

控制与决策

Control and Decision

基于Markov跳变过程的硅单晶生长系统有限时间 H_∞ 控制

李艳恺, 陈晨, 刘丁

引用本文:

李艳恺, 陈晨, 刘丁. 基于Markov跳变过程的硅单晶生长系统有限时间 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2026, 41(3): 707-717.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0811>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty

控制与决策. 2021, 36(9): 2074-2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks

控制与决策. 2021, 36(8): 1955-1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 H_∞ 控制

Non-fragile H_∞ control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087-1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制

Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation

控制与决策. 2021, 36(5): 1078-1086 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0820>

带输入饱和的不确定非线性系统自适应模糊触发式补偿控制

Adaptive fuzzy trigger compensation control for uncertain nonlinear system with input saturation

控制与决策. 2021, 36(12): 3007-3014 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0907>

基于 Markov 跳变过程的硅单晶生长系统 有限时间 H_∞ 控制

李艳恺^{1,2,3†}, 陈晨^{1,2}, 刘丁^{1,2}

- (1. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 西安 710048;
2. 西安理工大学 晶体生长设备及系统集成国家地方联合工程研究中心, 西安 710048;
3. 西安理工大学 陕西省现代装备绿色制造协同创新中心, 西安 710048)

摘要: 研究系统状态不完全可测且存在外界干扰情况下 Markov 跳变离散时间硅单晶生长系统的有限时间 H_∞ 控制问题. 首先, 充分考虑硅单晶生长过程由于干扰、建模误差、测量噪声诱导的随机因素, 建立基于 Markov 跳变离散时间硅单晶生长系统模型; 然后, 结合实际硅单晶生长过程测量输出信息, 构造状态观测器和控制器; 接着, 根据 Markov 跳变理论和有限时间 H_∞ 控制理论得到闭环离散时间硅单晶生长系统有限时间有界且满足相应 H_∞ 性能的充分条件, 运用线性矩阵不等式 (LMI) 技术给出控制器和观测器增益的求解方法; 最后, 通过实际硅单晶生长系统模型参数验证所提出控制方案的有效性.

关键词: 硅单晶生长系统; Markov 跳变过程; 有限时间; H_∞ 控制; 状态观测器; LMI 技术

中图分类号: O231 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0811

引用格式: 李艳恺, 陈晨, 刘丁. 基于 Markov 跳变过程的硅单晶生长系统有限时间 H_∞ 控制 [J]. 控制与决策, 2026, 41(3): 707-717.

Finite-time anti-disturbance H_∞ control for silicon single crystal growth based on Markov jump system models

LI Yan-kai^{1,2,3†}, CHEN Chen^{1,2}, LIU Ding^{1,2}

- (1. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;
2. National & Local Joint Engineering Research Center of Crystal Growth Equipment and System Integration, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 3. Shaanxi Modern Equipment Green Manufacturing Collaborative Innovation Center, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: This paper studies the finite-time H_∞ control problem of Markov jump discrete-time silicon single crystal growth systems under incompletely measurable system states and external disturbances. By introducing the Markov jump process into the silicon single crystal growth model, a Markov jump discrete-time silicon single crystal growth systems are established. Considering that the system state in the actual silicon single crystal growth process is not completely measurable and affected by external disturbances, the state observer and controller are constructed using the measurement outputs. Based on this, according to the Markov jump control system theory and the finite-time H_∞ control theory, a sufficient condition is obtained to ensure that the closed-loop discrete-time silicon single crystal growth systems are finite-time bounded with the H_∞ performance. The solution method of controller and observer gains is given via using linear matrix inequality (LMI) technology. Finally, the effectiveness of the proposed control scheme is verified by the model parameters of actual silicon single crystal growth systems.

Keywords: silicon single crystal growth systems; Markov jump process; finite-time; H_∞ control; state observer; LMI technique

0 引言

直拉硅单晶生长过程^[1-4]是一个具有多场多相

耦合、工艺参数多等特性的复杂工业生产过程. 为保证硅单晶稳定生长, 不仅要求模型准确度高, 且要求

收稿日期: 2025-08-03; 录用日期: 2025-10-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62473310, 62127809); 陕西省教育厅科研计划项目 (23JY053); 陕西省科技厅重点研发计划项目 (2024GX-YBXM-298); 中国博士后科学基金项目 (2021MD703879, 2022T150524).

责任编委: 董久祥.

†通信作者. E-mail: liyankai@xaut.edu.cn.

控制器鲁棒性强. 目前, 针对拉硅单晶生长过程建模与控制已有许多成果^[5-10]. 如: 文献 [6] 将硅单晶机理模型与数据驱动方法相结合, 建立了硅单晶生长混合模型以提高模型准确度; 文献 [7] 将无模型自适应控制方法与迭代学习控制方法相结合, 实现了对直拉硅单晶批次生产精确控制; 文献 [8] 结合直拉硅单晶生长动力学与几何学, 建立了硅单晶生长状态空间模型, 并构造了事件触发模型预测控制器来实现控制目标.

由于系统在实际应用过程中存在众多随机性、不确定性, 许多学者将 Markov 跳变过程引入系统模型中旨在描述系统状态的随机变化, 并基于 Markov 跳变系统产生出众多科研成果^[11-16]. 文献 [12] 讨论了 Markov 跳变系统的稳定性问题; 文献 [14] 构造了滑膜控制器来抑制半 Markov 跳变系统中非线性项及不确定性对系统的影响. 此外, 有限时间控制^[17-20]作为一种收敛速度快、稳定性高的控制方法, 被广泛应用于实际系统控制中. 文献 [19] 针对三相变换器受负载扰动导致电压波动较大的问题, 采用基于干扰观测器的有限时间控制方法改善了系统瞬态性能; 文献 [20] 以 Markov 跳变系统为对象, 讨论了对其进行量化模糊有限时间控制问题. 同时, 针对实际系统受到外界扰动影响, 将有限时间控制与 H_∞ 控制相结合成为趋势, 并已有相关成果^[21-25]. 如文献 [25] 针对受到多重干扰的切换系统, 提出了 H_∞ 有限时间复合抗干扰切换控制方法.

考虑到硅单晶生长过程中无法对其固液界面处温度状态进行测量, 需要在控制方案中引入状态观测器对其进行估计. 本文将针对实际硅单晶生长过程, 建立其 Markov 跳变模型, 构造状态观测器以及控制器, 实现对硅单晶生长系统有限时间 H_∞ 抗干扰控制. 本文主要内容如下:

1) 针对硅单晶生长系统, 建立基于 Markov 跳变过程的离散时间硅单晶生长系统, 同时, 在模型中考虑未知非线性建模误差以及外界干扰, 增强控制器的鲁棒性. 与文献 [26] 相比, 本文所讨论的模型更能模拟硅单晶生长系统中存在的随机性因素, 为硅单晶生长设备的高精度控制提供新的建模和分析思路.

2) 针对系统状态不完全可测且存在外界干扰的 Markov 跳变硅单晶生长系统, 构造跟随系统切换而切换的状态观测器和控制器, 利用有限时间理论和 Markov 跳变系统理论给出确保闭环系统有限时间有界且具有 H_∞ 性能的充分条件, 并利用极点配置和 LMI 等技术求解出控制器及状态观测器增益. 最后, 应用实际硅单晶生长参数验证所提出方法的有效性.

注意, 对本文所出现的符号进行如下说明: n 维实数向量表示为 R^n , 数学期望用 $\mathbb{E}\{\cdot\}$ 表示, 矩阵中符号 $*$ 表示矩阵对称位置元素的转置, $\text{diag}\{\dots\}$ 为块对角矩阵. 若没有特意说明矩阵维数, 则矩阵维数相互兼容, I 为具有适当维数的单位阵.

1 问题描述

在硅单晶生长控制问题中, 系统的动态行为复杂且具有强耦合、多变量等特性, 并涉及热传递、几何演化以及流体动力学等复杂机制. 根据文献 [27] 中的建模思路, 对硅单晶生长过程进行数学描述, 建模的核心目标在于刻画熔体温度和晶体半径的动态变化规律, 从而为后续的控制设计奠定理论基础. 在硅单晶生长过程中, 热量交换主要通过传导、辐射以及对流 3 种形式实现. 以熔体温度 T_l 为建模核心, 可建立如下能量守恒方程:

$$c_l m_l \dot{T}_l = P - Q_h - Q_c - Q_{co} - Q_{lo} - Q_l + Q. \quad (1)$$

其中: c_l 为熔体比热容, m_l 为熔体质量, P 为加热器功率输入, Q_h 、 Q_c 、 Q_{co} 、 Q_{lo} 、 Q_l 以及 Q 分别为加热器和坩埚吸收的热量、坩埚热辐射损失的热量、熔体表面热辐射损失的热量、熔体热传导至固液界面处损失的热量以及硅单晶结晶所释放的热量. 同时, 晶体半径 R_c 的演化受界面几何形态、固液相变速率以及拉晶工艺参数影响, 其演化方程为

$$\dot{R}_c = v_c \tan \alpha_c. \quad (2)$$

这里: α_c 为晶体倾斜角, $v_c = \frac{(1-k)\rho_l R_{cr}^2}{\rho_l R_{cr}^2 - \rho_s R_c^2} v_p$ 为晶体生长速率. 其中: k 为锅跟比, ρ_l 、 ρ_s 分别为硅熔体和硅单晶密度, R_{cr} 为液面半径, v_p 为晶体提拉速率.

根据上述讨论, 分别选取熔体温度 T_l 和晶体半径 R_c 为状态变量 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 , 建立如下硅单晶生长系统:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \frac{1}{c_l m_l} P - Q_h - Q_c - Q_{co} - Q_{lo} - Q_l + Q, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \frac{(1-k)\rho_l R_{cr}^2}{\rho_l R_{cr}^2 - \rho_s R_c^2} \tan \alpha_c v_p. \end{aligned} \quad (3)$$

为进一步分析, 晶体生长系统 (3) 表示为

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)). \quad (4)$$

此外, 考虑到实际生产过程中设备工况变化等随机性因素的影响, 在模型中引入 Markov 跳变过程, 同时, 在运行范围内在多个平衡点附近对系统 (4) 进行小扰动线性化, 并利用泰勒展开的一阶近似表达, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \\ & f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \approx \\ & f(\bar{x}_{0i}, \bar{u}_{0i}) + A_i(\bar{x} - \bar{x}_{0i}) + B_i(\bar{u} - \bar{u}_{0i}). \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $A_i = \partial f_i / \partial x|_{(\bar{x}_{0i}, \bar{u}_{0i})}$; $B_i = \partial f_i / \partial u|_{(\bar{x}_{0i}, \bar{u}_{0i})}$; $(\bar{x}_{0i}, \bar{u}_{0i})$ 为运行范围内所选取的平衡点, 且满足 $f(\bar{x}_{0i}, \bar{u}_{0i}) = 0$. 最后, 通过归一化和离散化得到基于 Markov 跳变系统的硅单晶生长系统模型, 有

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k). \quad (6)$$

这里: $x = [x_1 \ x_2]^T$, x_1 、 x_2 分别为熔体温度 T_l 和晶体半径的变化量 R_c ; $u = [u_1 \ u_2]^T$, u_1 、 u_2 分别为加热器功率和晶体提拉速率的变化量.

注 1 在硅单晶生长过程中, 系统的动力学特性会受到多种不确定因素的影响, 包括热流传递波动、加热功率微变化、界面形态波动以及执行与测量环节的随机误差等. 这些扰动不仅导致系统参数难以保持稳定, 还可能使其在不同的近邻工作状态间发生跳变, 使得单一的确定性模型无法准确刻画实际动态特性. 若仅依赖某一固定平衡点附近的线性化模型, 则其适用范围往往有限, 难以满足控制设计中对于模型有效性的要求. 为更贴合该类随机性、时变性和多模态并存的系统特征, 有必要将随机 Markov 跳变模型纳入建模框架中. 基于此, 可在系统运行范围内的多个平衡点附近对原非线性模型进行线性化, 并借助 Markov 过程建立由多子系统构成的跳变模型, 为后续的控制设计器和稳定性分析奠定基础.

为增强系统模型 (6) 的适用性和鲁棒性, 考虑未建模动力学和系统存在外界干扰的因素, 建立如下包含非线性项和干扰项的基于 Markov 跳变过程的离散时间硅单晶生长系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + \\ \quad f_{\sigma(k)}(x(k), k) + H_{1\sigma(k)}\delta_1(k), \\ y(k) = C_{\sigma(k)}x(k) + H_{2\sigma(k)}\delta_2(k) + D_{\sigma(k)}u(k), \\ z(k) = C_{z\sigma(k)}x(k) + H_{3\sigma(k)}\delta_3(k). \end{cases} \quad (7)$$

其中: $x(k) \in R^{n_x}$, $u(k) \in R^{n_u}$ 和 $y(k) \in R^{n_y}$ 分别为系统状态、系统控制输入和系统测量输出; $\delta_j(k) \in L_2[0, \infty)$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) 为外界能量有界干扰; $z(k) \in R^{n_z}$ 为系统控制输出; $f_{\sigma(k)}(x(k), k)$ 为系统非线性项; 此外, $A_{\sigma(k)}$, $B_{\sigma(k)}$, $C_{\sigma(k)}$, $D_{\sigma(k)}$, $C_{z\sigma(k)}$ 和 $H_{j\sigma(k)}$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) 为系统已知矩阵.

系统模态参数 $\delta(k)$ ($k \geq 0$) 表示服从离散时间、离散过程 Markov 链的切换过程, 且其值取自具有以下转移概率的有限集合 $S = \{1, 2, \dots, s\}$:

$$\Pr(\sigma(k+1) = j | \sigma(k) = i) = \pi_{ij}, \quad (8)$$

其中 $\pi_{ij} \in [0, 1]$ 为系统从第 k 时刻模态 i 跳变到第 $k+1$ 时刻模态 j 的转移概率, 且满足 $\sum_{j=1}^s \pi_{ij} = 1$.

注 2 为提高对硅单晶生长系统的控制性能, 在系统模型中引入 Markov 跳变过程来模拟实际硅单晶生长过程中的随机性. 与此同时, 考虑到外界环境对于硅单晶生长设备影响等因素, 在建模过程中引入能量有界干扰 $\delta_j(k)$ ($j \in \{1, 2, 3\}$). 此外, 为减小建模误差, 在所考虑模型中引入非线性项 $f_{\sigma(k)}(x(k), k)$ 来模拟系统未知非线性动力学. 在非线性系统的建模和控制研究中, 通常通过 Lipschitz 条件对非线性项的增量进行有界刻画, 从而保证模型在分析和控制设计中具备可处理性. 需要指出的是, 仿真中所采用的 Lipschitz 非线性项并非依赖其精确解析形式, 而是对实际系统运行区间内非线性变化率的近似估计, 这种设定在硅单晶生长建模中是合理的, 也使得后续观测器与控制能够在统一的 LMI 框架下进行设计^[28].

在实际硅单晶生长过程中, 系统状态通常是不完全可测的, 因此, 需要构造状态观测器对系统状态进行估计. 构造如下状态观测器:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + \\ &\quad L_{\sigma(k)}[y(k) - \hat{y}(k)], \\ \hat{y}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + D_{\sigma(k)}u(k). \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\hat{x}(k)$ 和 $\hat{y}(k)$ 分别为系统状态估计和系统测量输出估计, $L_{\sigma(k)}$ 为状态观测器增益. 然后, 基于系统状态观测器构造如下形式控制器:

$$u(k) = K_{\sigma(k)}\hat{x}(k), \quad (10)$$

这里 $K_{\sigma(k)}$ 为控制器增益.

定义系统状态观测误差 $e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, 并根据硅单晶生长系统 (7) 及其状态观测器 (9) 可得到

$$\begin{aligned} e_x(k+1) &= \\ x(k+1) - \hat{x}(k+1) &= \\ A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + f_{\sigma(k)}(x(k), k) + \\ H_{1\sigma(k)}\delta_1(k) - A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) - B_{\sigma(k)}u(k) - \\ L_{\sigma(k)}[y(k) - \hat{y}(k)] &= \\ (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})e_x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k), k) + \\ H_{1\sigma(k)}\delta_1(k) - L_{\sigma(k)}H_{2\sigma(k)}\delta_2(k). \end{aligned} \quad (11)$$

同时, 将控制器 (10) 代入硅单晶生长 Markov 跳变系统 (7), 可得到

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \\ A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + f_{\sigma(k)}(x(k), k) + \\ H_{1\sigma(k)}\delta_1(k) &= \\ (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x(k) - B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}e_x(k) + \\ f_{\sigma(k)}(x(k), k) + H_{1\sigma(k)}\delta_1(k). \end{aligned} \quad (12)$$

结合式 (11) 和 (12), 构成基于 Markov 跳变过程的闭

环离散时间硅单晶生长系统如下所示:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \bar{A}_{\sigma(k)}\bar{x}(k) + \bar{H}_{\sigma(k)}\bar{\delta}(k) + \bar{f}_{\sigma(k)}(x(k), k), \\ z(k) &= \bar{C}_{z\sigma(k)}\bar{x}(k) + \bar{D}_{\sigma(k)}\bar{\delta}(k). \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ e_x(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta}(k) = \begin{bmatrix} \delta_1(k) \\ \delta_2(k) \\ \delta_3(k) \end{bmatrix}, \\ \bar{f}_{\sigma(k)}(x(k), k) &= \begin{bmatrix} f_{\sigma(k)}(x(k), k) \\ f_{\sigma(k)}(x(k), k) \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{\sigma(k)} &= \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} & -B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \\ 0 & A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} \end{bmatrix}, \\ \bar{H}_{\sigma(k)} &= \begin{bmatrix} H_{1\sigma(k)} & 0 & 0 \\ H_{1\sigma(k)} & -L_{\sigma(k)}H_{2\sigma(k)} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_{z\sigma(k)} &= [C_{z\sigma(k)} \quad 0], \quad \bar{D}_{\sigma(k)} = [0 \quad 0 \quad H_{3\sigma(k)}]. \end{aligned}$$

注3 切换过程 $\sigma(k)$ 也表示 Markov 跳变模态,其含义为在时间间隔 $(k-\tau, k]$ $(0 < \tau \leq k)$ 内系统保持在第 $\sigma(k)$ 个模态.不失一般性,在本文后续描述中将用 i 表示系统在时间间隔 $0 < \tau \leq k$ 内系统保持在第 $\sigma(k)$ 个模态,即 $\sigma(k) = i (i \in S)$. $A_{\sigma(k)}$, $B_{\sigma(k)}$, $C_{\sigma(k)}$ 等模态相关矩阵将用 A_i , B_i , C_i 等表示.

注4 在本文中, Markov 模态被视为由系统运行机制、调度指令或模式切换信号所驱动,并可作为外部可获取信息用于控制器与观测器的同步设计.该类模态并不依赖系统状态的测量,其引入方式与随机跳变系统中常见的模态依赖建模框架相一致.

假设1 非线性函数 $f_i(x(k), k)$ 满足 Lipschitz 条件^[29],即:

- 1) $f_i(0, k) = 0, i \in S$;
- 2) $\|f_i(x_1(k), k) - f_i(x_2(k), k)\| \leq U_i \|x_1(k) - x_2(k)\|$.

针对系统状态不完全可测且存在外界干扰的离散时间硅单晶生长系统(7),本文构造状态观测器(9)和控制器(10),旨在保证基于 Markov 跳变过程的闭环离散时间硅单晶生长系统(13)满足以下控制性能^[30].

定义1 考虑基于 Markov 跳变过程的闭环离散时间硅单晶生长系统(13),给定时间常数 $N \in \mathbb{Z}_{k \geq 0}$,若存在标量 $0 < c_1 < c_2$, H_∞ 性能指标 $\gamma > 0$ 和矩阵 $R_i (i \in S)$,且干扰满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\delta}^T(k)\bar{\delta}(k) \leq d (d \in \mathbb{R} > 0)$,使得以下两个条件成立:

- 1) 系统(13)状态满足有限时间有界条件,即 $\bar{x}^T(0)R_i\bar{x}(0) \leq c_1 \Rightarrow \bar{x}^T(k)R_i\bar{x}(k) < c_2$,
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$. (14)

- 2) 系统(13)控制输出 $z(k)$ 在零初始条件下满足

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^N z^T(k)z(k)\right\} \leq \gamma^2 \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^N \bar{\delta}^T(k)\bar{\delta}(k)\right\}. \quad (15)$$

则表明 Markov 跳变离散时间硅单晶生长闭环系统(13)关于 $(c_1, c_2, R_i, N, \gamma, d)$ 有限时间有界且具有 H_∞ 性能.

引理1^[31] 假设矩阵 X, Y 具有适当维数,则存在 $\alpha > 0$,使得以下不等式成立:

$$X^T Y + Y^T X \leq \alpha X^T X + \alpha^{-1} Y^T Y.$$

引理2^[32](Schur 补引理) 对于给定的对称矩阵不等式 $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} < 0$,等价于以下不等式条件:

- 1) $X_{11} < 0, X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} < 0$;
- 2) $X_{22} < 0, X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T < 0$.

2 稳定性分析

定理1 对于给定标量参数 $0 < c_1 < c_2, \mu \geq 1, \gamma > 0$ 和矩阵 $R_i > 0 (i \in S)$,若存在正定对称矩阵 $P_i (i \in S)$ 和标量 $\eta_1 < \eta_2, \alpha_{1i}, \alpha_{2i} (i \in S)$,使得以下不等式条件成立:

$$\begin{bmatrix} -\mu P_i + \Pi_{1i} & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I + \Pi_{2i} & * & * \\ L_{1i} & L_{2i} & -W^{-1} & * \\ \bar{C}_{zi} & \bar{D}_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\eta_2 c_1 + \gamma^2 \mu^{-N} d < \mu^{-N} \eta_1 c_2, \quad (17)$$

$$\eta_1 R_i < P_i < \eta_2 R_i. \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_{1i} &= \eta_2 R_i E^T U_i^T U_i E + \alpha_{1i} \eta_2^2 R_i^2 E^T U_i^T U_i E + \\ &\quad \alpha_{1i}^{-1} \bar{A}_i^T \bar{A}_i + \alpha_{2i} \eta_2^2 R_i^2 E^T U_i^T U_i E, \\ \Pi_{2i} &= \alpha_{2i}^{-1} \bar{H}_i^T \bar{H}_i, \quad W = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_s\}, \\ L_{1i}^T &= [\sqrt{\pi_{i1}} \bar{A}_i^T, \sqrt{\pi_{i2}} \bar{A}_i^T, \dots, \sqrt{\pi_{is}} \bar{A}_i^T], \\ L_{2i}^T &= [\sqrt{\pi_{i1}} \bar{H}_i^T, \sqrt{\pi_{i2}} \bar{H}_i^T, \dots, \sqrt{\pi_{is}} \bar{H}_i^T], \end{aligned}$$

则基于 Markov 跳变过程的闭环离散时间硅单晶生长系统(13)关于 $(c_1, c_2, R_i, N, \gamma, d)$ 有限时间有界且具有 H_∞ 性能.

证明 选择 Lyapunov 函数为

$$V(k) = V(\bar{x}(k), \sigma(k) = i) = \bar{x}^T(k) P_i \bar{x}(k), \quad (19)$$

且有 $\bar{P}_i = \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j$,则

$$\mathbb{E}\{V(k+1)\} =$$

$$\bar{x}^T(k+1) \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \bar{x}(k+1) =$$

$$\bar{x}^T(k) \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{A}_i \bar{x}(k) + \bar{x}^T(k) \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{H}_i \bar{\delta}(k) +$$

$$\bar{x}^T(k) \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{f}_i(x(k), k) + \bar{\delta}^T(k) \bar{H}_i^T \bar{P}_i \bar{A}_i \bar{x}(k) +$$

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T\bar{P}_i\bar{H}_i\bar{\delta}(k) + \bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T\bar{P}_i\bar{f}_i(x(k),k) + \\ & \bar{f}_i^T(x(k),k)\bar{P}_i\bar{A}_i\bar{x}(k) + \bar{f}_i^T(x(k),k)\bar{P}_i\bar{H}_i\bar{\delta}(k) + \\ & \bar{f}_i^T(x(k),k)\bar{P}_i\bar{f}_i(x(k),k). \end{aligned} \quad (20)$$

设 $\eta_1 R_i < P_i < \eta_2 R_i$, $E = [I, 0]$, 且由引理 1 和假设 1 可知, 存在标量 α_{1i} , α_{2i} 使得

$$\begin{aligned} & 2\bar{x}^T(k)\bar{A}_i^T\bar{P}_i\bar{f}_i(x(k),k) \leq \\ & \alpha_{1i}\eta_2^2 R_i^2 \bar{x}^T(k)E^T U_i^T U_i E \bar{x}(k) + \\ & \alpha_{1i}^{-1} \bar{x}^T(k)\bar{A}_i^T \bar{A}_i \bar{x}(k), \\ & 2\bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T\bar{P}_i\bar{f}_i(x(k),k) \leq \\ & \alpha_{2i}\eta_2^2 R_i^2 \bar{x}^T(k)E^T U_i^T U_i E \bar{x}(k) + \\ & \alpha_{2i}^{-1} \bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T \bar{H}_i \bar{\delta}(k), \\ & \bar{f}_i^T(x(k),k)\bar{P}_i\bar{f}_i(x(k),k) < \\ & \eta_2 R_i \bar{x}^T(k)E^T U_i^T U_i E \bar{x}(k). \end{aligned}$$

由此, 不等式 (20) 可变换为

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{V(k+1)\} = \\ & \bar{x}^T(k+1) \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \bar{x}(k+1) = \\ & [\bar{A}_i \bar{x}(k) + \bar{H}_i \bar{\delta}(k) + \bar{f}_i(x(k),k)]^T \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \times \\ & [\bar{A}_i \bar{x}(k) + \bar{H}_i \bar{\delta}(k) + \bar{f}_i(x(k),k)] \leq \\ & \bar{x}^T(k)\bar{A}_i^T\bar{P}_i\bar{A}_i\bar{x}(k) + \bar{x}^T(k)\bar{A}_i^T\bar{P}_i\bar{H}_i\bar{\delta}(k) + \\ & \bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T\bar{P}_i\bar{A}_i\bar{x}(k) + \bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T\bar{P}_i\bar{H}_i\bar{\delta}(k) + \\ & \alpha_{1i}^{-1} \bar{x}^T(k)\bar{A}_i^T \bar{A}_i \bar{x} + \alpha_{1i}\eta_2^2 R_i^2 \bar{x}^T E^T U_i^T U_i E \bar{x}(k) + \\ & \alpha_{2i}^{-1} \bar{\delta}^T(k)\bar{H}_i^T \bar{H}_i \bar{\delta} + \alpha_{2i}\eta_2^2 R_i^2 \bar{x}^T E^T U_i^T U_i E \bar{x}(k) + \\ & \eta_2 R_i \bar{x}^T E^T U_i^T U_i E \bar{x}(k) = \\ & \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{\delta}(k) \end{bmatrix}^T \{ [L_{1i} \ L_{2i}]^T W [L_{1i} \ L_{2i}] + \Pi_i \} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{\delta}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} & W = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_2\}, \\ & L_{1i}^T = [\sqrt{\pi_{i1}}\bar{A}_i^T, \sqrt{\pi_{i2}}\bar{A}_i^T, \dots, \sqrt{\pi_{is}}\bar{A}_i^T], \\ & L_{2i}^T = [\sqrt{\pi_{i1}}\bar{H}_i^T, \sqrt{\pi_{i2}}\bar{H}_i^T, \dots, \sqrt{\pi_{is}}\bar{H}_i^T], \\ & \Pi_i = \begin{bmatrix} \Pi_{1i} & \\ & \Pi_{2i} \end{bmatrix}, \Pi_{2i} = \alpha_{2i}^{-1} \bar{H}_i^T \bar{H}_i, \\ & \Pi_{1i} = \eta_2 R_i E^T U_i^T U_i E + \alpha_{1i}\eta_2^2 R_i^2 E^T U_i^T U_i E + \\ & \alpha_{1i}^{-1} \bar{A}_i^T \bar{A}_i + \alpha_{2i}\eta_2^2 R_i^2 E^T U_i^T U_i E. \end{aligned}$$

首先, 为了证明在零初始条件下闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 具有 H_∞ 性能指标, 定义如下性能指标:

$$\begin{aligned} & J(\bar{x}(k), \bar{\delta}(k), \sigma(k) = i) = \\ & \mathbb{E}\{V(k+1)\} - \mu V(k) + z^T(k)z(k) - \\ & \gamma^2 \mu^{-N} \bar{\delta}^T(k)\bar{\delta}(k), \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\gamma > 0$ 为性能指标. 结合不等式 (21) 和 (13), 对

式 (22) 进行计算, 可得到

$$\begin{aligned} & J(\bar{x}(k), \bar{\delta}(k), \sigma(k) = i) = \\ & \mathbb{E}\{V(k+1)\} - \mu V(k) + z^T(k)z(k) - \\ & \gamma^2 \mu^{-N} \bar{\delta}^T(k)\bar{\delta}(k) = \\ & \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{\delta}(k) \end{bmatrix}^T \Omega_i \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{\delta}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} & \Omega_i = \left\{ \begin{bmatrix} L_{1i} & L_{2i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W & * \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{1i} & L_{2i} \\ \bar{C}_{zi} & \bar{D}_i \end{bmatrix} + \Pi_i' \right\}, \\ & \Pi_i' = \begin{bmatrix} -\mu P_i + \Pi_{1i} & * \\ 0 & -\gamma^2 \mu^{-N} I + \Pi_{2i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由引理 2, 对条件 (16) 进行变换, 可得到 $\Omega_i < 0$, 即

$$J(\bar{x}(k), \bar{\delta}(k), \sigma(k) = i) < 0. \quad (23)$$

由不等式 (22) 和 (23), 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{V(k+1)\} < \mu \mathbb{E}\{V(k)\} - \mathbb{E}\{z^T(k)z(k)\} + \\ & \gamma^2 \mu^{-N} \mathbb{E}\{\bar{\delta}^T(k)\bar{\delta}(k)\}. \end{aligned} \quad (24)$$

对不等式 (24) 进行递归计算, 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{V(k)\} < \\ & \mu^k \mathbb{E}\{V(0)\} - \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} z^T(j)z(j) \right\} + \\ & \gamma^2 \mu^{-N} \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} \bar{\delta}^T(j)\bar{\delta}(j) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

注意到, 在零初始条件下有 $V(k) \geq 0 (k \in \mathbb{Z}_{k \geq 0})$, 则由不等式 (25), 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} z^T(j)z(j) \right\} < \\ & \gamma^2 \mu^{-N} \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j-1} \bar{\delta}^T(j)\bar{\delta}(j) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

同时, 根据 $\mu \geq 0$, 对不等式 (26) 进行变换, 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^N z^T(j)z(j) \right\} \leq \\ & \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^N \mu^{N-j} z^T(j)z(j) \right\} < \\ & \gamma^2 \mu^{-N} \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^N \mu^{N-1} \bar{\delta}^T(j)\bar{\delta}(j) \right\} \leq \\ & \gamma^2 \mathbb{E}\left\{ \sum_{j=0}^N \bar{\delta}^T(j)\bar{\delta}(j) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

至此, 已验证硅单晶生长闭环系统 (13) 具有 H_∞ 性能. 同时, 由引理 2 和不等式条件 (16), 可得到

$$[L_{1i} \ L_{2i}]^T W [L_{1i} \ L_{2i}] + \Pi_i' < 0. \quad (28)$$

结合式 (21) 和 (28), 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{V(k+1)\} < \\ & \mu \bar{x}^T(k) P_i \bar{x}(k) + \mu^{-N} \gamma^2 \bar{\delta}^T(k) \bar{\delta}(k) < \\ & \mu \mathbb{E}\{V(k)\} + \mu^{-N} \gamma^2 \bar{\delta}^T(k) \bar{\delta}(k). \end{aligned} \quad (29)$$

由于外部干扰 $\delta_i(k) (i = \{1, 2, 3\})$ 均为能量有界干扰, 即满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\delta}^T(k) \bar{\delta}(k) \leq d$, 对不等式 (29) 进行递归计算, 可得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{V(k)\} < \\ & \mu^k \mathbb{E}\{V(0)\} + \mu^{-N} \gamma^2 \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-1-j} \delta^T(j) \delta(j)\right\} < \\ & \mu^k \mathbb{E}\{V(0)\} + \mu^{-N} \gamma^2 \mu^k d. \end{aligned} \quad (30)$$

已知不等式条件 (18), 且闭环系统状态满足有限时间初始条件 $E\{\bar{x}^T(0) R_i \bar{x}(0)\} \leq c_1$, 则可推导出

$$\mathbb{E}\{V(0)\} = \mathbb{E}\{\bar{x}^T(0) P_i \bar{x}(0)\} \leq \eta_2 c_1, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(k)\} &= \mathbb{E}\{\bar{x}^T(k) P_i \bar{x}(k)\} \geq \\ & \eta_1 \mathbb{E}\{\bar{x}^T(k) R_i \bar{x}(k)\}. \end{aligned} \quad (32)$$

由不等式 (31) 和 (32), 可得到

$$\mathbb{E}\{\bar{x}^T(k) R_i \bar{x}(k)\} < \frac{\mu^k \eta_2 c_1 + \gamma^2 \mu^{-N} \mu^k d}{\eta_1} < c_2.$$

令 $\eta_2 c_1 + \gamma^2 \mu^{-N} d < \mu^{-N} \eta_1 c_2$, 即不等式条件 (17), 则可保证 $E\{\bar{x}^T(k) R_i \bar{x}(k)\} < c_2 (k \in \{1, 2, \dots, N\})$, 从而验证了闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 有限时间有界. \square

注 5 上述推导过程主要分两部分完成对定理 1 的验证. 首先, 验证了闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 具有 H_∞ 性能; 然后, 完成对闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 关于 $(c_1, c_2, R_i, N, \gamma, d)$ 有限时间有界的验证; 同时, 给出了相应的充分条件, 但是, 由于所给定的充分条件中存在非线性, 导致难以求解控制器以及观测器增益, 下文第 3 节将针对定理 1 中的充分条件进行进一步处理.

3 控制器及观测器设计

针对定理 1 所给定的不等式条件中存在非线性项的问题, 本节将利用 LMI 变换技术对其进行线性化处理. 由下文定理 2 给出能够利用 LMI 技术求解出控制器以及观测器增益并保证闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 关于 $(c_1, c_2, R_i, N, \gamma, d)$ 有限时间有界且具有 H_∞ 性能的线性不等式条件.

定理 2 考虑存在干扰 $\delta_i (i \in \{1, 2, 3\})$, 且系统状态 $x(k)$ 不完全可测的闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13), 设计观测器 (9) 和控制器 (10),

对于给定标量参数 $0 < c_1 < c_2, \mu \geq 1, \gamma > 0, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i} (i \in S)$ 以及矩阵 $Q_i (i \in S)$, 若存在标量参数 $\phi_1, \phi_2, \alpha_{1i}, \alpha_{2i} (i \in S)$ 以及正定对称矩阵 $X_{1i}, Y_i (i \in S)$, 使得以下线性不等式条件成立:

$$\begin{bmatrix} -\mu X_i'' & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ \tilde{A}'' & \tilde{H}' & \tilde{X}'' & * & * & * & * \\ \tilde{C}_{zi}''' & \bar{D}_i & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{U}''' & 0 & 0 & 0 & \Phi' & * & * \\ \hat{A}_i'' & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{3i} & * \\ 0 & \bar{H}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2i} I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \mu^{-N} \phi_1 d - \mu^{-N} c_2 & \phi_1 \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_1} & -\phi_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$\phi_2 Q_i < X_i < \phi_1 Q_i. \quad (35)$$

其中

$$X_i'' = \begin{bmatrix} Y_i & -Y_i \\ -Y_i & X_{1i} \end{bmatrix}; \tilde{A}'' = [\tilde{A}_1''^T, \tilde{A}_2''^T, \dots, \tilde{A}_s''^T]^T;$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1'' &= \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i \bar{K}_i & \rightarrow \\ 0 & \rightarrow \\ \leftarrow & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i - L_i C_i (X_{1i} - Y_i) \\ & & 0 \end{bmatrix}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_s'' &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i \bar{K}_i & \rightarrow \\ 0 & \rightarrow \\ \leftarrow & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i - L_i C_i (X_{1i} - Y_i) \\ & & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_1' = \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} 0 & L_i H_{2i} & 0 \\ -H_{1i} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \tilde{H}_s' &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} 0 & L_i H_{2i} & 0 \\ -H_{1i} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\tilde{X}'' = \text{diag}\{\tilde{X}_1'', \tilde{X}_2'', \dots, \tilde{X}_s''\};$$

$$\tilde{X}_1'' = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & X_{11} \end{bmatrix}, \dots, \tilde{X}_s'' = \begin{bmatrix} Y_s & -Y_s \\ -Y_s & X_{1s} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{U}'''^T = [\tilde{U}_i'''^T \quad \bar{U}_i'''^T \quad \bar{U}_i'''^T], \quad \bar{U}_i'''^T = [U_i Y_i \quad -U_i X_{1i}];$$

$$\tilde{C}''' = [C_{zi} Y_i \quad -C_{zi} X_{1i}]; \quad \Phi = \text{diag}\{-\phi_2 Q_i, T_{1i}, T_{2i}\};$$

$$\bar{H}_i'' = \begin{bmatrix} H_{1i} & 0 & 0 \\ H_{1i} & -L_i H_{2i} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{D}_i = [0 \quad 0 \quad H_{3i}];$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_i'' &= \\ & \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i \bar{K}_i & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i - L_i C_i (X_{1i} - Y_i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$T_{3i} = \begin{bmatrix} -\alpha_{1i}I & \alpha_{1i}I \\ \alpha_{1i}I & -\alpha_{1i}I \end{bmatrix};$$

$T_{1i} = 2\varepsilon_{1i}\phi_2Q_i + \varepsilon_{1i}^2\alpha_{1i}Q_i$, $T_{2i} = 2\varepsilon_{2i}\phi_2Q_i + \varepsilon_{2i}^2\alpha_{2i}Q_i$. 则控制器以及状态观测器增益为 $K_i = \bar{K}_iY_i^{-1}$, L_i , 且能够保证闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 关于 $(c_1, c_2, R_i, N, \gamma, d)$ 有限时间有界且具有 H_∞ 性能.

证明 设 $X_i = P_i^{-1}$, 并对定理 1 中不等式条件 (16) 左右两边同时乘以块对角矩阵 $\text{diag}\{X_i, I, I, I\}$, 可得到

$$\begin{bmatrix} -\mu X_i + X_i \Pi_{1i} X_i & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I + \Pi_{2i} \\ L_{1i} X_i & L_{2i} \\ \bar{C}_{zi} X_i & \bar{D}_i \\ * & * \\ * & * \\ -W^{-1} & * \\ 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (36)$$

由引理 2, 将式 (36) 对角线上元素展开到非对角线上, 可得到

$$\begin{bmatrix} -\mu X_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ L_{1i} X_i & L_{2i} & -W^{-1} & * & * & * & * \\ \bar{C}_{zi} X_i & \bar{D}_i & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{U} & 0 & 0 & 0 & \Phi & * & * \\ \bar{A}_i X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{1i} I & * \\ 0 & \bar{H}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2i} I \end{bmatrix} < 0. \quad (37)$$

其中: $\tilde{U} = [(U_i E X_i)^T \quad (U_i E X_i)^T \quad (U_i E X_i)^T]^T$, $\Phi = \text{diag}\{-\eta_2^{-1} R_i^{-1}, -\alpha_{1i}^{-1} \eta_2^{-2} R_i^{-2}, -\alpha_{2i}^{-1} \eta_2^{-2} R_i^{-2}\}$. 由引理 1, 且令 $\phi_2 = \eta_2^{-1}$, $Q_i = R_i^{-1}$, 则不等式 (37) 可保证如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\mu X_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ L_{1i} X_i & L_{2i} & -W^{-1} & * & * & * & * \\ \bar{C}_{zi} X_i & \bar{D}_i & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{U} & 0 & 0 & 0 & \Phi' & * & * \\ \bar{A}_i X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{1i} I & * \\ 0 & \bar{H}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2i} I \end{bmatrix} < 0. \quad (38)$$

这里: $\Phi' = \{-\phi_2 Q_i, T_{1i}, T_{2i}\}$, $T_{1i} = 2\varepsilon_{1i}\phi_2Q_i + \varepsilon_{1i}^2\alpha_{1i}Q_i$, $T_{2i} = 2\varepsilon_{2i}\phi_2Q_i + \varepsilon_{2i}^2\alpha_{2i}Q_i$. 接下来, 定义正定对称矩阵 X_i 为 $X_i = \begin{bmatrix} X_{1i} & X_{2i} \\ X_{2i} & X_{2i} \end{bmatrix}$ ($i \in S$), 并根据闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 矩阵参数, 对不等式 (38) 进行展开, 可得到

$$\begin{bmatrix} -\mu X_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ \tilde{A} & \tilde{H} & \tilde{X} & * & * & * & * \\ \tilde{C}_{zi} & \bar{D}_i & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{U}' & 0 & 0 & 0 & \Phi' & * & * \\ \hat{A}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{1i} I & * \\ 0 & \bar{H}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2i} I \end{bmatrix} < 0. \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= [\tilde{A}_1^T, \tilde{A}_2^T, \dots, \tilde{A}_s^T]^T; \quad \tilde{H} = [\tilde{H}_1^T, \tilde{H}_2^T, \dots, \tilde{H}_s^T]^T; \\ \tilde{A}_1 &= \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} A_i X_{1i} + B_i K_i (X_{1i} - X_{2i}) \\ A_i X_{2i} - L_i C_i X_{2i} \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\leftarrow \begin{bmatrix} A_i X_{2i} \\ A_i X_{2i} - L_i C_i X_{2i} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \tilde{A}_s &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} A_i X_{1i} + B_i K_i (X_{1i} - X_{2i}) \\ A_i X_{2i} - L_i C_i X_{2i} \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\leftarrow \begin{bmatrix} A_i X_{2i} \\ A_i X_{2i} - L_i C_i X_{2i} \end{bmatrix}; \\ \tilde{H}_1 &= \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} H_{1i} & 0 & 0 \\ H_{1i} & -L_i H_{2i} & 0 \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \tilde{H}_s &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} H_{1i} & 0 & 0 \\ H_{1i} & -L_i H_{2i} & 0 \end{bmatrix}; \\ \tilde{X} &= \text{diag}\{-X_1, -X_2, \dots, -X_s\}; \\ \tilde{C}_{zi} &= [C_{zi} X_{1i} \quad C_{zi} X_{2i}]; \\ \hat{A}_i &= \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} A_i X_{1i} + B_i K_i (X_{1i} - X_{2i}) & A_i X_{2i} \\ A_i X_{2i} - L_i C_i X_{2i} & A_i X_{2i} - L_i C_i X_{2i} \end{bmatrix};$
 $\tilde{U}'^T = [\bar{U}_i'^T \quad \bar{U}_i'^T \quad \bar{U}_i'^T]^T$, $\bar{U}_i'^T = [U_i X_{1i} \quad U_i X_{2i}]$.
 定义 $J = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, 并对式 (39) 左右两边同时乘以块对角矩阵 $\text{diag}\{J, I, \underbrace{J, \dots, J}_s, I, I, \dots, I, \underbrace{J, I}_3\}$, 可得到

$$\begin{bmatrix} -\mu X'_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ \tilde{A}' & \tilde{H}' & \tilde{X}' & * & * & * & * \\ \tilde{C}'_{zi} & \bar{D}_i & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{U}'' & 0 & 0 & 0 & \Phi' & * & * \\ \hat{A}'_i & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{3i} & * \\ 0 & \bar{H}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2i} I \end{bmatrix} < 0. \quad (40)$$

这里

$$\tilde{X}' = \text{diag}\{-X'_1, -X'_2, \dots, -X'_s\};$$

$$\begin{aligned}
 X'_i &= \begin{bmatrix} X_{1i} - X_{2i} & -(X_{1i} - X_{2i}) \\ -(X_{1i} - X_{2i}) & X_{1i} \end{bmatrix}, \quad i \in S; \\
 \tilde{A}' &= [\tilde{A}'_1, \tilde{A}'_2, \dots, \tilde{A}'_s]^T; \quad \tilde{H}' = [\tilde{H}'_1, \tilde{H}'_2, \dots, \tilde{H}'_s]^T; \\
 \tilde{A}'_1 &= \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} (A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) & \rightarrow \\ -(A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) & \leftarrow \\ & -(A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) - L_i C_i X_{2i} \\ & -A_i X_{1i} - B_i K_i (X_{1i} - X_{2i}) \end{bmatrix}, \\
 &\vdots \\
 \tilde{A}'_s &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} (A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) & \rightarrow \\ -(A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) & \leftarrow \\ & -(A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) - L_i C_i X_{2i} \\ & -A_i X_{1i} - B_i K_i (X_{1i} - X_{2i}) \end{bmatrix}; \\
 \tilde{H}'_1 &= \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} 0 & L_i H_{2i} & 0 \\ -H_{1i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 &\vdots \\
 \tilde{H}'_s &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} 0 & L_i H_{2i} & 0 \\ -H_{1i} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 \tilde{C}''_{zi} &= [C_{zi}(X_{1i} - X_{2i}) \quad -C_{zi} X_{1i}]; \\
 \tilde{U}'' &= [\bar{U}_i''^T \quad \bar{U}_i''^T \quad \bar{U}_i''^T]^T, \\
 \bar{U}_i''^T &= [U_i(X_{1i} - X_{2i}) \quad -U_i X_{1i}]^T; \\
 \hat{A}'_i &= \begin{bmatrix} (A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) & \rightarrow \\ -(A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) & \leftarrow \\ & -(A_i + B_i K_i)(X_{1i} - X_{2i}) - L_i C_i X_{2i} \\ & -A_i X_{1i} - B_i K_i (X_{1i} - X_{2i}) \end{bmatrix}; \\
 T_{3i} &= \begin{bmatrix} -2\alpha_{1i} I & \alpha_{1i} I \\ \alpha_{1i} I & -\alpha_{1i} I \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

令 $Y_i = (X_{1i} - X_{2i}) > 0, X_{2i} = X_{1i} - Y_i$, 且 $\bar{K}_i = K_i Y_i$, 则可将不等式 (40) 变换为

$$\begin{bmatrix} -\mu X''_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mu^{-N} \gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ \tilde{A}'' & \tilde{H}'' & \tilde{X}'' & * & * & * & * \\ \tilde{C}''_{zi} & \bar{D}_i & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{U}''' & 0 & 0 & 0 & \Phi' & * & * \\ \hat{A}'_i & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{3i} & * \\ 0 & \bar{H}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2i} I \end{bmatrix} < 0. \tag{41}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}'' &= \text{diag}\{-X''_1, -X''_2, \dots, -X''_s\}; \\
 X'_i &= \begin{bmatrix} Y_i & -Y_i \\ -Y_i & X_{1i} \end{bmatrix}, \quad i \in S; \\
 \tilde{A}'' &= [\tilde{A}''_1, \tilde{A}''_2, \dots, \tilde{A}''_s]^T; \\
 \tilde{A}''_1 &= \sqrt{\pi_{i1}} \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i \bar{K}_i & \rightarrow \\ -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i & \leftarrow \\ & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i - L_i C_i (X_{1i} - Y_i) \\ & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 \tilde{A}''_s &= \sqrt{\pi_{is}} \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i \bar{K}_i & \rightarrow \\ -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i & \leftarrow \\ & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i - L_i C_i (X_{1i} - Y_i) \\ & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i \end{bmatrix}; \\
 \tilde{C}''_{zi} &= [C_{zi} Y_i \quad -C_{zi} X_{1i}]; \\
 \tilde{U}''' &= [\bar{U}_i'''^T \quad \bar{U}_i'''^T \quad \bar{U}_i'''^T]^T, \\
 \bar{U}_i'''^T &= [U_i Y_i \quad -U_i X_{1i}]^T; \\
 \hat{A}''_i &= \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i \bar{K}_i & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i - L_i C_i (X_{1i} - Y_i) \\ -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i & -A_i Y_i - B_i \bar{K}_i \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

另一方面, 已知 $\phi_2 = \eta_2^{-1}$, 且由引理 2, 对不等式条件 (17) 进行变换, 可得到

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \mu^{-N} d - \mu^{-N} \eta_1 c_2 & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_1} & -\phi_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{42}$$

令 $\phi_1 = \eta_1^{-1}$, 且对式 (42) 左乘 $\text{diag}\{\phi_1, I\}$, 可得到

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \mu^{-N} \phi_1 d - \mu^{-N} c_2 & \phi_1 \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_1} & -\phi_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{43}$$

此外, 已知 $X_i = P_i^{-1}$ 和 $Q_i = R_i$, 则对不等式条件 (18) 进行变换, 可得到

$$\phi_2 Q_i < X_i < \phi_1 Q_i. \tag{44}$$

通过上述推导过程已完成对定理 2 的证明, 给出了能够保证闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统 (13) 关于 $(c_1, c_2, R_i, N, \gamma, d)$ 有限时间有界且具有 H_∞ 性能的线性不等式条件. 需要注意的是, 为方便求解, 状态观测器增益提前由极点配置确定, 在此基础上, 利用 Matlab 中 LMI 工具箱进行求解, 即

$$\begin{aligned}
 t_{\min} &< 0; \\
 \text{s.t. 式(33) } &\sim \text{式(35)}. \tag{45}
 \end{aligned}$$

定理 2 得证. \square

注 6 本文研究的技术难点主要体现在以下 3 个方面: 首先, 所考虑系统包含 Markov 随机跳变过程, 且研究目标为有限时间内的稳定性控制, 不同于传统的渐近稳定性分析, 需要在有限区间内构造适当的 Lyapunov 函数并确保系统状态保持有界; 其次, 外部扰动与状态不可测同时存在, 必须设计具备动态估计能力的观测器, 并在控制器设计中实现与之协调匹配; 最后, 有限时间有界性、 H_∞ 性能指标、输出反馈结构以及观测器增益需要统一嵌入同一 LMI 框架, 通过等价变换和耦合项分离来保证条件的可行性. 基于此, 本文的核心在于构建一种可在随机切换环境下同时实现扰动抑制、状态估计和控制

性能保障的统一设计方法.

4 数值仿真

本节将以直拉硅单晶生长系统为对象验证所提出控制方法的有效性. 考虑具有三模态的 Markov 跳变离散时间硅单晶生长系统模型 (7), 参考文献 [27] 所提供的模型参数并对其离散化, 具体参数如下.

模式 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9485 & 0.3998 \\ 0.0000 & 1.2711 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.0696 & 0.1973 \\ 0.0000 & 0.1367 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, C_{z1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, H_{21} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{31} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

模式 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.9468 & 0.4325 \\ 0.0000 & 1.2730 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.0712 & 0.1221 \\ 0.0000 & 0.1372 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, C_{z2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, H_{32} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

模式 3:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.9459 & 0.4696 \\ 0.0000 & 1.2752 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.0724 & 0.0803 \\ 0.0000 & 0.1378 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, C_{z3} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$H_{13} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, H_{23} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{33} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

该系统其他给定参数选取如下: 有限时间区间长度 $N = 100$, Lyapunov 衰减加权系数 $\mu = 1$, 有限时间有界上下界常数 $c_1 = 2, c_2 = 10$, 干扰能量界限 $d = 10$, H_∞ 性能指标 $\gamma^2 = 0.8$, LMI 严格性小正数 $\varepsilon_{1i} = \varepsilon_{2i} = 0.01$, Lyapunov 权矩阵 $Q_i = 6I (i \in S)$. 同时, 选取 Markov 跳变转移概率矩阵为

$$\text{Pr} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

此外, 设置外界能量有界干扰为 $\delta_1 = 6e^{-k} \sin(k), \delta_2 = 7e^{-k} \sin(k), \delta_3 = 8e^{-k} \cos(k)$, 用于模拟热场波动和传感器噪声等综合影响, 非线性项为 $f_i(x(k), k) = 0.3x \sin(x) (i \in S)$, 用于表示模型中具有 Lipschitz 特性的非线性动力学, 系统初始状态为 $x(0) = [0.5 \ 0.8]^T$. 根据定理 2 所给出的线性不等式条件, 利用 LMI 技术求解相应增益和参数, 如下所示.

模式 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -17.1489 & 23.6733 \\ -0.4070 & -10.3720 \end{bmatrix}, \alpha_{11} = 6.4598,$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.1485 & 0.1999 \\ 0.0000 & 0.6856 \end{bmatrix}, \alpha_{21} = 0.7356.$$

模式 2:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -18.5835 & 12.2076 \\ 0.5421 & -10.7437 \end{bmatrix}, \alpha_{12} = 0.6097,$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1.1468 & 0.2163 \\ 0.0000 & 0.6865 \end{bmatrix}, \alpha_{22} = 0.5176.$$

模式 3:

$$K_3 = \begin{bmatrix} -15.9530 & 5.0378 \\ 0.5150 & -10.3533 \end{bmatrix}, \alpha_{13} = 0.7532,$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1.1459 & 0.2348 \\ 0.0000 & 0.6876 \end{bmatrix}, \alpha_{23} = 0.7386,$$

$$\phi_1 = 0.5452, \phi_2 = 0.0389.$$

硅单晶生长 Markov 跳变系统及其控制仿真结果如图 1 ~ 图 4 所示. 图 1 为基于转移概率矩阵 (46) 得到的模式切换过程, 反映了系统在不同工作模式间的随机转换特性, 为后续状态估计和控制性能分析提供了基础. 图 2 和图 3 为系统状态 $x(k)$ 与其估计值 $\hat{x}(k)$ 随时间的变化趋势, 其中带有 MI 下标的曲线表示采用固定控制器增益的结果. 图 2 和图 3 结果表明, 在初始时刻系统状态受到外界干扰影响而出现明显波动, 但是, 随着控制和观测机制的作用, 状态逐渐趋于稳定. 同时, $\hat{x}(k)$ 能够在整个过程中准确跟踪 $x(k)$, 两者间的误差迅速减小并在有限时间内维持在较小范围内. 这表明所设计观测器 (9) 具有良好的状态重构能力, 能够在外界干扰存在的情况下保证系统满足有限时间有界条件 (14), 从而验证了系统在外部干扰下的稳定性和鲁棒性. 相比之下, 固定增益控制器的系统状态收敛速度略慢, 且在扰动作用下表现出较小幅度的滞后.

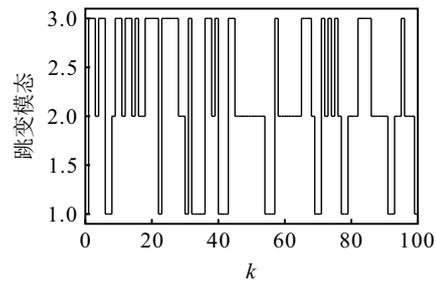
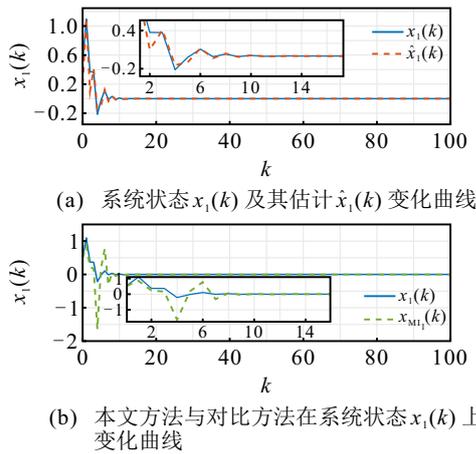
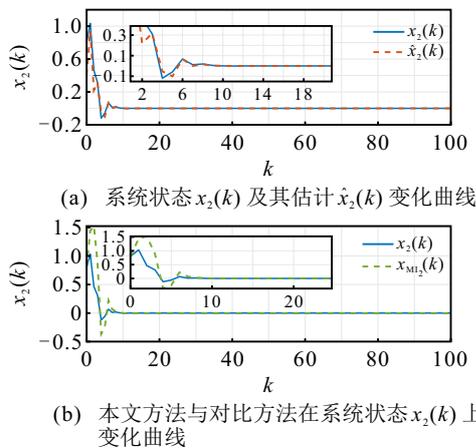
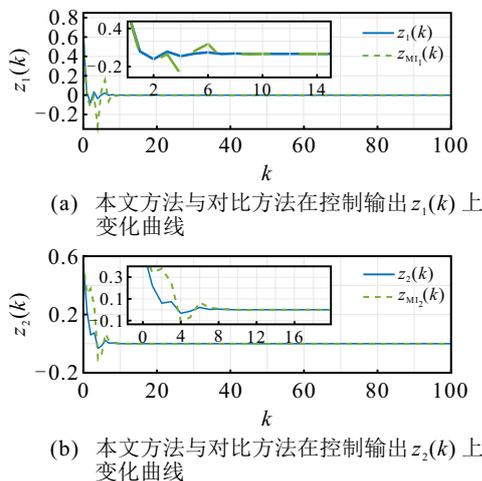


图1 Markov 模态跳变过程

图 4 为控制输出 $z(k)$ 的动态响应曲线, 其中 $z_{MI}(k)$ 为固定控制器增益下的输出结果. 由图 4 可见, 在控制器 (10) 的调节下, $z(k)$ 始终保持在合理范围内并呈现逐渐收敛的趋势, 明显优于固定增益控制器的响应性能. 即便在外部干扰作用下, 系统输出依然能够满足 H_∞ 性能条件 (15), 充分表明了所提出控制器在提升系统抗干扰能力和动态性能方面的有效性. 通过上述分析, 针对系统状态不完全可测且存

图2 系统状态 $x_1(k)$ 的响应对比及其估计 $\hat{x}_1(k)$ 变化曲线图3 系统状态 $x_2(k)$ 的响应对比及其估计 $\hat{x}_2(k)$ 变化曲线图4 本文方法与对比方法在控制输出 $z(k)$ 上变化曲线

在外界干扰的离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统, 在所提出观测器 (9) 和控制器 (10) 联合设计策略的作用下能够在有限时间内保证系统运行的有界性且实现了 H_∞ 性能指标, 改善了控制响应的收敛速度和鲁棒性. 上述仿真结果与理论分析一致, 验证了所提出方法的有效性.

5 结论

本文以直拉硅单晶生长系统为对象, 研究了关

于有限时间有界以及具有 H_∞ 性能的控制问题. 首先, 将 Markov 跳变过程引入了硅单晶生长模型中建立离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统; 然后, 针对系统状态不完全可测以及系统存在外界干扰的问题构造了状态观测器和控制器; 接着, 利用极点配置及 LMI 技术求解出观测器和控制器增益, 并保证闭环离散时间硅单晶生长 Markov 跳变系统有限时间有界且具有 H_∞ 性能; 最后, 利用硅单晶生长系统模型参数验证了所提出控制方法的有效性.

参考文献 (References)

- [1] Zheng Z C, Seto T, Kim S, et al. A first-principle model of 300 mm Czochralski single-crystal Si production process for predicting crystal radius and crystal growth rate[J]. *Journal of Crystal Growth*, 2018, 492: 105-113.
- [2] Liu X, Gao B, Kakimoto K. Numerical investigation of carbon contamination during the melting process of Czochralski silicon crystal growth[J]. *Journal of Crystal Growth*, 2015, 417: 58-64.
- [3] Nguyen T H T, Chen J C, Hu C, et al. Numerical simulation of heat and mass transfer during Czochralski silicon crystal growth under the application of crystal-crucible counter- and iso-rotations[J]. *Journal of Crystal Growth*, 2019, 507: 50-57.
- [4] Zhao W H, Liu L J. Control of heat transfer in continuous-feeding Czochralski-silicon crystal growth with a water-cooled jacket[J]. *Journal of Crystal Growth*, 2017, 458: 31-36.
- [5] 刘丁, 赵小国, 赵跃. 直拉硅单晶生长过程建模与控制研究综述[J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(1): 1-12. (Liu D, Zhao X G, Zhao Y. Review on modeling and control of Czochralski silicon single crystal growth process[J]. *Control Theory and Application*, 2017, 34(1): 1-12.)
- [6] Ren J C, Liu D, Wan Y. Modeling and application of Czochralski silicon single crystal growth process using hybrid model of data-driven and mechanism-based methodologies[J]. *Journal of Process Control*, 2021, 104: 74-85.
- [7] Ren J C, Liu D, Wan Y. Model-free adaptive iterative learning control method for the czochralski silicon monocrystalline batch process[J]. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 2021, 34(3): 398-407.
- [8] Li Y K, Ren B, Liu D. Model predictive control of event triggering in silicon single crystal growth processes[C]. *China Automation Congress*. Xiamen, 2022: 4817-4822.
- [9] Liu D, Zhang N, Jiang L, et al. Nonlinear generalized predictive control of the crystal diameter in CZ-Si crystal growth process based on stacked sparse autoencoder[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(3): 1132-1139.
- [10] Wan Y, Liu D, Liu C C, et al. Data-driven model predictive control of cz silicon single crystal growth process with V/G value soft measurement model[J]. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 2021, 34(3): 420-428.
- [11] 余涛, 王锐豪, 任乘乘, 等. 衰减网络下 Markov 跳变系

- 统的通信协议和控制器协同设计[J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2701-2713.
(Yu T, Wang R H, Ren C C, et al. Co-design of communication protocol and controller for Markov jump systems under fading networks[J]. Control and Decision, 2025, 40(9): 2701-2713.)
- [12] Li X H, Zhang W D, Lu D K. Stability and stabilization analysis of Markovian jump systems with generally bounded transition probabilities[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(13): 8416-8434.
- [13] 闫晶晶, 张梦宇, 马运亮. 具有带宽约束和不可靠通信信道的 Markov 跳变系统的混合事件/时间驱动 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3681-3689.
(Yan J J, Zhang M Y, Ma Y L. Mixed event/time-triggered H_∞ control for Markov jump systems with bandwidth constraints and unreliable communication channels[J]. Control and Decision, 2024, 39(11): 3681-3689.)
- [14] Qi W H, Zong G D, Karimi H R. Sliding mode control for nonlinear stochastic singular semi-Markov jump systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(1): 361-368.
- [15] Wang Y Y, Ahn C K, Yan H C, et al. Fuzzy control and filtering for nonlinear singularly perturbed Markov jump systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(1): 297-308.
- [16] 周绍伟, 陈兵. 离散随机 Markov 跳跃系统有限时间有界控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(12): 2285-2290.
(Zhou S W, Chen B. Finite time bounded control for discrete stochastic Markov jump systems[J]. Control and Decision, 2017, 32(12): 2285-2290.)
- [17] Wang F, Chen B, Sun Y M, et al. Finite-time fuzzy control of stochastic nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(6): 2617-2626.
- [18] 李丽, 卢延荣, 于晓. 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计[J]. 控制与决策, 2021, 36(9): 2074-2084.
(Li L, Lu Y R, Yu X. Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty[J]. Control and Decision, 2021, 36(9): 2074-2084.)
- [19] Fu C, Zhang C H, Zhang G G, et al. Disturbance observer-based finite-time control for three-phase AC-DC converter[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(6): 5637-5647.
- [20] Qi W H, Gao M, Ahn C K, et al. Quantized fuzzy finite-time control for nonlinear semi-Markov switching systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(11): 2622-2626.
- [21] Zong G D, Ren H L, Karimi H R. Event-triggered communication and annular finite-time H_∞ filtering for networked switched systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(1): 309-317.
- [22] Gao X B, Ren H R, Deng F Q, et al. Observer-based finite-time H_∞ control for uncertain discrete-time nonhomogeneous Markov jump systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(4): 1730-1749.
- [23] 李小华, 包海强, 刘辉. 未知初始跟踪条件的非线性系统预设性能有限时间有界 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(7): 2215-2223.
(Li X H, Bao H Q, Liu H. Finite-time bounded H_∞ control with prescribed performance for nonlinear systems with unknown initial tracking conditions[J]. Control and Decision, 2024, 39(7): 2215-2223.)
- [24] 李艳恺, 陈晨, 刘丁, 等. 离散时间 Markov 跳变系统动态输出反馈有限时间 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2025, 40(2): 617-625.
(Li Y K, Chen C, Liu D, et al. Dynamic output feedback finite-time H_∞ control for discrete-time Markov jump system[J]. Control and Decision, 2025, 40(2): 617-625.)
- [25] Wang R H, Li F P, Fei S M. Finite-time H_∞ control of discrete-time switched systems based on transferring-dependent Lyapunov function approach[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2023, 45(6): 1052-1068.
- [26] Li Y K, Liu D, Li D P, et al. Multisource disturbances rejection control for linear systems with unmeasured states under process and measurement disturbances[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, 361(6): 106737.
- [27] Li Y K, Chen C, Liu D, et al. Anti-disturbance switching control for silicon single crystal growth systems under unmeasured states[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, 55(10): 4865-4877.
- [28] Yang W, Dong J X. Observer-based adaptive consensus for lipschitz nonlinear multiagent systems via asynchronous event-triggered strategy[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, 22: 2734-2745.
- [29] Zong G D, Li Y K, Sun H B. Composite anti-disturbance resilient control for Markovian jump nonlinear systems with general uncertain transition rate[J]. *Science China Information Sciences*, 2019, 62(2): 22205.
- [30] Wang J M, Ma S P, Zhang C H. Finite-time H_∞ control for T-S fuzzy descriptor semi-Markov jump systems via static output feedback[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, 365: 60-80.
- [31] Li Y K, Chen M, Li T, et al. Robust resilient control based on multi-approximator for the uncertain turbofan system with unmeasured states and disturbances[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(10): 6040-6049.
- [32] Zhang Y Q, Liu C X. Observer-based finite-time H_∞ control of discrete-time Markovian jump systems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(6): 3748-3760.

作者简介

李艳恺 (1987-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为 Markov 跳变控制系统、复合抗干扰控制, E-mail: liyankai@xaut.edu.cn;

陈晨 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为 Markov 跳变系统、抗干扰控制、硅单晶生长, E-mail: chenc2436@126.com;

刘丁 (1957-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为硅单晶生长设备、过程控制与核心工艺, E-mail: liud@xaut.edu.cn.