e^5 + 58e^{0.5} \approx 175695.6.$$

2) 数值结果与误差对比如表 1 所示.

表1 两种方法数值结果与误差对比

方法	近似值	绝对误差	相对误差/%
梯形公式(22)	169950.2	5745.4	3.27
优化公式(23)	175695.599	0.001	5.7×10^{-7}

由计算解析解以及两种方法的近似值和误差可知, 积分定义 (23) 通过将区间划分为 $M = 10000$ 个子区间 (步长 $\Delta d = 0.0009$), 其相对误差从梯形公式的 3.27% 降至 $5.7 \times 10^{-7}\%$, 降幅达 5.7×10^6 倍, 显著提升了计算精度. 由于 $f(t) = t^3$, 本文采用优化公式 (23) 求解积分项 $\int_1^k e^{\hat{a}\tau} f(\tau) d\tau$, 因此, 所提出 GMFP(1, 1, N) 模型可退化为 GM(1, 1, t^3) 模型^[13]; 若仍然使用梯形公式 (22), 则模型会产生累积误差, 导致模型系统参数估计产生偏差 (如 \hat{a} 的估计值偏

移 0.1, 导致预测结果偏离真实值 15% 以上). 综上, 优化不仅必要, 且对于提升模型预测的鲁棒性和准确性具有决定性作用. 最后, 再结合一阶累减还原算子 (1-IAGO), 可得到 GMFP(1, 1, N) 模型时间响应序列为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = x^{(0)}(1)e^{-\hat{a}(k-1)} + e^{-\hat{a}k} \Delta d \sum_{i=0}^M e^{\hat{a}\tau_i} f(\tau_i), \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (24)$$

其中: $\tau_i = 1 + i\Delta d$, $\Delta d = \frac{k-1}{M}$, $f(t) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t^{\gamma_1} + \dots + \hat{b}_N t^{\gamma_N}$. □

1.3 模型幂指数优化

在 GMFP(1, 1, N) 模型的计算过程中, 分数阶多项式阶数 N 刻画了数据的趋势变化特征, 非线性参数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ 灵活调整了时间 k 的作用强度. 考虑到高阶多项式的波动性特征和节俭性原则^[20], 本文在这里将参数 N 的取值范围设定为 $0 \leq N \leq 4$. 参数 $0 \leq \gamma_i \leq N (i = 0, 1, \dots, N)$. 为求解出最佳的参数取值, 本文以模型平均相对误差最小为目标, 建立非线性约束条件求解最优参数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$. 所构建非线性规划如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N} \bar{\Delta} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \Delta_k = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\%. \\ \text{s.t. } \hat{x}^{(1)}(k) &= x^{(0)}(1)e^{-\hat{a}(k-1)} + e^{-\hat{a}k} \Delta d \sum_{i=0}^M e^{\hat{a}\tau_i} f(\tau_i); \\ \hat{x}^{(0)}(k) &= \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \\ &k = 2, 3, \dots, n; \\ \tau_i &= 1 + i\Delta d; \\ \Delta d &= \frac{k-1}{M}; \\ f(t) &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t^{\gamma_1} + \dots + \hat{b}_N t^{\gamma_N}; \\ (\hat{a}, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_N)^T &= (B^T B)^{-1} B^T Y, \\ &0 \leq N \leq 4, N \in \mathbb{Z}; \\ \gamma_0 &= 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_N \leq N. \end{aligned} \quad (25)$$

上述非线性优化模型 (25) 可借助相应的智能算法 (如遗传算法、粒子群算法等) 求解, 本文采用线性递减权重粒子群算法 (LDW-PSO)^[21] 求解, 具体算法不再赘述. 由此得到最优参数 $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_N^*$, 再代入式 (3) 可求得 GMFP(1, 1, N) 模型的系统参数 $\hat{a}, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_N$, 基于这些参数即可根据式 (13) 计算最终的拟合预测值 $\hat{x}^{(0)}(k) (k = 2, 3, \dots)$.

1.4 模型性质

通过调整GMFP(1, 1, N)模型的分阶多项式阶数N和参数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ 的取值, 可得到GM(1, 1)、NHGM(1, 1, k)、GM(1, 1, t^α)和GMP(1, 1, N)等模型均为所提出GMFP(1, 1, N)模型的特例, 即模型具有如下性质.

性质 1 当 $N = 0$ 时, GMFP(1, 1, N)模型退化为GM(1, 1)模型, 其基本形式和白化方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b,$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b.$$

性质 2 当 $N = 1, \gamma_1 = 1$ 时, GMFP(1, 1, N)模型退化为NHGM(1, 1, k)模型^[8], 其基本形式和白化方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b + \frac{2k - 1}{2}c,$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b + ct.$$

性质 3 当 $N = 1$ 时, GMFP(1, 1, N)模型退化为GM(1, 1, t^α)模型^[13], 其基本形式和白化方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b + \frac{k^{\alpha+1} - (k - 1)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}c,$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b + ct^\alpha.$$

性质 4 当 $N = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$ 时, GMFP(1, 1, N)模型退化为GMQP(1, 1)模型^[10], 其基本形式和白化方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) =$$

$$\left(k^2 - k + \frac{1}{3}\right)b + \left(k - \frac{1}{2}\right)c + d,$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt^2 + ct + d.$$

性质 5 当 $N = 2$ 时, GMFP(1, 1, N)模型退化为OFOPGM模型^[15], 其基本形式和白化方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) =$$

$$\frac{b}{\alpha + 1} \times (k^{\alpha+1} - (k - 1)^{\alpha+1}) +$$

$$\frac{c}{\beta + 1} \times (k^{\beta+1} - (k - 1)^{\beta+1}) + d,$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt^\alpha + ct^\beta + d.$$

性质 6 当 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, 3, \dots, \gamma_N = N$ 时, GMFP(1, 1, N)模型退化为GMP(1, 1, N)模型^[16], 其基本形式和白化方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) =$$

$$b_0 + \frac{2k - 1}{2}b_1 + \dots + \frac{k^{N+1} - (k - 1)^{N+1}}{N + 1}b_N,$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_Nt^N.$$

从上述性质可以看出, GM(1, 1, t^α)和GMP(1, 1, N)模型由于参数 α 和N取值的不同导致模型形式上的“交叉”, 使得在某些情况下难以区分两种模型的应用场景, 从而带来模型选择困难. 而定理 2 完善了时间幂次项模型时间响应函数求解问题, 从而GMFP(1, 1, N)模型实现了上述模型结构与求解的统一. 由此可见, GMFP(1, 1, N)模型结构更加完备, 模型具有更广泛的适用性, 不仅适用于具有近似(非)齐次指数规律、部分指数特征和时间幂次项(时间多项式项)规律的序列建模, 且适用于具有一般非线性波动特征以及混合特征序列建模.

1.5 模型评估准则

本文选取如下 3 个评估准则来全面检验模型的建模效果:

- 1) 绝对百分比误差 (APE): 用于量化单个样本的模型值与真实值的相对偏差(即误差占真实值的比例), 数值越小, 模型值越接近真实值;
- 2) 平均绝对百分比误差 (MAPE): 对 APE 取平均值, 得到模型整体拟合和预测的相对误差水平;
- 3) 均方根误差 (RMSE): 计算模型值与真实值误差的平方平均值后开方, 其单位与原始数据一致, 且对于大误差(离群值)更敏感, 能够更直观地反映极端偏差对于模型性能的影响.

表 2 为 MAPE 的精度检验标准(误差范围对应的模型评价等级), 进一步表明 MAPE 在评估模型整体相对误差水平时的参考依据. 3 个评估准则的具体计算公式如下所示:

$$APE = \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\%,$$

$$MAPE = \frac{1}{n - 1} \sum_{k=2}^n \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\%,$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n - 1} \sum_{k=2}^n (x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k))^2}.$$

表2 MAPE 的精度等级^[22]

MAPE/%	< 10%	10% ~ 20%	20% ~ 50%	> 50%
等级	优	良	合格	差

2 应用实例

近年来, 我国生态文明建设虽然取得历史性成

就, 生态环境质量显著改善, 但是, 仍然面临生态环境持续优化与“双碳”目标协同推进的严峻挑战, 生态环境保护结构性、根源性、趋势性压力尚未根本缓解, 保护与发展长期矛盾仍然存在. 高碳能源结构与高耗能产业的长期耦合, 导致工业领域大量污染物和碳排放源自同一化石能源使用和生产过程, 凸显污染与碳排放的同根同源性. 在此背景下, 研究碳排放数据的演变趋势至关重要, 这不仅能够精准识别重点行业减排潜力, 量化经济增长与碳排放脱钩路径, 还可为高耗能产业低碳化转型提供决策支撑, 并推动减污降碳协同治理, 为制定科学的“双碳”战略和美丽中国建设路径提供了不可或缺的理论依据和实践指导.

本文所采用的表现碳排放量来源于能源消耗排放量, 统计数据取自《2024年BP世界能源统计年鉴》, 选取2000年~2023年中国二氧化碳排放量数据作为研究对象, 检验新模型在处理复杂非线性系统问题中的可行性.

图1为2000年~2023年中国二氧化碳年排放量变化情况. 由图1可见: 2000年~2006年二氧化碳年排放量呈现显著增长趋势, 从33.28亿吨快速增长至66.6亿吨, 年均增长率达12.8%; 2006年~2011年增速明显放缓, 排放量从66.6亿吨增长至87.94亿吨, 年均增长率降至4.9%; 2016年~2020年期间, 排放总量从91.73亿吨上升至101.28亿吨, 年均增长率维持在2.3%的低速区间; 2021年后, 排放量继续攀升至112.18亿吨, 较2020年增长10.9%, 表明该阶段仍然存在持续的高排放特征. 整体来看, 2000年~2023年间, 中国二氧化碳排放量呈现先加速增长、后趋缓并阶段性反弹的复杂演变趋势, 为模型验证提供了具有非线性特征和波动性的典型数据序列.

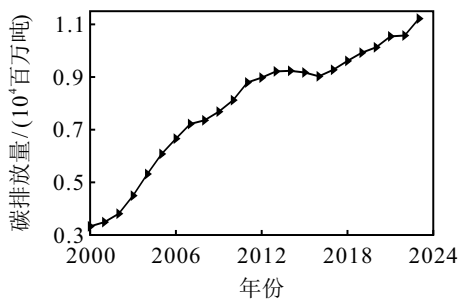


图1 2000年~2023年中国碳排放量时间序列

选用2000年~2018年(数据长度约占总长度80%)的数据作为模拟数据进行建模, 记为 $X^{(0)}$, 后面5年数据作为预测数据, 检验模型预测效果. 首先, 利用LDW-PSO算法确定GMFP(1, 1, N)模型参数

的值. 其中LDW-PSO算法基本参数设置如下: 种群规模为 $N = 20$, 最大迭代次数为 $\max T = 1000$, $c_1 = c_2 = 1.5$, $w_{\max} = 0.9$, $w_{\min} = 0.4$. 以式(25)作为模型的适应度函数, 采用Matlab编程可求得模型参数最优值, 从而得到模型的拟合精度. 作为对比, 对原始数据分别建立GM(1, 1)模型、GM(1, 1|sin)模型^[23]和GMP(1, 1, N)模型, 依次得到各模型的时间响应序列及其还原值序列, 具体如下.

1) GM(1, 1)模型为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = 109\,616.39e^{0.0445(k-1)} - 106\,288.39, \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1). \end{cases}$$

2) GM(1, 1|sin)模型为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 40\,708.86e^{0.07907k} - 30\,543.24 - \\ \quad 2\,064.20 \sin(0.2619k) + \\ \quad 540.62 \cos(0.2619k), \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k). \end{cases}$$

3) GMP(1, 1, 2)模型为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = 5.79048 \times 10^9 e^{-0.0021(k-1)} - \\ \quad 5.8024 \times 10^9 + 1.1945 \times 10^7 k - \\ \quad 11\,861.02k^2, \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1). \end{cases}$$

4) GMFP(1, 1, 2)模型为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = 3\,139.8e^{-0.1976(k-1)} + \frac{k-1}{10\,000} e^{-0.1976k} \times \\ \quad \sum_{i=0}^{10\,000} e^{0.1976\tau_i} f(\tau_i), \\ f(\tau_i) = 14\,417 - 1\,664\,374\tau_i^{0.5946} + \\ \quad 1\,654\,593\tau_i^{0.5973}, \\ \tau_i = 1 + \frac{k-1}{10\,000}i, \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1). \end{cases}$$

根据以上4个模型的时间响应式, 对我国二氧化碳排放量序列进行模拟和预测, 得到各模型的建模结果如表3所示. 其中: GMP(1, 1, N)模型通常通过枚举法(建模实验法)遍历 $N = 0 \sim 4$ 等典型取值, 结合交叉验证和误差指标(如MAPE)对比不同 N 下的拟合效果, 选取误差最小且泛化能力较好的 N 作为实际参数. 在本案例中, 经实验验证GMP(1, 1, N)模型的最优 $N = 2$, 为保证与经典模型的对比一致性, GMFP(1, 1, N)模型同样选取 $N = 2$ 作为参数, 既体现了模型改进对于传统方法的继承关系, 也确保了实验结果的可比性. GM(1, 1|sin)模型和GMFP(1, 1, 2)模型根据LDW-PSO算法得到的模

型参数值分别为 $p = 0.2619$ 和 $\gamma_1 = 0.5946$, $\gamma_2 = 0.5973$, 这两个模型粒子群迭代次数与模型的平均相对误差的关系如图 2 所示. 同时, 为了实现较高代数精度, 式 (23) 中 $M = 10000$.

表3 4种模型的碳排放量拟合和预测值结果

年份	实际值	GM(1,1)模型		GM(1,1 sin)模型		GMP(1,1,2)模型		GMFP(1,1,2)模型	
		模型值	APE/%	模型值	APE/%	模型值	APE/%	模型值	APE/%
2000	3328.0	3328.0	0.00	3328.0	0.00	3328.0	0.00	3328.0	0.00
2001	3489.7	4987.3	42.91	3048.1	12.66	3246.1	6.98	3491.8	0.06
2002	3809.3	5214.2	36.88	3810.5	0.03	4003.4	5.09	3809.0	0.01
2003	4494.1	5451.4	21.3	4583.0	1.98	4710.3	4.81	4535.7	0.93
2004	5317.2	5699.4	7.19	5335.0	0.34	5367.1	0.94	5286.5	0.58
2005	6079.3	5958.8	1.98	6039.3	0.66	5973.6	1.74	5977.2	1.68
2006	6660.0	6229.9	6.46	6673.9	0.21	6530.2	1.95	6588.5	1.07
2007	7217.1	6513.3	9.75	7223.5	0.09	7036.9	2.50	7119.9	1.35
2008	7356.6	6809.6	7.43	7681.3	4.41	7493.7	1.86	7576.7	2.99
2009	7685.0	7119.5	7.36	8049.0	4.74	7900.8	2.81	7965.8	3.65
2010	8121.7	7443.4	8.35	8337.1	2.65	8258.4	1.68	8294.6	2.13
2011	8793.5	7782.0	11.50	8564.6	2.60	8566.4	2.58	8569.6	2.55
2012	8977.6	8136.1	9.37	8757.9	2.45	8825.0	1.70	8796.9	2.01
2013	9214.1	8506.3	7.68	8949.0	2.88	9034.3	1.95	8982.0	2.52
2014	9235.5	8893.3	3.71	9173.8	0.67	9194.3	0.45	9129.8	1.14
2015	9172.9	9297.9	1.36	9469.9	3.24	9305.3	1.44	9244.6	0.78
2016	9027.1	9720.9	7.69	9874.6	9.39	9367.3	3.77	9330.2	3.36
2017	9274.3	10163.2	9.58	10422.2	12.38	9380.4	1.14	9389.9	1.25
2018	9612.0	10625.6	10.55	11142.7	15.93	9344.6	2.78	9426.8	1.93
MAPE/%		11.73		4.29		2.57		2.45	
RMSE		785.29		519.69		180.02		158.50	
2019	9923.8	11109.1	11.94	12059.6	21.52	9260.2	6.69	9543.6	3.83
2020	10128.4	11614.5	14.67	13189.0	30.22	9127.2	9.89	9624.5	4.98
2021	10543.8	12142.9	15.17	14539.0	37.89	8945.7	15.16	9765.3	7.38
2022	10576.3	12695.4	20.04	16109.8	52.32	8715.7	17.59	9887.8	6.51
2023	11218.4	13273.0	18.31	17894.0	59.51	8437.5	24.79	10123.4	9.76
MAPE/%		16.03		40.29		14.82		6.49	
RMSE		1725.25		4584.19		1743.10		731.79	

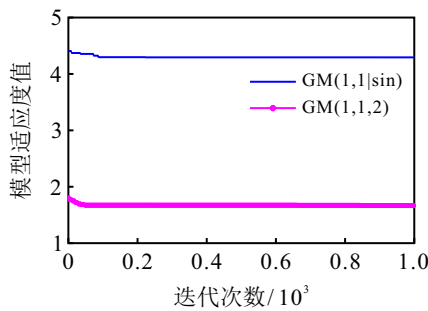


图2 模型平均相对误差迭代踪迹

由表 3 中关于碳排放量的 18 个样本点 (不包含第 1 个点) 的模拟结果对比可见: GM(1,1)模型各样本点的相对误差范围为 1.36% ~ 42.91%. 其中: 有 2 个样本点的误差超过 20%, 5 个样本点的误差超过 10%, 占总体数量的 28%, 使得模型的拟合效果最不理想. 而其他 3 个模型由于含有可变的结构参数, 使得模型的拟合误差相较于 GM(1,1)模型得到了较

大提升. 这里: GM(1,1|sin)模型各样本点误差范围为 0.03% ~ 15.93%; GMP(1,1,2)模型各样本点的误差范围为 0.45% ~ 6.98%; GMFP(1,1,2)模型各样本点误差范围为 0.01% ~ 3.65%, 误差范围相较于其他模型显著缩小, 模型实现了高精度拟合.

通过观察 4 个模型的预测结果可知: GMP(1,1,2)和 GMFP(1,1,2)模型由于在原点 (模型拟合最后一个点) 以及附近点均实现了高精度拟合, 使得这两个模型在预测方面具有明显的优势, 单步预测和两步预测结果明显优于其他两个模型; 而 GMFP(1,1,2)模型由于在原点误差仅有 1.93%, 使得模型 5 步预测误差均控制在 10% 以内, 模型实现了高精度的中期预测. 另外, 由表 3 可知, 无论是在拟合阶段还是在预测阶段, 4 个模型在 MAPE、RMSE 两个评估准则下, GMFP(1,1,2)模型的建模性能均排名第 1, 表明了所提出模型的拟合曲线与原始数据最为接近,

模型表现最优。

图3为上述4种模型的模拟预测曲线与实测曲线更直观的建模结果对比。由于GM(1,1)模型对纯指数序列模拟,模型发展系数 $a = 0.0445$ 较小,使得整体拟合和预测值近似线性、低指数增长,拟合预测结果整体偏离真实情况;而GM(1,1|sin)模型由于模型右端三角函数结构影响,模型表现为先缓慢增长后加速增长趋势,使得模型拟合值的后半段均明显偏离真实值;同样地,GMP(1,1,2)模型由于模型右端二次多项式结构,模型拟合曲线表现为先增后减变化趋势,使得模型预测值的后半段均明显低于真实值。虽然GMP(1,1,N)模型通过自动优化模型右端多项式的阶数,适应不同数据序列的发展规律,使得模型的拟合精度相较于GM(1,1)模型有较大提升,但是由于模型拟合序列不够光滑,使得模型误差在区间上分布不均匀,这点可从模型第2个样本点的拟合值的相对误差看出。所提出GMFP(1,1,N)模型通过自动优化模型的结构,能够同时较好地识别序列的波动变化和加速变化特征,使得模型的模拟值和预测值的相对误差最小且稳定,这表明分数阶多项式项的引入有助于更精准地捕捉复杂数据模式。

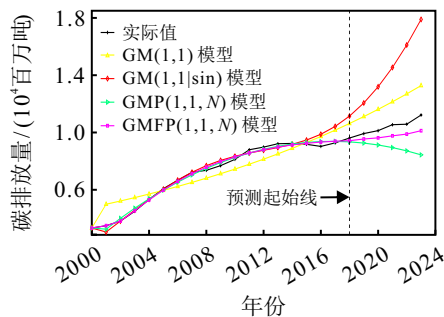


图3 4种灰色模型拟合和预测结果对比

从这个例子可以看出,按照所提出方法确定的GMFP(1,1,2)模型与原始序列特征最符合,使得模型无论是拟合还是预测均是最理想的模型,因此,选择GMFP(1,1,2)模型作为最终模型,对我国未来碳排放量进行预测。考虑到灰色模型不适宜中长期预测以及GMFP(1,1,2)模型建模结果一步预测误差很小,因此,借鉴新信息灰色建模思想,不断利用新数据,建立新信息GMFP(1,1,2)模型,分别预测下一年的数据,对我国未来5年的碳排放量进行建模预测,结果如表4所示。

表4 2024年~2028年碳排放总量预测值 百万吨

年份	2024	2025	2026	2027	2028
预测值	11114.5	11278.2	11640.5	11529.4	10926.3

根据表4的预测结果,中国碳排放总量将在未来数年内呈现先增长后下降的趋势,预计于2026年前后达到峰值(11640.5百万吨),这一预测趋势的合理性可从政策导向和经济转型背景中得到解释。首先,在“十四五”期间,我国生态文明建设已将降碳确立为核心战略导向,发展模式正加速向全面绿色转型演进,这一转型直接推动了产业结构调整 and 能源效率提升。通过逐步优化高耗能产业占比、降低煤炭在能源消费结构中的比重等措施,有效抑制了碳排放增长的惯性。其次,清洁能源技术的规模化部署也在碳排放控制中发挥了关键作用——全球范围内太阳能光伏、风能等清洁能源的快速扩张已显著限制化石燃料需求的增长,而中国作为这一领域的引领者,持续推动能源结构转型,为碳排放达峰提供了坚实的技术支撑。发达经济体的实践表明,经济增长与碳排放脱钩是可行的。中国作为全球最大的碳排放国之一,正通过提升可再生能源发电占比、推进煤改气等措施,逐步实现能源需求增长与排放增长的解耦。因此,2026年峰值的出现既符合我国政策推动下的系统性治理逻辑,也与全球清洁能源转型背景下能源效率提升、化石燃料依赖减弱的趋势相吻合,体现了我国在全球气候治理中推动减污降碳协同增效的实践成效。

3 结论

在曲线拟合预测领域,多项式函数作为基础建模工具具有广泛应用。本研究通过将广义分数阶多项式函数(允许非整数阶次)引入灰色系统理论框架,构建了具有普适性结构的灰色预测模型,为复杂系统的动态建模提供了新的方法支撑,在理论创新和方法应用层面取得了一定的进展:

1) 非整数阶模型参数突破了传统限制,赋予动态调整能力:该特性使得模型能够精准捕捉数据序列的波动性和非线性加速特征,实验结果表明了其对于非平稳序列的泛化能力显著优于GM(1,1)与GMP(1,1,N)等经典模型,有效提升了模型拟合和预测精度;

2) 矩阵微积分数值解法有效消除了累积误差:此方法解决了传统模型中时间幂项衍生的误差积累问题,为复杂动态特性数据建模提供可靠数学保障,提升了模型的稳定性和准确性;

3) 模型参数解析实现理论包容和拓展:通过模型参数特殊取值,GMFP(1,1,N)模型可退化为GM(1,1)和GMP(1,1,N)等模型,统一了现有灰色模型体系,并支持灵活适应不同数据场景。

参考文献 (References)

- [1] Deng J L. Control problems of grey systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1982, 1(5): 288-294.
- [2] Zhu X Y, Dang Y G, Ding S. Using a self-adaptive grey fractional weighted model to forecast Jiangsu's electricity consumption in China[J]. *Energy*, 2020, 190: 116417.
- [3] Liu C, Lao T F, Wu W Z, et al. Application of optimized fractional grey model-based variable background value to predict electricity consumption[J]. *Fractals*, 2021, 29(2): 2150038.
- [4] Tong M Y, Dong J R, Luo X L, et al. Coal consumption forecasting using an optimized grey model: The case of the world's top three coal consumers[J]. *Energy*, 2022, 242: 122786.
- [5] Wei B L, Xie N M. Parameter estimation for grey system models: A nonlinear least squares perspective[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 95: 105653.
- [6] Atef M, Liu S F. Four types of grey β -covering models and their applications[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2024, 223: 108-129.
- [7] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. *控制与决策*, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(11): 1702-1706.)
- [8] 战立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(3): 689-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2013, 33(3): 689-694.)
- [9] Chen P Y, Yu H M. Foundation settlement prediction based on a novel NGM model[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014(1): 1-8.
- [10] Zhang J B, Jiang Z Y. A new grey quadratic polynomial model and its application in the COVID-19 in China[J]. *Scientific Reports*, 2021, 11(1): 12588.
- [11] Xiang X W, Zhang P, Yu L. Forecasting oil consumption with novel fractional grey prediction model based on Simpson formula[J]. *Asian Research Journal of Mathematics*, 2019, 15(2): 1-27.
- [12] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色 GM(1, 1, t^α) 模型及其应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey GM(1, 1, t^α) model with time power and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2012, 32(10): 2247-2252.)
- [13] 吴紫恒, 吴仲城, 李芳, 等. 改进的含时间幂次项灰色模型及建模机理[J]. *控制与决策*, 2019, 34(3): 637-641.
(Wu Z H, Wu Z C, Li F, et al. Improved grey forecasting model with time power and its modeling mechanism[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(3): 637-641.)
- [14] Ding S, Li R J, Wu S, et al. Application of a novel structure-adaptative grey model with adjustable time power item for nuclear energy consumption forecasting[J]. *Applied Energy*, 2021, 298: 117114.
- [15] Saxena A. Optimized fractional overhead power term polynomial grey model (OFOPGM) for market clearing price prediction[J]. *Electric Power Systems Research*, 2023, 214: 108800.
- [16] 罗党, 韦保磊. 灰色 GMP(1, 1, N) 模型及其在冰凌灾害风险预测中的应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(11): 2929-2937.
(Luo D, Wei B L. Grey GMP(1, 1, N) model and its application in risk prediction of ice-jam disaster[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2017, 37(11): 2929-2937.)
- [17] Wei B L, Xie N M, Hu A Q. Optimal solution for novel grey polynomial prediction model[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 62: 717-727.
- [18] Luo D, Wei B L. Grey forecasting model with polynomial term and its optimization[J]. *Journal of Grey System*, 2017, 29(3): 58-69.
- [19] Wei B L, Xie N M, Yang Y J. Data-based structure selection for unified discrete grey prediction model[J]. *Expert Systems with Applications*, 2019, 136: 264-275.
- [20] 罗党, 韦保磊. 一类离散灰色预测模型的统一处理方法及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(2): 451-462.
(Luo D, Wei B L. A unified treatment approach for a class of discrete grey forecasting models and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2019, 39(2): 451-462.)
- [21] Shi Y, Eberhart R. A modified particle swarm optimizer[C]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. Anchorage, 1998: 69-73.
- [22] Lewis C D. *Industrial and business forecasting methods*[M]. London: Butterworth Scientific, 1982.
- [23] Mao S H, Chen Y, Xiao X P. City traffic flow prediction based on improved GM(1, 1) model[J]. *The Journal of Grey System*, 2012(4): 337-346.

作者简介

樊学秀 (1984-), 女, 副教授, 博士生, 主要研究方向为数量经济、灰色系统理论, E-mail: Helen-F@nuaa.edu.cn;

江可申 (1957-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为产业经济、数量经济, E-mail: jiangksh@126.com;

覃素平 (1984-), 女, 助理研究员, 硕士生, 主要研究方向为数量经济, E-mail: qinsuping123@163.com;

许泽东 (1989-), 男, 博士生, 主要研究方向为灰色系统理论与应用, E-mail: xzd361296@nuaa.edu.cn.