

控制与决策

Control and Decision

多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型及其应用

杨林云, 沈琴琴, 曹阳

引用本文:

杨林云, 沈琴琴, 曹阳. 多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2026, 41(5): 1321-1330.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0735>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

时滞累积TDAGM (1,N,t) 模型及其在粮食生产中的应用

[Time-delayed accumulative TDAGM \(1, N, t\) model and its application in grain production](#)

控制与决策. 2021, 36(8): 2002-2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

超启发式交叉熵算法求解模糊分布式流水线绿色调度问题

Hyper-heuristic cross-entropy algorithm for green distributed permutation flow-shop scheduling problem with fuzzy processing time

控制与决策. 2021, 36(6): 1387-1396 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1681>

基于多维泰勒网的超前d步预测模型

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network

控制与决策. 2021, 36(2): 345-354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

[Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering](#)

控制与决策. 2021, 36(12): 2946-2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

控制与决策. 2021, 36(12): 3049-3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型及其应用

杨林云, 沈琴琴, 曹阳[†]

(南通大学 交通与土木工程学院, 江苏 南通 226019)

摘要: 针对多变量时滞阻尼累加灰色模型(TLDAGM(1, N))建模机理不明确、非线性特征挖掘不充分以及存在转换误差等问题, 提出一种多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型. 首先, 引入线性和非线性修正项拓展模型灰信息结构, 不仅能够增强对数据非线性特征的挖掘能力, 还能实现与经典GM(1, 1)模型的兼容性; 然后, 通过数值积分可有效避免原模型中将时间驱动项视为灰常量以及对导数项的近似处理所引起的建模误差; 最后, 结合离散灰色建模的思想, 有效消除微分方程到差分方程的转换误差. 选取近年来上海市高新技术产业产值数据进行实证分析, 并利用量子粒子群优化算法寻求模型的最优参数. 结果表明, 新模型的拟合和预测精度均优于TLDAGM(1, N)模型以及其他几种多变量灰色模型, 且展现出良好的稳定性.

关键词: 灰色系统; 多变量灰色模型; 时滞效应; 阻尼累加; 离散灰色预测模型

中图分类号: N941.5 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0735

引用格式: 杨林云, 沈琴琴, 曹阳. 多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型及其应用 [J]. 控制与决策, 2026, 41(5): 1321-1330.

Multivariate damping accumulated nonlinear time-lag discrete grey model and its applications

YANG Lin-yun, SHEN Qin-qin, CAO Yang[†]

(School of Transportation and Civil Engineering, Nantong University, Nantong 226019, China)

Abstract: To address the issues of unclear modeling mechanism, inadequate extraction of nonlinear features, and conversion errors in the multivariable time-lag damping accumulated grey model (TLDAGM(1, N)), this study proposes a multivariate damping accumulated nonlinear time-lag discrete grey model. First, linear and nonlinear correction terms are introduced to enrich the model's grey information structure, which can not only improve the model's capability to capture nonlinear characteristics in the data, but also ensure compatibility with the classic GM(1, 1) model. Second, numerical integration is employed to address the modelling error resulting from the original model's treatment of the time-driven term as a grey constant and its imprecise formulation of the derivative term. Third, by adopting the idea of discrete grey modeling, the conversion error arising from the transition between differential and difference equations is effectively reduced. An empirical analysis using the output value data of high-tech enterprises in Shanghai in recent years is conducted, and the model parameters are optimized using the quantum particle swarm optimization. Experimental results demonstrate that the proposed model outperforms the TLDAGM(1, N) model and several other multivariable grey models in terms of both fitting and prediction accuracy, and exhibits good stability.

Keywords: grey system; multivariate grey model; time-lag effect; damping accumulation; discrete grey prediction model

0 引言

作为灰色系统理论的重要组成部分之一, 多变量灰色模型(GM(1, N))^[1]为动态系统的建模和预测提供了一种面向不完全信息的分析工具. GM(1, N)模型本质上是一类因子分析模型, 能够对含有多

因子的系统进行全局地、动态地分析. 该模型通过对系统行为特征序列和 $N - 1$ 个相关因素序列作一阶累加处理使得它们具有单调性, 进而构建一阶微分方程以揭示系统演化机制, 已被广泛应用于交通^[2]、经济^[3]和能源^[4]等领域.

收稿日期: 2025-07-10; 录用日期: 2025-11-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(12471354); 南通市自然科学基金青年基金项目(JC2024043); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(SJ CX25_2054).

责任编辑: 周平.

[†]通信作者. E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn.

由GM(1, N)模型的建模过程可知,数据的累加处理和模型结构是影响其精度的两个关键环节.在数据累加处理环节,根据不同的数据类型,研究人员相继提出了分数阶累加^[5-6]、阻尼累加^[7-10]以及动态累加^[9-13]等,以提升模型的预测性能.在模型结构环节:一方面,基于积分中值定理^[2,14]对白化微分方程进行处理,从而避免了将时间驱动项视为灰常量引起数值上的误差;另一方面,将单变量离散灰色模型的思想引入多变量领域,直接构造出具有差分形式的多变量离散灰色模型^[2,12,15],并通过递归的方法导出模型时间响应函数,从而有效消除模型的转换误差.此外,考虑到系统运行过程中驱动项作用机制的复杂性,根据不同问题的特点,可引入虚拟变量^[16]、冲击效应^[17]、交互作用^[18]等来准确描述系统行为特征的变化趋势.

在很多实际问题中,驱动因素对于系统行为的影响往往存在一定的时滞效应.如:科技投入对高新技术产业的促进具有显著的滞后性,产业效益不仅受当年科技投入的影响,还与往期投入密切相关;交通拥堵加剧城市环境污染的出现往往是一个渐近累积过程;能源价格变动也不会立即导致居民调整消费行为等.这类现象在社会经济系统中普遍存在,反映了系统运行中的时滞特征,对模型的构建提出了更高的要求.为更准确地描述系统变化趋势,研究人员引入时滞机制^[19-23]以反映驱动因素的延迟效应.早期的时滞灰色模型多以固定时滞结构为基础.然而,不同驱动因素对系统行为变量的时滞效应往往存在差异性,因此,有学者提出了时变延迟函数^[3]以提升模型的适应能力.为更细致地刻画时滞效应的作用过程,研究人员将滞后参数由整数拓展至分数阶形式^[24].近年来,为进一步增强模型对多层次、非线性滞后机制的刻画能力,又引入了结构化时滞因子^[25]和融合非线性特征的时滞驱动项^[26],并通过可再生能源发电量以及中美两国电力消费问题开展分析.总体来看,考虑时滞效应的建模方法在理论体系和应用场景方面不断拓展,为准确刻画驱动因素与系统行为间的动态演化关系提供了坚实的理论支撑.

最近提出的多变量时滞阻尼累加灰色模型(TLDAGM(1, N))^[10]在传统GM(1, N)模型的基础上,融合改进阻尼累加生成算子以更灵活地调控预测趋势,同时,引入时滞系数以刻画现实系统中普遍存在的滞后效应,在我国高新技术产业产值以及河南省粮食产量预测问题中取得了较好的结果.然而,从TLDAGM(1, N)模型的建模过程来看,该模型仍然存在诸多缺陷,如:经微分方程积分后得到的差分方程与原方程不匹配,存在一定偏差,建模机理不明

确;未考虑数据间的非线性关系以致于难以挖掘数据的非线性特征,且无法与GM(1, 1)模型相兼容;时间响应函数和模型参数分别是基于微分方程和差分方程求解得到的,二者之间存在转换误差等.

针对上述问题,本文首先引入常数项以实现与GM(1, 1)模型的结构兼容,同时,引入线性和非线性校正项,增强模型对复杂非线性特征的刻画能力;然后,借助积分中值定理改进时间驱动项的处理方式,避免原模型在差分过程中将其视为灰常量而导致的数值误差,并对导数项的积分结果进行修正;最后,基于离散灰色建模思想,通过递归的方法推导出模型的时间响应函数以消除转换误差.在此基础上,构造多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型(DNTDGM(1, N)),并通过上海市高新技术产业产值预测实例验证其有效性.

1 多变量时滞阻尼累加灰色模型

本节简单回顾TLDAGM(1, N)模型,并分析其优缺点.

给定一个包含 N 个变量的灰色系统,每个变量的序列均为 n ,即

$$X_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n)), \\ i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $X_1^{(0)}$ 为系统的行为特征序列(因变量序列), $X_i^{(0)}(i = 2, 3, \dots, N)$ 为系统的驱动因素序列(自变量序列).在构建灰色预测模型时,通常先对所有变量进行累加处理以消除波动性.TLDAGM(1, N)模型选用阻尼累加对数据进行预处理.为此,先给出阻尼累加的定义.

定义1^[9] 设原始非负序列 $X_i^{(0)}$ 如式(1)所示,则其 ζ_i 阶阻尼累加生成序列为

$$X_i^{(\zeta_i)} = (x_i^{(\zeta_i)}(1), x_i^{(\zeta_i)}(2), \dots, x_i^{(\zeta_i)}(n)). \quad (2)$$

其中: $\zeta_i \in (0, 1]$ 为阻尼累加阶数,且

$$x_i^{(\zeta_i)}(k) = \sum_{j=1}^k \frac{x_i^{(0)}(j)}{\zeta_i^{j-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

阻尼累加算子的矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix} x_i^{(\zeta_i)}(1) \\ x_i^{(\zeta_i)}(2) \\ \vdots \\ x_i^{(\zeta_i)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{\zeta_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{\zeta_i} & \cdots & \frac{1}{\zeta_i^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(0)}(1) \\ x_i^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x_i^{(0)}(n) \end{bmatrix}.$$

由定义1可知,在对原始序列进行阻尼累加时,新信息的权重大于旧信息,即阻尼累加生成算子遵循新息优先原则.此外,与传统阻尼累加算子^[7]不同的是,TLDAGM(1, N)模型在建模过程中引入了阶

数差异化设计,即对不同的变量引入不同的阻尼累加阶数,体现了信息差异性对系统演化规律的影响。

定义 2^[10] 设原始非负序列 $X_i^{(0)}$ 及其 ζ_i 阶阻尼累加序列 $X_i^{(\zeta_i)}$ 分别如式 (1) 和 (2) 所示, $z_1^{(\zeta_1)}(k) = 0.5x_1^{(\zeta_1)}(k) + 0.5x_1^{(\zeta_1)}(k-1) (k=2, 3, \dots, n)$ 为序列 $X_1^{(\zeta_1)}$ 的紧邻均值,称

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(\zeta_1)}(k) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) \quad (3)$$

为 TLDAGM(1, N) 模型. 其中: a 和 $b_i (i=2, 3, \dots, N)$ 分别为发展系数和驱动系数, $\lambda_i \in (0, 1]$ 为时滞系数. 假设 $x_1^{(\zeta_1)}(t)$ 可微, 则称

$$\frac{dx_1^{(\zeta_1)}(t)}{dt} + ax_1^{(\zeta_1)}(t) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) \quad (4)$$

为 TLDAGM(1, N) 模型的白化微分方程. 令初始值 $x_1^{(\zeta_1)}(k)|_{k=1} = x_1^{(0)}(1)$, 由式 (4) 可求得 TLDAGM(1, N) 模型的时间响应函数为

$$\hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k) = \left[x_1^{(0)}(1) - \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) \right] \times e^{-a(k-1)} + \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j). \quad (5)$$

通过逆向 ζ_i 阶阻尼累加可得到 TLDAGM(1, N) 模型的累减还原式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = \begin{cases} x_1^{(0)}(1), & k=1; \\ (\hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k) - \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k-1)) \times \zeta_1^{k-1}, & k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

TLDAGM(1, N) 模型不仅关注信息的差异性对于系统演化过程的影响,还考虑了驱动因素与系统主行为间的时滞效应. 通过引入改进的阻尼累加算子和时滞系数,有效捕捉了变量间非同步演化的特征,从而提升了对复杂动态过程的预测能力. 然而,该模型仍然存在如下缺陷:

1) 建模机理不明确. TLDAGM(1, N) 模型的差分形式是在 $X_i^{(\zeta_i)} (i=2, 3, \dots, N)$ 变化范围很小的前提下,将 $\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j)$ 视为灰常数,对式 (4) 两端在区间 $[k-1, k]$ 上进行积分推导而来. 然而,在实际问题中, $X_i^{(\zeta_i)}$ 往往呈现出显著的动态变化特征,难以满足上述条件. 此外,由式 (6) 可知

$$\int_{k-1}^k \frac{dx_1^{(\zeta_1)}(t)}{dt} = x_1^{(\zeta_1)}(k) - x_1^{(\zeta_1)}(k-1) = \frac{x_1^{(0)}(k)}{\zeta_1^{k-1}},$$

而 TLDAGM(1, N) 模型却将其近似替代为 $x_1^{(0)}(k)$,

可能会导致系统偏差,从而影响模型的精度和适应能力。

2) 非线性特征挖掘不充分. TLDAGM(1, N) 模型结构较为简单,仅包含外部驱动项,缺乏对系统内部灰色作用机制的深入刻画. 一方面,该模型未能从模型结构中提取和量化系统的灰色作用量,也没有考虑变量间可能存在的线性和非线性关系对于模型性能的潜在影响,降低了其对复杂系统的适应能力;另一方面,作为由 N 个变量构成的一阶灰色预测模型,在变量数变为 $N=1$ 时,并不能退化为 GM(1, 1) 模型,限制了其在统一建模框架下的通用性。

3) 存在转换误差. TLDAGM(1, N) 模型的时间响应函数 (5) 是由微分方程 (4) 经常数变易法推导而得,而模型参数则是通过将 $X_i^{(\zeta_i)}$ 逐一代入差分方程 (3) 经最小二乘法解出. 因此, TLDAGM(1, N) 模型存在从微分方程到差分方程的转换误差. 值得注意的是,虽然文献 [10] 中已注意到该问题并提出了扩展模型加以改进,给出了新的时间响应函数 $x_1^{(0)}(k) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k \frac{b_i}{1+0.5a} \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) - \frac{a}{1+0.5a} x_1^{(\zeta_1)}(k-1)$,

但是,该扩展模型依赖于一项实际应用中无法预先获得的未知量 $x_1^{(\zeta_1)}(k-1)$, 必须通过额外预测或递推关系式得到,而引入递推结构易导致误差累积. 因此,该方法在实际场景中并不适用。

2 多变量阻尼累加非线性时滞离散灰色模型

为克服 TLDAGM(1, N) 模型的固有缺陷,进一步提高其预测精度,本节基于等间隔的整数步长设定,即认为观测序列在时间维度上具有统一的采样间隔,构建 DNTDGM(1, N) 模型。

2.1 模型定义和理论分析

假设 $x_i^{(\zeta_i)}(t) (i=1, 2, \dots, N)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续. 根据积分中值定理可知,若函数 $f(t)$ 在 $[k-1, k]$ 上连续,则存在 $\xi \in [0, 1]$,使得 $\int_{k-1}^k f(t)dt = \xi f(k) + (1-\xi)f(k-1)$. 基于此,令

$$z_1^{(\zeta_1)}(k) = \int_{k-1}^k x_1^{(\zeta_1)}(t)dt = \xi_1 x_1^{(\zeta_1)}(k) + (1-\xi_1)x_1^{(\zeta_1)}(k-1) \quad (7)$$

为序列 $X_1^{(\zeta_1)}$ 的紧邻均值,令

$$z_i^{(\zeta_i)}(k) = \int_{k-1}^k \sum_{j=1}^t \lambda_i^{t-j} x_i^{(\zeta_i)}(j)dt = \xi_i \sum_{j=1}^k \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) + (1-\xi_i) \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_i^{k-1-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) \quad (8)$$

为 $\sum_{j=1}^k \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) (i = 2, 3, \dots, N)$ 的紧邻均值, 其中 ξ_i 为背景值系数.

定义 3 设原始非负序列 $X_i^{(0)}$ 及其 ζ_i 阶阻累加序列 $X_i^{(\zeta_i)}$ 分别如式 (1) 和 (2) 所示, $z_i^{(\zeta_i)}(k) (i = 1, 2, \dots, N)$ 如式 (7) 和 (8) 所示, $\lambda_i \in (0, 1]$ 为时滞系数, $\gamma \in \mathbb{R}$ 为非线性参数, $k = 2, 3, \dots, n$, 称

$$x_1^{(\zeta_1)}(k) - x_1^{(\zeta_1)}(k-1) + az_1^{(\zeta_1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(k) + h_1 k^\gamma + h_2 k + h_3 \quad (9)$$

为 DNTDGM(1, N) 模型. 其中: a 和 $b_i (i = 2, 3, \dots, N)$ 分别为发展系数和驱动系数, $\sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(k)$ 为时滞效应驱动项, $h_1 k^\gamma$ 和 $h_2 k$ 分别为非线性和线性修正项, h_3 为灰色作用量.

与灰色幂模型直接将幂函数作用于变量 x_i 构建非线性修正项不同的是, 本文从时间演化机制出发以增强模型对动态趋势的刻画能力. 具体而言, 变量 x_i 本身是一个随时间演化的时序序列, 而 k 作为时序索引, 能够直接反映样本在时间维度上的演化位置, 通过引入与 k 相关的非线性和线性修正项可以有效刻画序列随时间推移的非线性变化趋势.

为进一步描述系统行为序列的变化规律, 定理 1 给出了 DNTDGM(1, N) 模型的时间响应函数.

定理 1 设 DNTDGM(1, N) 模型结构如定义 3 所述, 则在初值条件 $x_1^{(\zeta_1)}(k)|_{k=1} = x_1^{(0)}(1)$ 下, DNTDGM(1, N) 模型的时间响应函数为

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k) = & \sum_{q=1}^{k-1} \left[\vartheta_1 \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{q-1} b_i \left(\xi_i \sum_{j=1}^{k-q+1} \lambda_i^{k-q+1-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) + \right. \right. \\ & \left. \left. (1 - \xi_i) \sum_{j=1}^{k-q} \lambda_i^{k-q-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) \right) \right] + \\ & \sum_{v=0}^{k-2} \vartheta_2^v [(k-v)\vartheta_4 + \vartheta_5] + \\ & \sum_{u=2}^k \vartheta_3 \vartheta_2^{k-u} u^\gamma + \vartheta_2^{k-1} x_1^{(0)}(1), \quad k = 2, 3, \dots \quad (10) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{1 + a\xi_1}, \quad \vartheta_2 = 1 - \frac{a}{1 + a\xi_1}, \quad \vartheta_3 = \frac{h_1}{1 + a\xi_1}, \\ \vartheta_4 &= \frac{h_2}{1 + a\xi_1}, \quad \vartheta_5 = \frac{h_3}{1 + a\xi_1}. \quad (11) \end{aligned}$$

证明 由式 (9) 可知

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k) &= \frac{1}{1 + a\xi_1} \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(k) + \\ & \frac{1 - a + a\xi_1}{1 + a\xi_1} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k-1) + \\ & \frac{h_1}{1 + a\xi_1} k^\gamma + \frac{h_2}{1 + a\xi_1} k + \frac{h_3}{1 + a\xi_1} = \\ & \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(k) + \vartheta_2 \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k-1) + \\ & \vartheta_3 k^\gamma + \vartheta_4 k + \vartheta_5, \end{aligned}$$

其中 $\vartheta_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 如式 (11) 所示. 用递归法推导, 由初始条件可知:

- 1) 当 $k = 1$ 时, $\hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k)|_{k=1} = x_1^{(0)}(1)$;
- 2) 当 $k = 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(2) &= \\ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(2) &+ \vartheta_2 \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(1) + \vartheta_3 2^\gamma + 2\vartheta_4 + \vartheta_5; \end{aligned}$$

- 3) 当 $k = 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(3) &= \\ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(3) &+ \vartheta_2 \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(2) + \vartheta_3 3^\gamma + 3\vartheta_4 + \vartheta_5 = \\ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(3) &+ \vartheta_1 \vartheta_2 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(2) + \vartheta_2^2 \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(1) + \\ \vartheta_2 \vartheta_3 2^\gamma &+ 2\vartheta_2 \vartheta_4 + \vartheta_2 \vartheta_5 + \vartheta_3 3^\gamma + 3\vartheta_4 + \vartheta_5; \end{aligned}$$

- 4) 继续推导, 当 $k = t$ 时, 有

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(t) &= \\ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(t) &+ \vartheta_1 \vartheta_2 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(t-1) + \dots + \\ \vartheta_1 \vartheta_2^{t-2} \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(2) &+ \vartheta_2^{t-1} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(1) + \\ 2\vartheta_2^{t-2} \vartheta_4 &+ \vartheta_2^{t-2} \vartheta_5 + 3\vartheta_2^{t-3} \vartheta_4 + \vartheta_2^{t-3} \vartheta_5 + \dots + \\ t\vartheta_4 + \vartheta_5 &+ \vartheta_3 \vartheta_2^{t-2} 2^\gamma + \vartheta_3 \vartheta_2^{t-3} 3^\gamma + \dots + \vartheta_3 t^\gamma = \\ \vartheta_1 \left(\vartheta_2^0 \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(t) &+ \dots + \vartheta_2^{t-2} \sum_{i=2}^N b_i z_i^{(\zeta_i)}(2) \right) + \\ \vartheta_2^{t-2} (2\vartheta_4 + \vartheta_5) &+ \dots + \vartheta_2^0 (t\vartheta_4 + \vartheta_5) + \vartheta_3 \vartheta_2^{t-2} 2^\gamma + \\ \vartheta_3 \vartheta_2^{t-3} 3^\gamma &+ \dots + \vartheta_3 \vartheta_2^0 t^\gamma + \vartheta_2^{t-1} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(1). \end{aligned}$$

对上式进行简化并利用初始条件 $\hat{x}_1^{(\zeta_1)}(1) = x_1^{(0)}(1)$, 可得到

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(t) &= \sum_{q=1}^{t-1} \left[\vartheta_1 \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{q-1} b_i z_i^{(\zeta_i)}(t-q+1) \right] + \\ & \sum_{v=0}^{t-2} \vartheta_2^v [(t-v)\vartheta_4 + \vartheta_5] + \end{aligned}$$

$$\sum_{u=2}^t \vartheta_3 \vartheta_2^{t-u} u^\gamma + \vartheta_2^{t-1} x_1^{(0)}(1). \quad \square$$

由于DNTDGM(1, N)与TLDAGM(1, N)模型采用相同的累加算子,其累减还原式亦可由式(6)表示,据此可预测数据的未来发展趋势.类似于文献[10]中的分析,可求得模型的发展系数、驱动系数、线性、非线性修正项系数以及灰色作用量等参数.

定理2 DNTDGM(1, N)模型的参数序列 $\hat{p} = [a, b_2, b_3, \dots, b_N, h_1, h_2, h_3]^T$ 为如下线性方程组的解:

$$B\hat{p} = Y. \quad (12)$$

其中系数矩阵 $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (N+3)}$ 和右端向量 $Y \in \mathbb{R}^{n-1}$ 分别具有如下形式:

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(\zeta_1)}(2) & z_2^{(\zeta_2)}(2) & z_3^{(\zeta_3)}(2) & \dots \\ -z_1^{(\zeta_1)}(3) & z_2^{(\zeta_2)}(3) & z_3^{(\zeta_3)}(3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -z_1^{(\zeta_1)}(n) & z_2^{(\zeta_2)}(n) & z_3^{(\zeta_3)}(n) & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z_N^{(\zeta_N)}(2) & 2^\gamma & 2 & 1 \\ z_N^{(\zeta_N)}(3) & 3^\gamma & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_N^{(\zeta_N)}(n) & n^\gamma & n & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1^{(\zeta_1)}(2) - x_1^{(\zeta_1)}(1) \\ x_1^{(\zeta_1)}(3) - x_1^{(\zeta_1)}(2) \\ \vdots \\ x_1^{(\zeta_1)}(n) - x_1^{(\zeta_1)}(n-1) \end{bmatrix}.$$

经最小二乘法可求得:

1) 当 $n = N + 4$ 且 $|B| \neq 0$ 时

$$\hat{p} = B^{-1}Y;$$

2) 当 $n > N + 4$ 且 $|B^T B| \neq 0$ 时

$$\hat{p} = (B^T B)^{-1} B^T Y;$$

3) 当 $n < N + 4$ 且 $|BB^T| \neq 0$ 时

$$\hat{p} = B^T (BB^T)^{-1} Y.$$

由前文的分析可知, DNTDGM(1, N)模型有如下优点:

1) 不仅延续了TLDAGM(1, N)模型对时滞效应的刻画,使其能够反映众多驱动要素对系统行为趋势存在的时滞累积效应,还在模型结构和求解方式上进行了优化,增强了模型的稳定性.

2) 通过引入积分中值定理,将驱动项的区间积分近似为端点加权下的曲线面积,保持了积分与面积的一致性,从而避免了传统模型将驱动项视为灰常量所带来的结构性误差.特别地,紧邻均值 $z_i^{(\zeta_i)}(k)$

可以动态调整、修正系统输入,弱化自变量中极端值对于输出的影响,以期得到更好的模型精度.同时,对原模型导数项的积分结果进行修正,减少了由于近似处理所引起的数值偏差.

3) 添加了非线性校正项 $h_1 k^\gamma$ 、线性校正项 $h_2 k$ 和灰色作用量 h_3 ,既可在一定程度上反映序列随时间演化的非线性趋势,又实现了与经典GM(1, 1)以及GM(1, N)模型离散形式的兼容性.具体而言,当 $N = 1, \zeta_1 = 1, \xi_1 = 0.5, h_1 = h_2 = 0$ 时,式(9)即为GM(1, 1)模型的离散形式;当 $N > 1, \zeta_i = 1, \xi_1 = 0.5, \xi_i = 1, \lambda_i \rightarrow 0, h_1 = h_2 = h_3 = 0$ 时,式(9)即为GM(1, N)模型的离散形式.

4) 直接利用差分形式代替TLDAGM(1, N)模型中的微分形式,通过递归的方式求得模型的时间响应函数,不仅简化了推导过程,还避免了确定模型参数时微分方程到差分方程的转换误差.

2.2 累加阶数最优估计及建模步骤

DNTDGM(1, N)模型的建模精度高度依赖累加阶数 ζ_i 、时滞系数 λ_i 、背景值系数 ξ_i 和非线性参数 γ . 为获得这些参数的最佳配置,以平均绝对百分比误差(MAPE)作为评估模型精度的指标,构建如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\zeta_i, \lambda_i, \xi_i, \gamma} \text{MAPE} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)} \times 100\%. \\ \text{s.t. } \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k) &= \sum_{q=1}^{k-1} \left[\vartheta_1 \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{q-1} b_i z_i^{(\zeta_i)}(k-q+1) \right] + \\ &\quad \sum_{v=0}^{k-2} \vartheta_2^v [(k-v)\vartheta_4 + \vartheta_5] + \\ &\quad \sum_{u=2}^k \vartheta_3 \vartheta_2^{k-u} u^\gamma + \vartheta_2^{k-1} x_1^{(0)}(1); \\ \hat{x}_1^{(0)}(k) &= (\hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k) - \hat{x}_1^{(\zeta_1)}(k-1)) \zeta_1^{k-1}; \\ z_i^{(\zeta_i)}(k) &= \xi_i \sum_{j=1}^k \lambda_i^{k-j} x_i^{(\zeta_i)}(j) + (1 - \xi_i) \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_i^{k-1-j} x_i^{(\zeta_i)}(j); \\ B\hat{p} &= Y; \\ 0 &\leq \xi_i \leq 1; \\ 0 &< \lambda_i \leq 1; \\ k &= 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

上述优化问题是非线性且不可微的,通常采用一些智能优化算法来求解,如遗传算法、鲸鱼优化算法、量子粒子群优化算法(QPSO)^[27]等.以QPSO算法为例, DNTDGM(1, N)模型的建模步骤可总结如

下:

step 1: 确定系统行为特征序列 $X_1^{(0)}$ 和驱动因素序列 $X_i^{(0)} (i = 2, 3, \dots, N)$, 设置初始参数和 QPSO 算法的迭代次数, 建立 DNTDGM(1, N) 模型.

step 2: 计算非负序列 $X_i^{(0)}$ 的 ζ_i 阶阻尼累加生成序列 $X_i^{(\zeta_i)}$.

step 3: 由式 (12) 求得参数列 \hat{p} , 将其代入式 (10) 求得 $\hat{X}_1^{(\zeta_1)}$, 再由式 (6) 得到拟合值序列 $\hat{X}_1^{(0)}$.

step 4: 用 QPSO 算法求解优化问题 (13), 获得局部最优累加阶数 ζ_i 、时滞系数 λ_i 、背景值系数 ξ_i 和非线性参数 γ .

step 5: 重复 step 2 ~ step 4, 粒子根据自身历史最优解和群体全局最优解动态调整速度和位置, 逐步向目标最优解靠近. 通过多次迭代获得全局最优 ζ_i 、 λ_i 、 ξ_i 、 γ 以及对应的拟合序列 $\hat{X}_1^{(0)}$, 并由此预测系统行为序列的未来发展趋势.

3 案例分析

在当前技术变革和产业升级加速的背景下, 高新技术产业作为推动区域经济增长和高质量发展的关键, 其产值对于政策制定、资源配置以及战略规划至关重要. 基于“投入决定行业产出”的经济学理论^[23], 资本和人力投入被视为高新技术企业产出的关键性决定因素, 并在产业发展过程中发挥着直接而基础的作用. 为此, 本文选取研究和开发 (R & D) 经费、人员作为驱动变量.

然而, 高新技术产业产值往往并非由当期投入直接决定, 而是资金投入和研发活动在多个时期逐步作用的结果. 具体而言, R & D 经费和人员投入在初期主要形成知识积累和技术储备, 中期转化为产品研发, 后期才通过产业化和市场推广逐步反映为产值增长. 因此, 高新技术产业产值具有显著的时滞特征, 需要对“科技投入-技术进步-产业产出”之间的递进和累积关系进行精准刻画. 基于此, 本文以上海市高新技术产业产值为研究对象, 验证所提出模型的有效性和优越性, 相关变量以及数据来源于《中国高技术产业统计年鉴》(<http://60.16.24.131/CSYDMirror>), 如表 1 所示.

3.1 评价指标

选取绝对百分比误差 (APE) 和 MAPE 作为模型的评价指标, 以进一步验证不同模型的拟合和预测效果, 如下所示:

$$APE = \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)} \times 100\%,$$

表1 高新技术产业产值及其相关因素

年份	产值/亿元	R & D经费/百万元	R & D人员/(人·年)
2006	4609.90	4049.56	10006
2007	5792.10	4720.85	11411
2008	6063.50	4856.21	10814
2009	5785.70	6330.21	21453
2010	7019.70	6735.65	19278
2011	7063.60	7173.83	19051
2012	7051.60	9076.44	22606
2013	6823.40	10615.01	26865
2014	7056.90	12740.63	24649
2015	7213.00	12822.52	27371
2016	7010.20	13381.72	28283
2017	7288.10	14492.17	25334
2018	7566.00	12731.59	24309
2019	7438.00	16354.19	21887
2020	7913.00	21353.21	26917
2021	8411.00	28064.21	28549
2022	9176.35	27998.82	31357
2023	8594.00	32955.19	36169

$$MAPE = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)} \times 100\%.$$

3.2 参数优化分析

本文选用 QPSO 算法优化模型中的未知参数, 为保证模型参数最优估计的可靠性, 首先对 QPSO 算法的参数敏感性进行分析, 以验证其在不同参数设置下的稳定性和鲁棒性, 实验结果如表 2 所示.

表2 优化参数敏感性分析

迭代次数	粒子数量	收缩-扩张系数	MAPE/%
50	20	0.5	1.1679
50	20	1.0	0.9594
50	30	0.5	1.0995
50	30	1.0	0.9795
80	20	0.5	0.9873
80	20	1.0	0.9895
80	30	0.5	1.0404
80	30	1.0	0.9828
100	20	0.5	1.1804
100	20	1.0	0.9661
100	30	0.5	1.0077
100	30	1.0	0.9581

由表 2 可知, QPSO 算法在不同参数设置下的表现具有较高的一致性, 12 组 MAPE 的方差仅为 $5.784 \times 10^{-3}\%$. 这表明优化算法的参数变化对于结果影响较小, QPSO 算法整体较为稳定. 因此, 本文选用 QPSO 算法对模型参数寻优, 以获得更为精确的预测结果, 并给出相应的迭代曲线, 如图 1 所示.

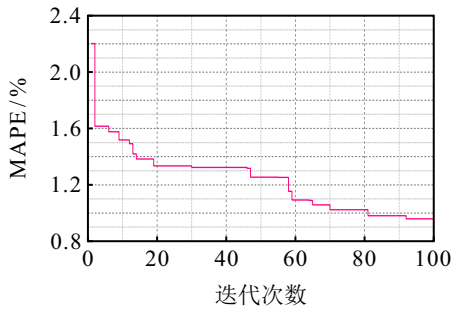


图1 QPSO 算法迭代曲线

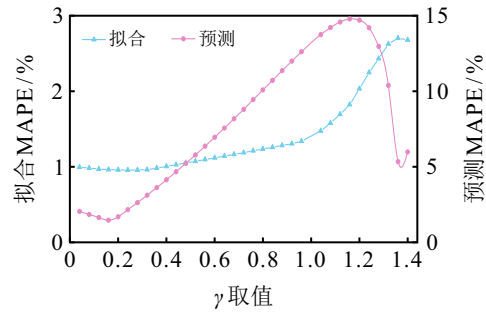


图2 不同 γ 取值下的DNTDGM(1, N)模型误差

3.3 上海市高新技术产业产值预测

以2006年~2019年上海市高新技术产值为模拟建模数据,2020年~2023年数据作为测试集用于检验模型的预测精度和稳定性.为验证新模型的有效性,本节选取TLDAGM(1, N)模型^[10]、时滞累积多变量灰色模型(TDAGM(1, N))^[22]和变量阶数差异性优化的新结构多变量灰色模型(SGM(1, N))^[11]作为对比模型,还与近期提出的自控步调(Self-paced)的ARIMA (SP-ARIMA)模型^[28]进行对比分析.相较于ARIMA模型,SP-ARIMA模型可有效解决噪声引起的不稳定问题.上述灰色模型均有参数需要选取,为此均可建立类似于式(13)的非线性优化问题并用QPSO算法寻求最优参数,具体如表3和表4所示.

表3 各模型最优累加阶数

变量	SGM(1, N)	TLDAGM(1, N)	DNTDGM(1, N)
X_1	$r_1 = 1.9701$	$\zeta_1 = 0.8454$	$\zeta_1 = 0.9609$
X_2	$r_2 = 1.7398$	$\zeta_2 = 1$	$\zeta_2 = 0.9537$
X_3	$r_3 = 1.4651$	$\zeta_3 = 0.7679$	$\zeta_3 = 0.9885$

表4 各模型最优参数

参数	SGM(1, N)	TDAGM(1, N)	TLDAGM(1, N)	DNTDGM(1, N)
λ_2	—	1	0.0116	0.0001
λ_3	—	0.7493	1	0.2093
ξ_1	0.5	0.5	0.5	0.5654
ξ_2	—	—	—	0.0532
ξ_3	—	—	—	0.9556
γ	1.5229	—	—	0.2044

值得注意的是,对于非线性参数 γ ,本文仅保留到低阶项便能够较好地捕捉系统特征.这主要是由于DNTDGM(1, N)模型本质上是对系统演化规律的一种函数逼近过程,而在函数逼近问题中,高阶项的引入并不一定能够提升逼近效果,反而可能引发类似龙格(Runge)现象的震荡问题,导致整体逼近效果较差.相比之下,低阶项能够更好地拟合数据发展趋势.为了更直观地表明非线性参数 γ 对于模型性能

的影响,固定参数 ζ_i 、 λ_i 和 ξ_i ,以0.04为步长,将 γ 从0.1递增至1.4.图2为不同 γ 取值下MAPE的变化曲线.由图2可以发现:

1) 拟合MAPE随着 γ 的增加呈现先减小后增大的趋势,且波动幅度越来越大,当 $\gamma = 0.2$ 附近时,拟合MAPE取得最小值;

2) 预测MAPE随着 γ 的变化呈现波动性特征,并在 $\gamma = 0.16$ 时取得最小值.

综上,非线性参数的取值若过大,则不仅可能会削弱模型对主要特征的提炼能力,还易引发过拟合现象.因此,控制非线性参数在合理范围内有助于保证模型的拟合能力和预测精度.

利用定理1计算新模型的拟合和预测值,并计算相应的评估指标,结果如表5所示.图3为各模型的拟合和预测曲线,图4为各模型的拟合和预测MAPE.需要说明的是,由于SP-ARIMA模型中的自回归系数 $m+k$ 的取值决定了参与当前点预测的历史样本数量,模型只能从第 $m+k+1$ 个样本开始拟合,本文取 $m+k=4$.

由实验结果可知,所提出DNTDGM(1, N)模型的拟合和预测误差均优于其他模型,MAPE分别为0.9581%和1.7464%.这一优势主要得益于新模型考虑了高新技术产业中投入对产出的时滞累积效应,而TLDAGM(1, N)模型的拟合和预测效果较差,可能源于其未能有效考虑系统中的非线性影响.上述实例分析充分验证了所构建DNTDGM(1, N)模型的合理性和有效性.

由图3可知,DNTDGM(1, N)模型的模拟曲线与实际数据更为贴合,且相对误差波动较小,整体稳定性更佳.综合图4中的拟合精度与预测精度的对比结果可知,DNTDGM(1, N)模型在性能上均明显优于SP-ARIMA与TLDAGM(1, N)等模型.由此可见,所提出DNTDGM(1, N)模型在刻画高新技术产业产值与驱动因素间的动态演化规律方面具有更高的准确性和适应性,为相关领域的系统建模和趋势预测提供了一种更加高效可靠的工具.

表5 高新技术产值拟合和预测值及误差比较

年份	原始值	SP-ARIMA		SGM(1, N)		TDAGM(1, N)		TLDAGM(1, N)		DNTDGM(1, N)	
		预测值	APE/%	预测值	APE/%	预测值	APE/%	预测值	APE/%	预测值	APE/%
2006	4609.90	—	—	4609.9000	0	4609.9000	0	4609.9000	0	4609.9000	0
2007	5792.10	—	—	5800.4347	0.1439	5661.4139	2.2563	4139.7052	28.5284	5785.9209	0.1067
2008	6063.50	—	—	5955.2146	1.7859	6084.4470	0.3455	6062.5699	0.0153	6041.5130	0.3626
2009	5785.70	—	—	6116.8240	5.7231	6385.0934	10.3599	6993.9063	20.8826	5935.4675	2.5886
2010	7019.70	7062.7338	0.6130	6700.2789	4.5504	6619.7747	5.6972	6571.9093	6.3791	6780.1389	3.4127
2011	7063.60	7175.1603	1.5794	7063.8617	0.0037	6813.5985	3.5393	6091.9059	13.7564	7224.0551	2.2716
2012	7051.60	7065.3674	0.1952	7078.6539	0.3837	6957.2751	1.3376	6563.3372	6.9241	7012.5000	0.5545
2013	6823.40	6809.2130	0.2079	6875.6133	0.7652	7038.5534	3.1532	6823.3838	0.0002	6754.7138	1.0066
2014	7056.90	7263.8336	2.9324	7208.5734	2.1493	7108.3842	0.7296	7188.2854	1.8618	7155.0521	1.3909
2015	7213.00	7295.7622	1.1474	7086.0561	1.7599	7156.2186	0.7872	6834.8746	5.2423	7209.6543	0.0464
2016	7010.20	7204.9208	2.7777	7006.2885	0.0558	7191.8450	2.5912	6765.5343	3.4901	6978.2559	0.4557
2017	7288.10	7183.1440	1.4401	7308.8140	0.2842	7258.3420	0.4083	6807.2718	6.5974	7288.1636	0.0009
2018	7566.00	7263.0397	4.0042	7318.7673	3.2677	7361.9295	2.6972	6273.3381	17.0851	7558.6352	0.0973
2019	7438.00	7199.8567	3.2017	7767.8935	4.4352	7534.9476	1.3034	6780.2877	8.8426	7450.0037	0.1614
MAPE/%			1.8099		1.9468		2.7081		9.2004		0.9581
2020	7913.00	7199.8567	9.0123	7870.9895	0.5309	7743.0256	2.1480	7627.7321	3.6051	7606.3662	3.8751
2021	8411.00	7047.4615	16.2114	8410.9795	0.0002	7999.9377	4.8872	8638.9194	2.7098	8244.9081	1.9747
2022	9176.35	7144.6910	22.1402	8490.6929	7.4720	8288.8651	9.6714	8957.7124	2.3826	9112.3038	0.6979
2023	8594.00	7330.6257	14.7007	8594.0616	0.0007	8595.9203	0.0223	10103.0280	17.5591	8556.3549	0.4380
MAPE/%			15.5161		2.0009		4.1823		6.5641		1.7464

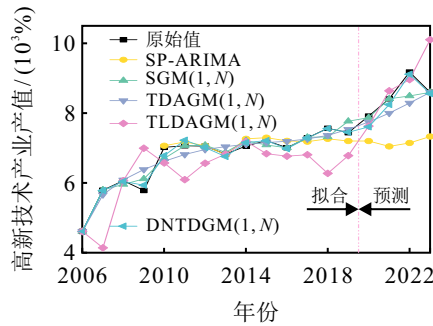


图3 拟合和预测曲线

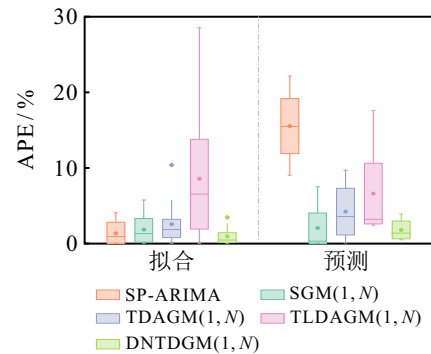


图5 5种模型的 APE 分布情况

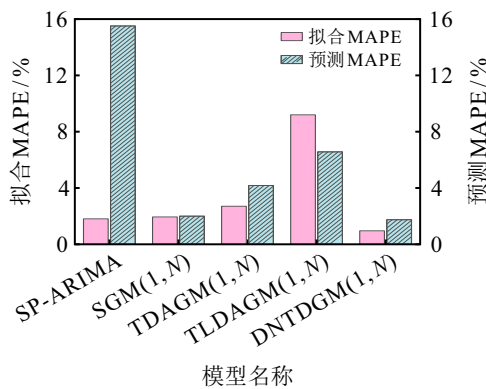


图4 5种模型的 MAPE 值

3.4 稳定性分析

为验证和分析DNTDGM(1, N)模型的稳定性和可靠性,本节将从以下3个角度进行分析。

3.4.1 基于 APE 分布的稳定性分析

一般而言, APE 分布越为集中, 模型的预测结果越稳定, 具有越强的稳健性. 为此, 图5给出了

DNTDGM(1, N)模型与其他4个对比模型的 APE 分布情况。

由图5可见: DNTDGM(1, N)模型的拟合和预测 APE 分布均最为集中且均值最小; 而 TLDAGM(1, N)和 SP-ARIMA 模型分布较为分散, 表明模型的拟合误差波动较大, 稳定性较差; TDAGM(1, N)和SGM(1, N)模型虽然 APE 分布相对集中, 但是均存在离群点. 相比之下, DNTDGM(1, N)模型在整个预测过程中保持了较为均衡的误差水平, 体现出良好的拟合和泛化能力。

3.4.2 参数敏感性分析

考虑到累加阶数 ζ_i 、时滞系数 λ_i 、背景值系数 ξ_i 和非线性参数 γ 的取值决定了DNTDGM(1, N)模型的精度, 本节对最优参数进行扰动实验以验证DNTDGM(1, N)模型在不同参数设定下的稳定性。

以因变量的累加阶数 ζ_1 、背景值系数 ξ_1 、第1个自变量的时滞系数 λ_2 以及非线性参数 γ 为例表明参数对模型性能的影响.具体地,以最优参数为基准,由于 $\zeta_1 \in (0, 1]$,对 ζ_1 分别进行-5%、-10%、-15%和-20%的调整,同时,对 λ_2 、 ξ_1 和 γ 分别进行 $\pm 5\%$ 、 $\pm 10\%$ 、 $\pm 15\%$ 和 $\pm 20\%$ 的调整,并采用MAPE指标评价误差的变化幅度,实验结果如图6所示.

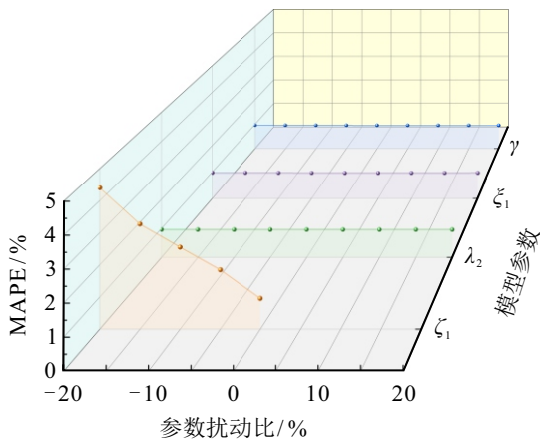


图6 不同参数扰动下 MAPE 变化曲线

由图6可知,当参数发生小幅波动时,MAPE始终保持在合理范围内,波动区间为[0.9581%, 4.4012%],表明模型具有较好的稳定性.其中: ζ_1 的敏感性最强,对预测效果影响最大; λ_2 、 ξ_1 和 γ 在不同取值下的MAPE变化幅度均较小,表明模型在这3个参数上的鲁棒性较强.综合而言,该模型在参数扰动下能够保持较好的预测性能,满足现实应用中对稳定性和可靠性的要求.

3.4.3 蒙特卡洛仿真

在蒙特卡洛仿真研究中,对DNTDGM(1, N)模型重复执行100次QPSO算法,每次运行均获得对应的最优目标函数值,即MAPE.基于这100次运行得到的最优目标函数值结果,绘制其频率分布图,实验结果如图7所示.

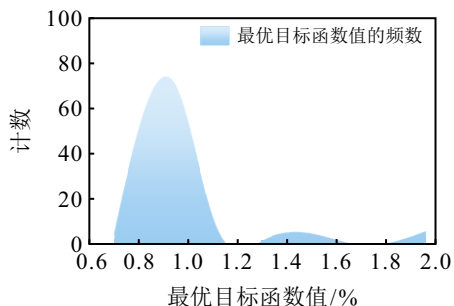


图7 DNTDGM(1, N)模型最优目标函数频数分布

由图7可知,DNTDGM(1, N)模型在100次重复实验中的目标函数波动范围为[0.72%, 1.96%],波动范围相对较小,且有70次结果为0.95%,表明

DNTDGM(1, N)模型在该特定值附近表现出较高的集中度.此外,最优目标函数的分布呈现单峰形态且范围较窄,频数在主峰处达到最大值,远离主峰的目标函数值较少且分布稀疏.这表明随机性对于结果的影响较小,进一步表明了该模型具有较好的稳定性和可靠性.

4 结论与展望

针对TLDAGM(1, N)模型存在的建模机理不明确、非线性特征挖掘不充分以及存在转换误差等问题,本文首先引入了常数项来增强结构兼容性,然后采用积分中值定理和离散建模思路减少结构与转换误差,并通过线性和非线性修正项进一步挖掘了数据特征,以近年来上海市高新技术产业产值这个实际案例进行了实证分析,分别从拟合精度、预测能力、稳定性等方面对模型性能进行了评估.结果表明,新模型在多个评价指标下均优于其他模型,验证了其在复杂系统建模中的适用性和有效性.

现实生活中存在广泛的时滞累积效应,在未来研究中可考虑对时滞驱动项进行进一步改进,使其能够自适应识别时滞效应,并引入幂模型对非线性项进行更为细致地设计.此外,模型的应用领域也有待拓展,不仅可以在经济系统中发挥作用,还可推广至能源、环境、医疗等领域,通过引入更多行业和地区的数据,从而进一步提升其应用价值和现实意义.

参考文献 (References)

- [1] 刘思峰. 灰色系统理论及其应用[M]. 第10版. 北京: 科学出版社, 2024. (Liu S F. Grey system theory and its application[M]. The 10th edition. Beijing: Science Press, 2024.)
- [2] Shen Q Q, Cao Y, Yao L Q, et al. An optimized discrete grey multi-variable convolution model and its applications[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2021, 40(2): 58.
- [3] Zhou H M, Yang Y J, Geng S S. Forecasting the output of high-tech industry in China: A novel nonlinear grey time-delay multivariable model with variable lag parameters[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 257: 125054.
- [4] Zhou W J, Chang J X, Zuo W Z, et al. A seasonal grey model for forecasting energy imports demand from information differences perspective[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, 140: 115907.
- [5] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [6] Zhang L X, Ma X. A novel multi-fractional multivariate grey model for city air quality index prediction in China[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 257: 125010.
- [7] Liu L Y, Chen Y, Wu L F. The damping accumulated

- grey model and its application[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 95: 105665.
- [8] 曹阳, 梁爽, 沈琴琴, 等. 阻尼累加离散 GM(1, 1) 模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2023, 38(6): 1687-1694. (Cao Y, Liang S, Shen Q Q, et al. Damping accumulated discrete GM(1, 1) model and its application[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(6): 1687-1694.)
- [9] Yan S L, Su Q, Wu L F, et al. A damping grey multivariable model and its application in online public opinion prediction[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2023, 118: 105661.
- [10] 罗党, 李良帅. 多变量时滞阻尼累加灰色模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2703-2710. (Luo D, Li L S. Multivariable time-lag damping accumulated grey model and its application[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(8): 2703-2710.)
- [11] 尹凤凤, 曾波, 余乐安, 等. 多维灰色模型阶数差异性优化与结构拓展研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(7): 2166-2178. (Yin F F, Zeng B, Yu L A, et al. Research on the orders differential optimization and structural expansion of multidimensional grey model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2023, 43(7): 2166-2178.)
- [12] Cao Y, Sun M, Shen Q Q, et al. A variable-order nonlinear discrete grey multivariate model with new information priority accumulation and its applications[J]. *The Journal of Grey System*, 2025, 37(3): 37-49.
- [13] 沈琴琴, 杨林云, 曹阳. 可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型及应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(9): 2797-2806. (Shen Q Q, Yang L Y, Cao Y. Variable conformable fractional nonlinear discrete grey multivariate model and its applications[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(9): 2797-2806.)
- [14] Tien T L. The indirect measurement of tensile strength of material by the grey prediction model GMC(1, n)[J]. *Measurement Science and Technology*, 2005, 16(6): 1322-1328.
- [15] 谢乃明, 刘思峰. 多变量离散灰色模型及其性质[J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(6): 143-150. (Xie N M, Liu S F. Research on the discrete grey model of multi-variables and its properties[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2008, 28(6): 143-150.)
- [16] 丁松, 党耀国, 徐宁. 基于虚拟变量控制的 GM(1, N) 模型构建及其应用[J]. *控制与决策*, 2018, 33(2): 309-315. (Ding S, Dang Y G, Xu N. Construction and application of GM(1, N) based on control of dummy variables[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(2): 309-315.)
- [17] 叶莉, 党耀国, 王俊杰. 基于冲击效应的灰色多变量时滞预测模型及其应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(5): 1515-1533. (Ye L, Dang Y G, Wang J J. Impact effect-based grey multivariable time delay model and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2023, 43(5): 1515-1533.)
- [18] Luo D, Li L S. Rolling discrete grey periodic power model with interaction effect under dual processing and its application[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 254: 124487.
- [19] Hao Y H, Wang Y J, Zhao J J, et al. Grey system model with time lag and application to simulation of karst spring discharge[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2011, 1(1): 47-56.
- [20] 王正新. 多变量时滞 GM(1, N) 模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2015, 30(12): 2298-2304. (Wang Z X. Multivariable time-delay GM(1, N) model and its application[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(12): 2298-2304.)
- [21] 丁松, 党耀国, 徐宁, 等. 基于时滞效应的多变量离散灰色预测模型[J]. *控制与决策*, 2017, 32(11): 1997-2004. (Ding S, Dang Y G, Xu N, et al. Multi-variable time-delayed discrete grey model[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(11): 1997-2004.)
- [22] 罗党, 安艺萌, 王小雷. 时滞累积 TDAGM(1, N, t) 模型及其在粮食生产中的应用[J]. *控制与决策*, 2021, 36(8): 2002-2012. (Luo D, An Y M, Wang X L. Time-delayed accumulative TDAGM(1, N, t) model and its application in grain production[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(8): 2002-2012.)
- [23] Ding S, Tao Z, Hu J Q. Forecasting the economic indices of the high-tech industries in China using the grey multivariable convolution model[J]. *Applied Soft Computing*, 2022, 126: 109301.
- [24] Zeng B, Tuo Y B. Multivariate grey prediction model with fractional time-lag parameter and its application[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, 141: 115940.
- [25] Wang Y, Yang R, Sun L, et al. A novel time-lag discrete grey Euler model and its application in renewable energy generation prediction[J]. *Renewable Energy*, 2025, 245: 122785.
- [26] Wu W Z, Xie N M. A novel multivariate nonlinear time-delayed grey model for forecasting electricity consumption[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2025, 149: 110452.
- [27] Bey M, Kuila P, Naik B B, et al. Quantum-inspired particle swarm optimization for efficient IoT service placement in edge computing systems[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 236: 121270.
- [28] Li Y T, Wu K, Liu J. Self-paced ARIMA for robust time series prediction[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2023, 269: 110489.

作者简介

杨林云 (2002–), 女, 硕士生, 主要研究方向为灰色系统理论与预测, E-mail: 19502555998@163.com;

沈琴琴 (1984–), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为灰色系统理论与预测、智能交通, E-mail: shenqq@ntu.edu.cn;

曹阳 (1986–), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论与预测、科学计算、智能信息处理, E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn.