

# 控制与决策

Control and Decision

## 监控过程变异系数双侧自适应EWMA控制图的优化设计

贡平邨, 郭宝才

引用本文:

贡平邨, 郭宝才. 监控过程变异系数双侧自适应EWMA控制图的优化设计[J]. *控制与决策*, 2026, 41(3): 692–706.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0817>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

##### [基于随机系数回归模型的退化过程及维修策略](#)

Degradation process and maintenance planning based on random coefficient regression model

*控制与决策*. 2021, 36(3): 754–760 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1087>

##### [基于预防维护的单机调度问题](#)

[Single-machine scheduling problem with preventative maintenance activities](#)

*控制与决策*. 2021, 36(2): 395–402 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0626>

##### [基于互信息操作变量曲线参数化的间歇过程批内修正优化](#)

Intra-batch correction optimization of batch process with manipulated variable trajectory parameterization based on mutual information

*控制与决策*. 2021, 36(1): 234–240 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0825>

##### [基于改进多目标优化算法的分布式数据中心负载调度](#)

Multi-objective optimization of energy and performance management in distributed data centers

*控制与决策*. 2021, 36(1): 159–165 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0702>

##### [改进型灰狼算法在热电偶动态补偿中的应用](#)

Application of improved grey wolf algorithm in dynamic compensation of thermocouple

*控制与决策*. 2021, 36(1): 61–67 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0688>

# 监控过程变异系数双侧自适应 EWMA 控制图的优化设计

贡平邨<sup>1</sup>, 郭宝才<sup>2,3,4,5†</sup>

1. 淮北师范大学 数学与统计学院, 安徽 淮北 235000;
2. 浙江工商大学 经济运行态势预警与模拟推演实验室, 杭州 310018;
3. 浙江工商大学 统计与数据科学学院, 杭州 310018;
4. 浙江工商大学 统计数据工程技术与应用协同创新中心, 杭州 310018;
5. 浙江工商大学 共同富裕统计监测与智能治理实验室, 杭州 310018)

**摘要:** 传统控制图常常假定受控过程均值和方差恒定. 然而, 在实际生产或研究场景中, 这一假设往往难以成立. 如病人体内血液化学成分的含量会随着时间的推移而发生变化, 当其均值和方差随时间漂移时, 漂移方向和大小常常未知. 面对这样的复杂情况, 传统控制图由于自身的局限性, 无法对实际过程实施有效监控. 鉴于此, 提出一种改进方案: 首先, 对变异系数平方进行对数正态变换; 然后, 设计双侧自适应 EWMA (AEWMA) 控制图监控变异系数; 接着, 讨论参数对所提出控制图的影响, 并与已有控制图的失控性能进行比较. 比较结果显示, 所提出的控制图仅优于部分已有控制图. 为提升过程检测能力, 将变样本容量 (VSS) 融入控制图设计, 提出 VSS AEWMA 控制图. 与已有控制图的比较结果表明, 所提出 VSS AEWMA 控制图在监控变异系数时综合性能最优, 能够有效识别过程异常.

**关键词:** 统计过程控制; 对数正态变换; 变异系数; 变样本容量; 自适应 EWMA; 优化设计

中图分类号: O213.1 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0817

引用格式: 贡平邨, 郭宝才. 监控过程变异系数双侧自适应 EWMA 控制图的优化设计 [J]. 控制与决策, 2026, 41(3): 692-706.

## Optimal design of two-sided adaptive EWMA control chart for monitoring coefficient of variation

GONG Ping-ye<sup>1</sup>, GUO Bao-cai<sup>2,3,4,5†</sup>

- (1. School of Mathematics and Statistics, Huaibei Normal University, Huaibei 235000, China; 2. Economic Forecasting and Policy Simulation Laboratory, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China;
3. School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China;
4. Collaborative Innovation Center of Statistical Data Engineering Technology & Application, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China; 5. Laboratory for Statistical Monitoring and Intelligent Governance of Common Prosperity, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Traditional control charts often assume that the mean and variance of an in-control process remain constant. However, in real-world production or research scenarios, this assumption is often difficult to satisfy. For example, the levels of blood chemical components in a patient's body may change over time. When their mean and variance have shifted over time, the direction and magnitude of shifts are often unknown. Faced with such complex situations, traditional control charts, due to their inherent limitations, fail to effectively monitor the actual process. To address these, the work applies a log-normal transformation to the square of the coefficient of variation, and designs a two-sided adaptive exponentially weighted moving average (AEWMA) control chart for monitoring the coefficient of variation. Subsequently, it investigates the effect of parameters on its performance and compares the out-of-control performance between the proposed and existing charts. Comparison results show that the proposed chart only outperforms some existing charts. To enhance detection capability of the proposed chart, the work introduces variable sample sizes (VSS)

收稿日期: 2025-08-05; 录用日期: 2025-10-29.

基金项目: 全国统计科学研究项目 (2025LY042); 浙江省登峰学科 (浙江工商大学统计学) 项目; 浙江省重点建设高校优势特色学科 (浙江工商大学统计学) 项目; 统计数据工程技术与应用协同创新中心项目.

责任编辑: 周平.

†通信作者. E-mail: [gbc78@163.com](mailto:gbc78@163.com).

本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

into the design of the chart, and proposes a VSS AEWMA chart for monitoring the efficient of variation, and compares its out-of-control performance with existing charts. The results demonstrate that the proposed VSS AEWMA chart achieves the best overall performance in monitoring the coefficient of variation and can effectively identify process abnormalities.

**Keywords:** statistical process control; log-normal transformation; coefficient of variation; variable sample size; adaptive EWMA; optimal design

## 0 引言

作为统计过程控制 (SPC) 体系中的核心监控工具, 控制图在工业生产、服务、医疗卫生和社交网络等多个领域<sup>[1-4]</sup> 被广泛应用, 主要用于实时监测过程稳定性、及时识别质量特性的异常漂移, 并持续提升关键质量指标的控制水平. 如 Shewhart 控制图<sup>[5]</sup>、累积和 (CUSUM)<sup>[6]</sup> 控制图<sup>[7]</sup> 以及指数加权移动平均 (EWMA) 控制图, 这些传统控制图早期被设计用于监控过程的均值或方差. 这里要求受控过程的均值或方差不变. 然而, 实际中存在一些受控过程, 其均值会随着时间变化而变化, 其方差也会随着均值变化而变化. 如医疗过程中病人血液中所含某化学成分量的均值会随着病人的不同而不同. 因此, 此情形下均值控制图将无法达到其监控目的. 由于方差是关于均值的函数, 传统方差控制图也同样如此. 对于此类过程, 学者们通常考虑使用监控变异系数的控制图.

监控过程变异系数的控制图首次由 Kang 等<sup>[8]</sup> 提出, 其所提出控制图为 Shewhart 控制图, 此控制图能够有效检测到过程中由异常起因引起变异系数发生的大漂移, 而对于中小漂移, 其监控能力较差; 为提高变异系数控制图的监控能力和更加有效监测过程的小漂移, Hong 等<sup>[9]</sup> 提出了用于监控过程变异系数的 EWMA 控制图. 以上控制图均为双侧控制图, 且其监控对象为变异系数自身. 2011 年, Castagliola 等<sup>[10]</sup> 指出在 SPC 中基于过程变异系数平方构建的控制图的监控能力比基于变异系数自身构建的表现更好. 对此, 他们基于变异系数平方提出了一种监控过程变异系数的单侧 EWMA 控制图. 在文中的数据分析中, 也证实了所提出控制图监控过程失控的性能表现优于 Kang 等<sup>[8]</sup> 与 Hong 等<sup>[9]</sup> 提出的控制图. 随后, 学者们又在此基础上做出了改进, 提出了 Shewhart 控制图与 EWMA 控制图相结合的组合控制图<sup>[11]</sup>, 新的 EWMA 控制图<sup>[12]</sup>, CUSUM 控制图<sup>[13]</sup> 以及广义加权移动平均 (GWMA) 控制图<sup>[14]</sup>, 混合 EWMA-CUSUM 控制图<sup>[15]</sup>, 排序集抽样下的 EWMA 控制图<sup>[16]</sup>, 两次 EWMA (DEWMA) 控制图<sup>[17]</sup> 等. 要对此类研究有更多的了解, 可参见综述文献 [18]. 以上关于 EWMA 控制图的设计均需要预先根据过程

漂移量指定光滑参数  $\lambda$  值. 较小的  $\lambda$  值对应的控制图善于监控过程小漂移, 较大的  $\lambda$  值对应的控制图善于监控过程大漂移. 然而, 在实际中, 过程的漂移量常常未知, 因而无法预先确定最优的  $\lambda$  值. 综上, 根据 Capizzi 等<sup>[19]</sup> 的设计思路, 基于变异系数平方设计监控变异系数的自适应 EWMA (AEWMA) 控制图更符合现实需要.

对于基于变异系数平方的单侧 EWMA 控制图设计, Castagliola 等<sup>[10]</sup> 和 Zhang 等<sup>[12]</sup> 在文中分别阐述了该种设计的原因:

1) 变异系数平方  $\gamma^2$  服从非对称分布. 若构建对称的上、下控制限, 则会导致上下两侧的受控平均链长 (ARL<sub>0</sub>, 是指当过程受控时, 从监控过程开始到控制图发出警报为止所收集或观测到的样本数) 不相等, 造成一侧控制限太高, 从而使得控制图检测过程失控能力变弱, 另一侧控制限太低使得控制图频繁发出伪警报.

2) 在实际中, 从业人员往往更感兴趣的是过程变异系数向上漂移 (增加) 的情形.

3) 单侧 EWMA 控制图能够有效克服光滑参数较小时传统 EWMA 控制图所伴随的“惯性”问题. 据此, 后人又提出一些高效监控变异系数的单侧 EWMA 控制图, 如 Haq 等<sup>[20]</sup> 和 Hu 等<sup>[17]</sup> 等.

然而, 在实际中, 过程变动的方向常常未知, 且变异系数向下漂移 (变小) 幅度较大时也会导致生产成本投入过多, 影响企业效益<sup>[21]</sup>. 因此, 基于变异系数平方设计监控过程变异系数的双侧控制图更具实际意义. Castagliola 等<sup>[22]</sup> 对样本变异系数进行对数正态变换, 提出了一种监控过程变异系数的双侧 Shewhart 控制图; 随后, Noor-ul-Amin 等<sup>[23]</sup> 对此进行了扩展, 提出了不同抽样方法下的双侧 EWMA 控制图用于监控过程变异系数. 但是, 此种设计存在传统 EWMA 控制图所伴随的“惯性”问题. 受 Castagliola 等<sup>[22]</sup> 的启发, 本文考虑利用样本变异系数平方的对数正态变换设计一种监控过程变异系数的双侧 AEWMA 控制图.

为提高控制图对过程进行有效监控的能力, 学者们分别提出了监控过程变异系数的变样本容量 (VSS)、变抽样区间 (VSI) 或变样本容量和抽样区间

(VSSI) 下的控制图. 如: 在监控过程变异系数的控制图研究中, Castagliola 等<sup>[24]</sup>对 Kang 等<sup>[8]</sup>的研究进行了扩展, 提出了一种用于监控过程变异系数的双侧 VSI Shewhart 控制图; Jalilibal 等<sup>[18]</sup>先对样本变异系数进行了对数正态变换, 再基于此提出了一种监控过程变异系数的双侧 VSS Shewhart 控制图; Khaw 等<sup>[25]</sup>对 Kang 等<sup>[8]</sup>的研究进行了扩展, 提出了一种用于监控过程变异系数的双侧 VSSI Shewhart 控制图; 而在过程变异系数的控制图研究中, Yeong 等<sup>[26]</sup>和 Muhammad 等<sup>[27]</sup>对 Castagliola 等<sup>[10]</sup>的研究进行了扩展, 分别提出了过程变异系数的单侧 VSI EWMA 控制图和单侧 VSS EWMA 控制图, 他们在文中仅考虑了变异系数向上漂移的情形, 而忽略了变异系数向下漂移的情形, 是因为他们认为此类控制图在监控上没有竞争力. 为完善此类研究, 学者们提出了能够有效检测过程变异系数向上或向下漂移的单侧控制图, 如 Tran 等<sup>[28]</sup>、Yeong 等<sup>[29]</sup>、Hu 等<sup>[30]</sup>以及 Jalilibal 等<sup>[18]</sup>. 基于以上分析, 为提高所提出控制图的监控能力, 本文将 VSS 融入双侧 AEWMA 控制图设计, 提出一种监控过程变异系数的双侧 VSS AEWMA 控制图. 研究结果表明所提出控制图表现最优 (详见后文第 3 节).

## 1 预备知识

如引言所述, 本文主要是基于样本变异系数平方的对数正态变换来设计控制图. 因此, 在设计控制图之前, 本节将对变异系数相关理论做一番回顾. 首先, 介绍变异系数的概念与分布; 然后, 介绍样本变异系数平方的对数正态变换.

### 1.1 变异系数的概念与分布

设  $X$  为一随机变量, 且其均值和方差分别为  $E(X) = \mu$  和  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ , 则随机变量的标准差与均值的比值称为随机变量的变异系数, 记作  $\gamma = \sigma/\mu$ .

设  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  表示从正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  中随机抽取容量为  $n$  的样本. 若  $\bar{X}$  和  $S$  分别为关于  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的样本均值和样本标准差, 即

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

则  $S$  与  $\bar{X}$  的比率称为样本变异系数, 记作  $\hat{\gamma} = S/\bar{X}$ .  $\hat{\gamma}$  的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ . 很多学者对  $\hat{\gamma}$  的分布性质进行了研究, 其中 Iglewicz 等<sup>[31]</sup>指出  $\sqrt{n}/\hat{\gamma}$

服从自由度为  $n-1$  和非中心参数为  $\sqrt{n}/\gamma$  的非中心  $t$  分布. 基于此性质, 易得到  $\hat{\gamma}$  的分布函数  $F_{\hat{\gamma}}(x|n, \gamma)$ , 即

$$F_{\hat{\gamma}}(x|n, \gamma) = 1 - F_t\left(\frac{\sqrt{n}}{x} \mid n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right),$$

其中  $F_t(\cdot | n-1, \sqrt{n}/\gamma)$  表示自由度为  $n-1$  和非中心参数为  $\sqrt{n}/\gamma$  的非中心  $t$  分布的分布函数.

分布函数  $F_{\hat{\gamma}}(x|n, \gamma)$  的反函数为

$$F_{\hat{\gamma}}^{-1}(p|n, \gamma) = \frac{\sqrt{n}}{F_t^{-1}\left(1-p \mid n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right)},$$

其中  $F_t^{-1}(\cdot)$  为分布函数  $F_t(\cdot)$  的反函数.

由于  $\sqrt{n}/\hat{\gamma}$  服从自由度为  $n-1$  和非中心参数为  $\sqrt{n}/\gamma$  的非中心  $t$  分布, 易知  $n/\hat{\gamma}^2$  服从自由度为 1 和  $n-1$ , 非中心参数为  $n/\gamma^2$  的非中心  $F$  分布. 对此, 可推导出  $\hat{\gamma}^2$  的分布函数为

$$F_{\hat{\gamma}^2}(x|n, \gamma) = 1 - F_F\left(\frac{n}{x} \mid 1, n-1, \frac{n}{\gamma^2}\right),$$

其中  $F_F(\cdot | 1, n-1, n/\gamma^2)$  表示自由度为 1 和  $n-1$ , 非中心参数为  $n/\gamma^2$  的非中心  $F$  分布的分布函数.

分布函数  $F_{\hat{\gamma}^2}(x|n, \gamma)$  的反函数为

$$F_{\hat{\gamma}^2}^{-1}(p|n, \gamma) = \frac{n}{F_F^{-1}\left(1-p \mid n-1, \frac{n}{\gamma^2}\right)},$$

其中  $F_F^{-1}(\cdot)$  为分布函数  $F_F(\cdot)$  的反函数.

### 1.2 样本变异系数平方的对数正态变换

本文用样本变异系数平方的对数正态变换设计监控过程变异系数的双侧控制图. 因此, 本节介绍样本变异系数平方的对数正态变换.

设  $\mathbf{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tn})$  表示  $t$  时刻从正态总体  $N(\mu_t, \sigma_t^2)$  中随机抽取的一个容量为  $n$  的样本, 样本均值和样本标准差分别为

$$\bar{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ti},$$

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ti} - \bar{X}_t)^2}, \quad (1)$$

则  $t$  时刻的样本变异系数平方为

$$\hat{\gamma}_t^2 = \frac{S_t^2}{\bar{X}_t^2}. \quad (2)$$

对  $t$  时刻的变异系数平方  $\hat{\gamma}_t^2$  做对数正态变换, 有

$$T_t = a + b \ln(\hat{\gamma}_t^2 - c), \quad t \geq 1. \quad (3)$$

其中:  $a$ 、 $b$  和  $c$  为与  $n$  和  $\gamma_0$  有关, 且使得  $T_t$  近似服从标准正态分布  $N(0, 1)$  的参数. 注意, 这种定义统计量

$T_t$ 的思路来源于 Johnson<sup>[32]</sup>的研究, 即 $\hat{\gamma}_t^2$ 的分布可用定义在区间 $(c, +\infty)$ 上含有3个参数 $(a, b, c)$ 的对数正态分布近似. 若3个参数 $(a, b, c)$ 选择适当, 则所得到的 $T_t$ 将高度近似服从 $N(0, 1)$ . 对于 $T_t$ 中的3个参数 $(a, b, c)$ , 可利用 $\hat{\gamma}_t^2$ 的分布分位数求得.

令

$$\begin{aligned} x_\alpha &= F_{\hat{\gamma}_t^2}^{-1}(\alpha|n, \gamma_0), \\ x_{0.5} &= F_{\hat{\gamma}_t^2}^{-1}(0.5|n, \gamma_0), \\ x_{1-\alpha} &= F_{\hat{\gamma}_t^2}^{-1}(1-\alpha|n, \gamma_0) \end{aligned}$$

分别为 $\hat{\gamma}_t^2$ 分布的 $\alpha$ 分位数、中位数和 $1-\alpha$ 分位数. 若 $T_t$ 近似服从 $N(0, 1)$ , 则 $(a, b, c)$ 的值为

$$\begin{aligned} a &= -b \ln \left[ \frac{x_{0.5} - x_\alpha}{1 - \exp\left(\frac{F_N^{-1}(\alpha)}{b}\right)} \right], \\ b &= \frac{F_N^{-1}(\alpha)}{\ln\left(\frac{x_{0.5} - x_\alpha}{x_{1-\alpha} - x_{0.5}}\right)}, \\ c &= x_{0.5} - \exp\left(-\frac{a}{b}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $F_N^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布函数的反函数.

**注1** 这里 $a, b, c$ 仅与 $\alpha$ 有关. 对于 $\alpha$ 的选择, 这里也不存在最优选择. 在 SPC 领域中,  $\alpha$ 的取值一般由实际从业者决定. 按照 Castagliola 等<sup>[22]</sup>的建议,  $\alpha$ 的取值不能太小, 防止给 $\hat{\gamma}_t^2$ 的分布尾部赋予太多的权重, 一般令 $\alpha \geq 0.01$ ;  $\alpha$ 的取值也不能太大, 防止从 $\hat{\gamma}_t^2$ 的分布尾部获取太少的信息, 一般令 $\alpha \leq 0.1$ . 事实上,  $\alpha \in [0.01, 0.1]$ 对于最终结果有着微弱的影响.

## 2 控制图设计

本节将主要介绍监控过程变异系数的 AEWMA 控制图设计. 首先, 介绍固定样本容量情形下的 AEWMA 控制图, 记作 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图; 然后, 介绍 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的性能表现; 最后, 介绍变样本容量 (VSS) 下的 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 记作 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图.

### 2.1 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图设计

假设  $\mathbf{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tn})$  表示  $t$  时刻从正态总体  $N(\mu_t, \sigma_t^2)$  中随机抽取的一个容量为  $n$  的样本,  $t = 1, 2, \dots$ , 且样本组间和组内皆相互独立. 其均值  $\mu_t$  和方差  $\sigma_t^2$  随时间变化而变化. 当过程处于统计受控状态时,  $t$  时刻样本  $\mathbf{X}_t$  的均值  $\mu_t$  与标准差  $\sigma_t$  间满足如下关系:

$$\gamma_t = \frac{\sigma_t}{\mu_t} = \gamma_0. \quad (5)$$

其中:  $\gamma_0$  为过程受控时的变异系数值, 且为常数; 当

过程处于失控状态时,  $\gamma_t = \tau\gamma_0$ , 这里  $\tau(\tau > 0)$  为过程变异系数的漂移量.

对于任一样本  $\mathbf{X}_t$ , 提出假设检验如下:

$$\begin{aligned} H_0 &: \gamma_t = \gamma_0, \\ H_1 &: \gamma_t = \tau\gamma_0, \end{aligned}$$

则基于样本变异系数平方的对数正态变换,  $t$  时刻的 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的监控统计量为

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_{t-1} + \phi(e_t) = \\ &(1 - w(e_t))Z_{t-1} + w(e_t)T_t, \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $e_t = T_t - Z_{t-1}$  为预测误差,  $T_t$  如式 (1) 所示,  $\phi(e_t)$  为关于  $e_t$  的得分函数,  $w(e_t) = \phi(e_t)/e_t$  为关于  $e_t$  的权重函数. 令  $h$  为控制限, 若  $Z_t > h$ , 则称此时过程处于统计失控状态, 这里控制限  $h$  是在理想的  $ARL_0$  下, 利用二分法 (见后文算法 2) 搜索得到的.

**注2** 本文研究的是第 II 阶段过程, 且假定第 II 阶段受控变异系数已知, 或可由第 I 阶段受控数据精确估计得到. 值得注意的是, 实际中的变异系数常常未知且在第 I 阶段难以获得充足的受控样本进行精确估计, 因此, 需要考虑参数估计对 AEWMA- $\gamma^2$  控制图性能的影响, 但是这部分超出本文研究范围. 关于参数估计对控制图性能影响的更多详情可参见文献 [33-34].

对于权重函数  $w(e)$ , 常见 3 种类型: Huber 权重函数<sup>[35]</sup>, Tukey's bisquare 权重函数<sup>[36]</sup> 和 Jiang 权重函数<sup>[37]</sup>.

**类型 1** Huber 权重函数为

$$w_{\text{hub}}(e) = \begin{cases} 1 + \frac{(1-\lambda)k}{e}, & e < -k; \\ \lambda, & |e| \leq k; \\ 1 - \frac{(1-\lambda)k}{e}, & e > k. \end{cases}$$

**类型 2** Tukey's bisquare 权重函数如下所示:

$$w_{\text{bs}}(e) = \begin{cases} \left(1 - (1-\lambda)\left(1 - \left(\frac{e}{l}\right)^2\right)\right)^2, & |e| < l; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**类型 3** Jiang 权重函数为

$$w_{\text{com}}(e) = \begin{cases} \lambda, & |e| < k; \\ \left(1 - (1-\lambda)\left(1 - \left(\frac{e}{l}\right)^2\right)\right)^2, & k \leq |e| \leq l; \\ 1, & |e| > l. \end{cases}$$

**注3** 这里  $k, l$  和  $\lambda$  均为预先指定的参数, 且满足  $0 < \lambda \leq 1, 0 \leq k < l$ . 从这 3 种权重函数中可以发现, Jiang 权重函数是 Huber 权重函数和 Tukey's bisquare 权重函数的结合, 保证权重函数  $w_{\text{com}}(e)$  在点  $e = k$  和  $e = l$  上连续, 其中参数  $k$  与  $l$  间满足

$l = k\sqrt{1 + 1/\sqrt{\lambda}}$ . AEWMA 控制图<sup>[38]</sup>中, 3类权重函数中的 Huber 权重函数使用最多, 其原因是使用 Huber 权重函数设计出的控制图相对简单, 且 3类权重函数所设计出的控制图间表现性能也相差无几. 基于此, 本文考虑使用 Huber 权重函数来设计 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图.

学者们习惯使用平均链长 (ARL) 来衡量控制图的性能表现. 对于 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 本文使用  $ARL_0$  和失控平均链长 ( $ARL_1$ ) 来衡量.  $ARL_1$  是指当过程失控后, 从过程发生漂移 to 控制图发出警报为止所收集或观测到的样本数. 在统计过程控制的文献中,  $ARL_0$  值常常需要预先给定, 目的是确保控制图在过程处于受控状态下所能达到人们预想的性能表现; 而  $ARL_1$  的值是通过 Monte Carlo 模拟方法、Markov 链方法或积分方法计算得到, 其值越小, 在给定漂移下控制图检测过程失控的能力越强. 文中  $ARL_1$  值是通过 Markov 链方法计算得到, 如算法 1 所示.

**算法 1** ARL 的求法.

step 1: 将区间  $[-h, h]$  划分为  $d = 2m + 1$  个区间长度为  $2\delta$  的小区间 (如图 1 所示), 每个小区间的中点记为  $H_i (i = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m)$ , 其中  $\delta = h/d$ . 这里  $d$  越大, 得到的 ARL 值越精确. 若  $t$  时刻的监控统计量  $Z_t$  落在小区间  $[H_j - \delta, H_j + \delta]$ , 则称此刻  $Z_t$  处于瞬时状态  $j (j = -m, -m + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m)$ .

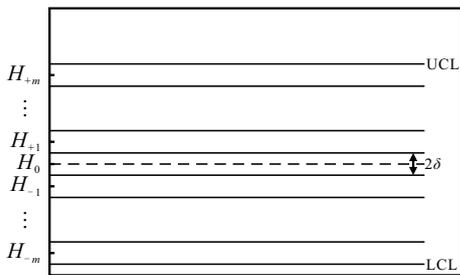


图1 区间  $[-h, h]$  的划分

step 2: 计算 Markov 链一步转移概率矩阵  $P$ . 令转移概率矩阵  $P$  为

$$P = \begin{bmatrix} R & \mathbf{1} - R\mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} P_{-m,-m} & P_{-m,2} & \dots & P_{-m,m} \\ P_{-m+1,-m} & P_{-m+1,-m+1} & \dots & P_{-m+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,-m} & P_{m,-m+1} & \dots & P_{m,m} \end{bmatrix}$$

为  $d$  阶一步转移概率矩阵;  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$  为  $d$  维 0 列向量;  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$  为  $d$  维单位列向量;  $P_{ij}$  为

从状态  $i$  一步转移至状态  $j$  的概率,  $i, j = -m, -m + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$ , 这里

$$P_{ij} = P(H_j - \delta < Z_t < H_j + \delta | Z_{t-1} = H_i) = P(H_j - \delta < Z_{t-1} + \phi(e_t) < H_j + \delta | Z_{t-1} = H_i) = P(H_j - H_i - \delta < \phi(e_t) < H_j - H_i + \delta) = P[H_i + \phi^{-1}(H_j - H_i - \delta) < T_i < H_i + \phi^{-1}(H_j - H_i + \delta)],$$

其中  $\phi^{-1}(\cdot)$  为  $\phi(\cdot)$  的反函数. 若令  $y_{1i} = H_i + \phi^{-1}(H_j - H_i - \delta)$  和  $y_{2i} = H_i + \phi^{-1}(H_j - H_i + \delta)$ , 则

$$P_{ij} = P\left[c + \exp\left(\frac{y_{1i} - a}{b}\right) < \hat{\gamma}_t^2 < c + \exp\left(\frac{y_{2i} - a}{b}\right)\right] = F_{\hat{\gamma}^2}\left(c + \exp\left(\frac{y_{2i} - a}{b}\right) \middle| n, \gamma_1\right) - F_{\hat{\gamma}^2}\left(c + \exp\left(\frac{y_{1i} - a}{b}\right) \middle| n, \gamma_1\right).$$

step 3: 计算 ARL. 令  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_d)$  为与  $d$  个转移状态有关的  $d + 1$  维概率列向量,  $L$  为过程达到吸收状态时的转移步长, 这里  $L$  为一含有参数  $(R, \mathbf{q})$  的离散型随机变量<sup>[39]</sup>. 在控制图的术语中, 它又被称为链长. 对于随机变量  $L$ , 其中心矩  $\mu_i(L) = E((L - E(L))^i | R, \mathbf{q})$  无法具体表出, 而其阶乘矩  $\nu_i(L) = E(L(L - 1) \dots (L - i + 1) | R, \mathbf{q})$  可具体表示为

$$\nu_i(L) = i! \mathbf{q}^T (\mathbf{I} - R)^{-i} R^{i-1} \mathbf{1}, \quad i \geq 1,$$

这里  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

由于  $ARL = E(L)$ , AEWMA- $\gamma^2$  控制图的平均链长为

$$ARL = \nu_1(L).$$

**算法 2** AEWMA- $\gamma^2$  控制图的控制限求法.

step 1: 给定样本容量  $n$ , 光滑参数  $\lambda$ , 区间划分个数  $d$  和控制限的搜索区间  $[h_1, h_2]$ .

step 2: 设定控制限初始值为  $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ , 固定目标值  $ARL_0$ . 本节选取  $ARL_0 = 370$ .

step 3: 利用 Markov 链方法 (见算法 1) 计算平均链长 ARL.

step 4: 更新控制限搜索区间. 若  $ARL < ARL_0$ , 则搜索区间的上界不变, 下界更新为  $h_1 = h_0$ ; 若  $ARL > ARL_0$ , 则下界不变, 上界更新为  $h_2 = h_0$ .

step 5: 重复 step 1 ~ step 4, 直至满足  $|ARL - ARL_0|/ARL_0 < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为一很小的正数, 如  $10^{-6}$ ) 时为止.

**2.2 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的性能表现**

本节将研究所提出 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的失控

性能表现. 如前文所述, AEWMA- $\gamma^2$ 控制图与分位数 $\alpha$ , 样本容量 $n$ , 参数 $k$ 和 $\lambda$ 有关, 因此, 本节首先讨论参数对 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图性能的影响; 然后, 受 Shu<sup>[38]</sup> 的启发, 本节讨论针对一定范围异常漂移的所提出 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的性能表现.

### 2.2.1 参数对 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的影响

1) 分位数 $\alpha$ 对 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的影响.

本节讨论所提出 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图中分位数 $\alpha$ 的选择, 分别计算出当 $\gamma_0 = 0.1$ ,  $n = 5$ ,  $k = 3$ 和 $\lambda = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ 时, 不同 $\alpha$ 取值下 AEWMA-

$\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值(如图2所示). 由图2可以发现:

① 当变异系数向下漂移( $\tau < 1$ )时, AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值会随着 $\alpha$ 的增加而增加, 但是趋势不显著. 如当 $\lambda = 0.1$ 和 $\tau = 0.8$ 时,  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为 24.08、25.21、25.83.

② 当变异系数向上漂移( $\tau > 1$ )时, AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值会随着 $\alpha$ 的增加而减少, 但是趋势不显著. 如当 $\lambda = 0.05$ 和 $\tau = 1.2$ 时,  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为 18.82、17.94、17.73.

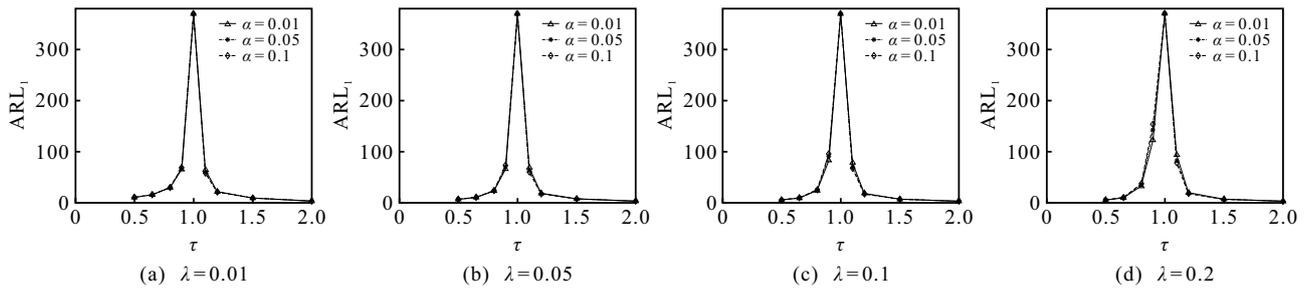


图2 当 $\gamma_0=0.1$ ,  $n = 5$ ,  $k = 3$ 和 $\lambda = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ 时, 不同 $\alpha$ 取值下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值

对于 $\gamma_0$ 、 $n$ 和 $k$ 的其他取值, 可得到类似结论. 限于篇幅, 不再一一列举. 综合考虑, 本文选取分位数 $\alpha = 0.05$ .

2)  $n$ 、 $k$ 和 $\lambda$ 对 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的影响.

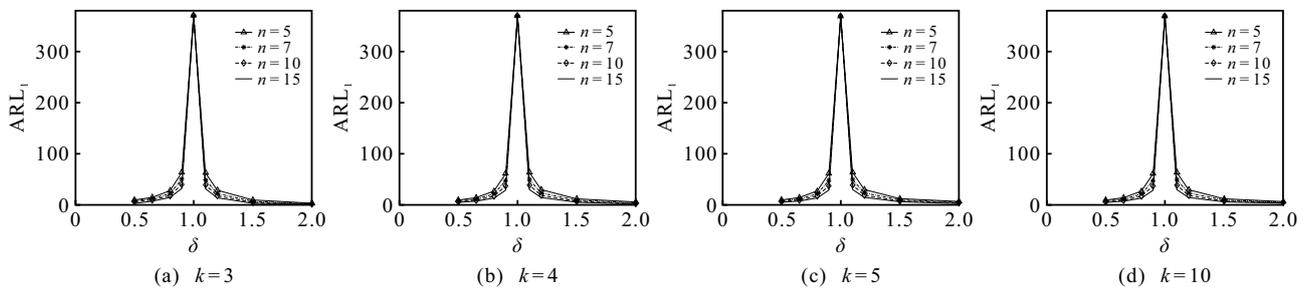


图3 当 $\gamma_0=0.1$ ,  $\lambda=0.01$ 和 $k = 3, 4, 5, 10$ 时, 不同 $n$ 值下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值

① 图3为当 $\gamma_0 = 0.1$ ,  $\lambda = 0.01$ 和 $k = 3, 4, 5, 10$ 时, 不同 $n$ 值下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值. 由图3可见, 固定 $k$ 、 $\lambda$ 和 $\tau$ , AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值会随着样本容量 $n$ 的增加而减小. 如: 当 $k = 3$ ,  $\lambda = 0.01$ 和 $\tau = 0.65$ 时,  $n = 5, 7, 10, 15$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为 14.88、12.16、9.97 和 7.51; 当 $k = 3$ ,  $\lambda = 0.01$ 和 $\tau = 1.5$ 时,  $n = 5, 7, 10, 15$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为 9.93、7.23、5.16 和 3.43.

② 图4为当 $\gamma_0 = 0.1$ ,  $n = 7$ 和 $\lambda = 0.01, 0.05$ 时, 不同 $k$ 值下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值. 由图4可见, 固定 $n$ 和 $\lambda$ : 当变异系数向下漂移( $\tau < 1$ )时, AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值会随着参数 $k$ 的增加而减小, 且当 $k \geq 4$ 时将保持不变. 如当 $n = 7$ ,  $\lambda$

本节分别讨论样本容量 $n$ , 参数 $k$ 和 $\lambda$ 对 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的影响, 分别给出当 $\gamma_0 = 0.1$ 时, 不同 $n$ 、 $k$ 和 $\lambda$ 取值下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的失控性能表现(如图3~图5所示).

$= 0.05$ 和 $\tau = 0.9$ 时,  $k = 3, 4, 5, 10$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为 50.30、48.56、48.56 和 48.56. 当变异系数向上漂移( $\tau > 1$ )时, AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值会随着参数 $k$ 的增加而增加, 且当 $k \geq 5$ 时将保持不变. 如当 $n = 7$ ,  $\lambda = 0.01$ 和 $\tau = 1.1$ 时,  $k = 3, 4, 5, 10$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为 46.84、47.08、47.10 和 47.10.

③ 图5为当 $\gamma_0 = 0.1$ ,  $n = 5$ ,  $k = 3, 4, 5, 10$ 时, 不同 $\lambda$ 值下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值. 由图5可见, 固定 $n$ 和 $k$ : 当变异系数向下漂移( $\tau < 1$ ), 且 $\tau$ 较大时, AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的 $ARL_1$ 值会随着光滑参数 $\lambda$ 的增加而增加. 如当 $k = 5$ ,  $n = 5$ 和 $\tau = 0.9$ 时,  $\lambda = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ 所对应的 $ARL_1$ 值分别为

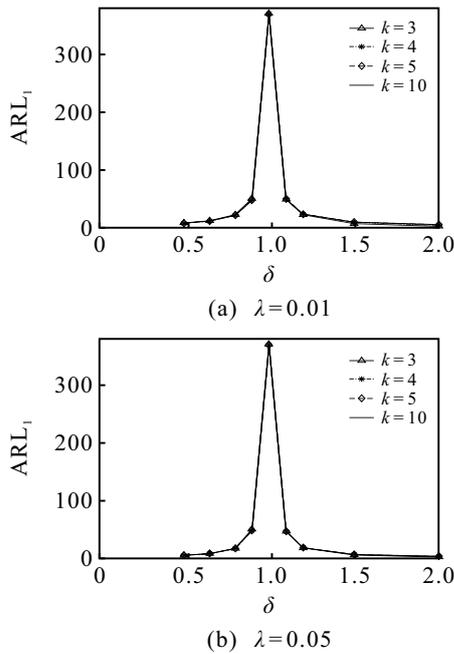


图4 当  $\gamma_0=0.1, n=7$  和  $\lambda=0.01, 0.05$  时, 不同  $k$  值下 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的  $ARL_1$  值

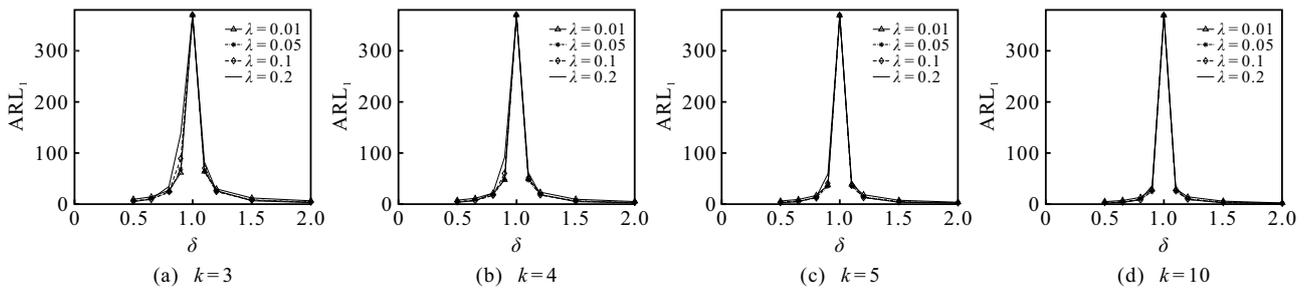


图5 当  $\gamma_0=0.1, n=5, k=3, 4, 5, 10$  时, 不同  $\lambda$  值下 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的  $ARL_1$  值

2.2.2 针对一定范围异常漂移的 AEWMA- $\gamma^2$  控制图性能表现

效仿 Shu<sup>[38]</sup> 的方法, 本节计算针对不同漂移区

61.39、68.27、89.15 和 138.56. 当变异系数向上漂移 ( $\tau > 1$ ), 且  $\tau$  较大时, AEWMA- $\gamma^2$  控制图的  $ARL_1$  值会随着光滑参数  $\lambda$  的增加而减小. 如当  $k=5, n=5$  和  $\tau=2$  时,  $\lambda=0.01, 0.05, 0.1, 0.2$  所对应的  $ARL_1$  值分别为 6.78、4.67、3.89 和 3.26.

对于其他  $\gamma_0$  的取值, 也可得到以上类似的结论. 限于篇幅, 不再赘述. 综上, 样本容量  $n$  越大, 所对应的 AEWMA- $\gamma^2$  控制图表现越优. 因此, 在实际应用中,  $n$  的取值可根据实际情况确定. 不同参数  $k$  的取值下 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的性能表现基本一致, 尤其是当  $k \geq 5$  时, 所对应 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的性能表现完全一致. 因此,  $k$  可取大于 5 的任意值. 光滑参数  $\lambda$  的取值越大, 所提出 AEWMA- $\gamma^2$  控制图检测过程发生大漂移的能力越强; 而  $\lambda$  取值越小, 所提出 AEWMA- $\gamma^2$  控制图检测过程发生小漂移的能力越强.

间的 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的最优参数 (如表 1 所示). 具体计算步骤如算法 3 所示.

算法 3 最优参数的求法.

表1 当漂移区间为 [1.1, 2] 和 [0.5, 0.9],  $\gamma_0=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, n=5, 7, 10, 15$  时, AEWMA- $\gamma^2$  控制图的最优参数

$n$	$\gamma_0$	[1.1, 2]			[0.5, 0.9]		
		$\lambda^*$	$k^*$	$h^*$	$\lambda^*$	$k^*$	$h^*$
5	0.05	0.0247	2.4758	0.3020	0.0169	4.8671	0.1897
	0.1	0.0245	2.4863	0.3005	0.0168	4.9063	0.1887
	0.15	0.0243	2.5047	0.2979	0.0166	5.2410	0.1871
	0.2	0.0239	2.5320	0.2943	0.0163	5.5067	0.1847
7	0.05	0.0332	2.6109	0.3407	0.0242	5.0112	0.2449
	0.1	0.0329	2.6203	0.3386	0.0240	5.3399	0.2431
	0.15	0.0324	2.6366	0.3351	0.0237	5.4085	0.2409
	0.2	0.0317	2.6606	0.3304	0.0233	5.6601	0.2379
10	0.05	0.0443	2.7612	0.3964	0.0342	4.9835	0.3101
	0.1	0.0439	2.7701	0.3936	0.0340	5.4372	0.3079
	0.15	0.0431	2.7852	0.3891	0.0335	5.6331	0.3050
	0.2	0.0421	2.8074	0.3829	0.0328	5.9913	0.3011
15	0.05	0.0607	2.8616	0.4778	0.0494	3.0297	0.4075
	0.1	0.0600	2.8695	0.4743	0.0489	3.0371	0.4051
	0.15	0.0589	2.8828	0.4684	0.0482	3.0497	0.4013
	0.2	0.0574	2.9019	0.4605	0.0472	3.0679	0.3961

step 1: 设定预期的  $ARL_0$ , 样本容量  $n$ , 受控变异系数  $\gamma_0$ , 变异系数过程中的小漂移  $\tau_1$  和大漂移  $\tau_2$ .

step 2: 在给定  $ARL_0$  的约束下, 利用如下算法:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{(\lambda, k, h)} ARL_1(\lambda, k, h, \tau); \\ & \text{s.t. } ARL_0 = 370. \end{aligned}$$

求得小漂移  $\tau_1$  下 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的最优光滑参数  $\lambda^*$  以及最小  $ARL_1$  值, 即  $ARL_1(\lambda^*, k, h, \tau_1)$ .

step 3: 选取 step 2 中的最优  $\lambda^*$  作为 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的光滑参数, 搜索使得 AEWMA- $\gamma^2$  控制图在大漂移  $\tau_2$  下  $ARL_1$  最小的参数  $k^*$  和控制限  $h^*$ , 同时满足

$ARL_1(\lambda^*, k, h, \tau_1) \leq (1 - \beta)ARL_1(\lambda^*, k^*, h^*, \tau_1)$ , 其中常数  $\beta$  用于控制小漂移  $\tau_1$  下  $ARL_1$  的损失, 此处设定  $\beta = 0.05$ <sup>[19]</sup>.

由表 1 可以发现: 参数  $\lambda^*$  随着样本容量  $n$  的增加而减小, 而随着  $\gamma_0$  的增加而增加; 参数  $k^*$  随着样本容量  $n$  的增加而增加, 随着  $\gamma_0$  的增加而增加.

此外, 为便于下文的性能比较, 本节给出当漂移区间为 [1.1, 2] 和 [0.5, 0.9] 时, 不同漂移下所提出 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的  $ARL_1$  值 (如表 2 和表 3 所示). 限于篇幅, 其他漂移区间下的最优参数与相应的  $ARL_1$  值未一一列举.

表2 当漂移区间为 [1.1, 2],  $\gamma_0=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, n=5, 7, 10, 15$  时, 不同漂移值下 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的  $ARL_1$  值

$\tau$	$\gamma_0 = 0.05$				$\gamma_0 = 0.1$				$\gamma_0 = 0.15$				$\gamma_0 = 0.2$			
	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$
0.5	9.84	6.68	4.48	2.65	9.86	6.71	4.51	2.67	9.90	6.76	4.55	2.71	9.95	6.82	4.61	2.76
0.65	15.04	10.15	7.11	4.89	15.09	10.21	7.15	4.93	15.18	10.30	7.23	4.99	15.30	10.42	7.33	5.07
0.8	31.34	20.66	14.36	10.02	31.47	20.78	14.47	10.10	31.68	20.99	14.64	10.23	31.97	21.28	14.87	10.41
0.9	91.13	57.45	39.29	27.42	91.37	57.76	39.55	27.63	91.75	58.27	39.98	27.97	92.23	58.97	40.57	28.44
1.1	64.42	48.40	36.31	26.43	64.79	48.77	36.64	26.71	65.40	49.38	37.19	27.16	66.25	50.24	37.96	27.79
1.2	25.96	19.08	14.18	10.20	26.17	19.27	14.34	10.33	26.52	19.59	14.61	10.54	27.01	20.04	14.99	10.84
1.5	7.35	5.51	4.16	2.97	7.45	5.59	4.23	3.03	7.62	5.74	4.35	3.12	7.87	5.95	4.53	3.26
2	2.66	2.04	1.59	1.25	2.71	2.08	1.63	1.27	2.80	2.15	1.68	1.30	2.92	2.25	1.76	1.35

表3 当漂移区间为 [0.5, 0.9],  $\gamma_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, n = 5, 7, 10, 15$  时, 不同漂移值下 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的  $ARL_1$  值

$\tau$	$\gamma_0 = 0.05$				$\gamma_0 = 0.1$				$\gamma_0 = 0.15$				$\gamma_0 = 0.2$			
	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=15$
0.5	8.74	6.54	4.90	3.01	8.77	6.57	4.92	3.03	8.82	6.60	4.95	3.06	8.88	6.65	4.99	3.11
0.65	13.03	9.65	7.14	5.15	13.08	9.70	7.18	5.18	13.18	9.78	7.24	5.23	13.31	9.89	7.33	5.31
0.8	25.21	18.64	13.73	10.13	25.34	18.75	13.82	10.21	25.56	18.94	13.98	10.33	25.86	19.20	14.20	10.51
0.9	60.24	45.49	34.09	25.97	60.56	45.78	34.34	26.18	61.08	46.26	34.75	26.53	61.82	46.93	35.33	27.01
1.1	61.81	46.39	34.77	25.73	62.16	46.74	35.08	26.00	62.75	47.32	35.60	26.44	63.57	48.13	36.32	27.07
1.2	27.85	20.44	15.02	10.48	28.03	20.61	15.17	10.61	28.34	20.90	15.42	10.82	28.77	21.30	15.76	11.11
1.5	11.02	8.06	5.93	3.19	11.10	8.14	6.00	3.25	11.24	8.26	6.10	3.35	11.43	8.44	6.25	3.49
2	6.04	4.50	3.36	1.29	6.08	4.49	3.31	1.31	6.19	4.56	3.40	1.35	6.30	4.68	3.52	1.41

### 2.3 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图设计

第 2.1 节提出的 AEWMA- $\gamma^2$  控制图与已有控制图相比, 发现过程变异的能力较弱 (详见后文第 3 节). 为提高所提出控制图的过程监控能力, 本节研究含有两个样本容量  $n_S$  和  $n_L$  的 VSS-AEWMA- $\gamma^2$  控制图的设计, 其中  $n_S < n_L$ ,  $n_S$  和  $n_L$  分别为小样本容量和大样本容量. 为实施 VSS-AEWMA- $\gamma^2$  控制图, 本节考虑两种设计, 即一般设计和优化设计.

#### 2.3.1 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的一般设计

本文设置了上、下警戒限  $UWL = wh$  和  $LWL = -wh$ . 其中:  $h$  为控制限,  $w$  为警戒限因子. 具体实施过程如下:

1) 若当前监控统计量  $Z_t$  落在中心域  $[-wh, wh]$ , 则表明过程处于统计受控状态, 因而下一时刻使用小样本容量  $n_S$  抽样;

2) 若当前监控统计量  $Z_t$  落在警戒域  $[-h, -wh] \cup [wh, h]$ , 则表明过程仍然处于统计受控状态, 但是下一刻可能会失控, 因而下一时刻使用大样本容量  $n_L$  验证;

3) 若当前监控统计量  $Z_t$  落在区域  $(-\infty, -h] \cup [h, +\infty)$ , 则表明过程处于失控状态, 因而需要立即停止过程运行且检查其失控的起因.

对于 VSS-AEWMA- $\gamma^2$  控制图的失控性能表现, 本文使用  $ARL_1$  进行度量, 而  $ARL_1$  值仍然通过

Markov 链方法计算得到. 其计算方法与第 2.1 节的算法 1 基本相同. 唯一不同之处是一步转移概率  $P_{ij}$  的求法, 具体如下所示:

1) 当状态  $H_i \in [LWL + \delta, UWL - \delta]$  时, 样本容量  $n = n_S$ . 此时  $a, b, c$  是基于  $n_S$  求得的, 分别记为  $a_S, b_S, c_S$ , 一步转移概率为

$$P_{ij} = F_{\gamma^2} \left( c_S + \exp \left( \frac{y_2 - a_S}{b_S} \right) \middle| n_S, \gamma_1 \right) - F_{\gamma^2} \left( c_S + \exp \left( \frac{y_1 - a_S}{b_S} \right) \middle| n_S, \gamma_1 \right).$$

2) 当状态  $H_i \in (-\infty, LWL + \delta] \cup [UWL - \delta, +\infty)$  时, 样本容量  $n = n_L$ . 此时  $a, b, c$  是基于  $n_L$  求得的, 分别记为  $a_L, b_L, c_L$ , 一步转移概率为

$$P_{ij} = F_{\gamma^2} \left( c_L + \exp \left( \frac{y_2 - a_L}{b_L} \right) \middle| n_L, \gamma_1 \right) - F_{\gamma^2} \left( c_L + \exp \left( \frac{y_1 - a_L}{b_L} \right) \middle| n_L, \gamma_1 \right).$$

### 2.3.2 VSS-AEMWA- $\gamma^2$ 控制图的优化设计

从前文一般设计可知, VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图涉及多参数协同设计, 参数选择直接影响其监控效能. 针对这一关键问题, 本节聚焦 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的优化设计方法, 通过系统优化各参数组合, 深入探究其在不同变异系数漂移场景下的最优性能表现——最小平均链长  $ARL_1$ , 挖掘与该最优性能直接对应的关键参数最优解集 (包括小样本容量  $n_S^*$ , 大样本容量  $n_L^*$ , 光滑参数  $\lambda^*$ , 参数  $k^*$ , 预警线  $w^*$  以及控制限  $h^*$ ). 这一研究不仅为多参数控制图的参数配置提供了科学依据, 更通过量化最优参数组合, 显著提升了 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图发现实际变异系数漂移过程中异常的灵敏度和鲁棒性.

最优参数计算方法如下所示:

$$\begin{aligned} & (n_S^*, n_L^*, \lambda^*, k^*, w^*, h^*) = \\ & \arg \min_{(n_S, n_L, \lambda, k, w, h)} ARL_1(n_S, n_L, \lambda, k, w, h, \gamma_0, \tau); \\ & \text{s.t. } ARL_0 = 370, \\ & \quad ASS_0 = n. \end{aligned} \quad (7)$$

其中:  $n$  为固定样本容量, 可由从业人员预先指定;  $ASS_0$  为过程受控下平均样本容量. 对于平均样本容量 (ASS) 的计算, 可参见文献 [26-27].

本文利用 Matlab 中的 `fmincon` 函数计算出当  $\gamma_0 = 0.05, n = 5, 7, 10, 15$  时, 不同变异系数漂移下所提出 VSS-AEMWA- $\gamma^2$ 控制图的最优参数以及所对应的  $ARL_1$  (如表 4 所示). 此外, 同时计算其他  $\gamma_0$  值所对应的最优参数以及  $ARL_1$ . 限于篇幅, 不再赘述. 注意, 本文对于参数  $n_S$  和  $n_L$  做出与 Muhammad 等 [27] 和 Castagliola 等 [10] 等相同的限制, 即  $2 \leq n_S <$

$n$  和  $n < n_L \leq 31$ .

## 3 性能比较

本节主要是分别讨论在变异系数不同漂移下所提出 AEMWA- $\gamma^2$ 控制图与已有双侧变异系数控制图和已有单侧变异系数控制图间的性能比较. 前人均研究变异系数控制图在不同变异系数向上漂移下的最优性能表现, 即最小  $ARL_1$ , 因此, 本着公平、便于比较的原则, 本节考虑与 Kang 等 [8]、Castagliola 等 [10]、Zhang 等 [12]、Castagliola 等 [22] 和 Muhammad 等 [27] 分别提出的 SH- $\gamma$ 控制图, EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图、VSS-SH- $\gamma$ 控制图与 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图间的最优性能进行比较.

### 3.1 与已有双侧变异系数控制图间的性能比较

在与已有双侧变异系数控制图间的性能比较中, 本节所选择已有控制图为 SH- $\gamma$ 控制图和 VSS-SH- $\gamma$ 控制图. 表 5 为当  $\gamma_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$  和  $n = 5, 7, 10, 15$  时, 在变异系数漂移量  $\tau = 1.1, 1.2, 1.5, 2.0$  下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图与其他双侧变异系数控制图的  $ARL_1$ . 由表 5 可得到如下结论:

**结论 1** 对于 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 变异系数小漂移下的  $ARL_1$  值小于 SH- $\gamma$ 控制图与 VSS-SH- $\gamma$ 控制图, 而变异系数大漂移下, 其  $ARL_1$  值略小于 VSS-SH- $\gamma$ 控制图, 与其他控制图基本相等. 如: 当  $\gamma_0 = 0.05, n = 5, \tau = 1.1$  时, AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、SH- $\gamma$ 控制图和 VSS-SH- $\gamma$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 61.4、159.9 和 98.8; 当  $\gamma_0 = 0.05, n = 7, \tau = 2$  时, AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、SH- $\gamma$ 控制图和 VSS-SH- $\gamma$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 1.8、2.1 和 1.8.

**结论 2** 对于 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 变异系数小漂移下的  $ARL_1$  值大于其他控制图, 而变异系数大漂移下, 其  $ARL_1$  值与其他控制图基本相等. 如: 当  $\gamma_0 = 0.15, n = 10, \tau = 1.1$  时, VSS-AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、SH- $\gamma$ 控制图、AEMWA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-SH- $\gamma$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 16.3、123.1、35.4 和 76.0; 当  $\gamma_0 = 0.15, n = 15, \tau = 2$  时, VSS-AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、SH- $\gamma$ 控制图、AEMWA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-SH- $\gamma$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 1.2、1.2、1.2 和 1.2.

结论 1 和结论 2 表明所提出 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图监控过程失控的能力最优; 而所提出 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图整体优于 SH- $\gamma$ 控制图与 VSS-SH- $\gamma$ 控制图.

### 3.2 与已有单侧变异系数控制图间的性能比较

在与已有单侧变异系数控制图间的性能比较中,

表4 当 $\gamma_0 = 0.05, n = 5, 7, 10, 15$ 时, 不同漂移量 $\tau$ 下 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的最优参数( $n_S^*, n_L^*, \lambda^*, k^*, w^*, h^*$ )及所对应的 $ARL_1$

$n$	$\tau$	$n_S^*$	$n_L^*$	$\lambda^*$	$k^*$	$w^*$	$h^*$	$ARL_1$
5	0.5	4	31	0.6084	25.0008	0.4112	1.8913	2.32
	0.65	4	31	0.4148	20.0000	0.2926	1.4949	3.07
	0.8	3	31	0.3802	25.0001	0.4118	1.4058	7.68
	0.9	2	31	0.1016	20.0204	0.1000	0.6337	15.97
	1.1	2	31	0.1244	20.0415	0.1000	0.7159	16.36
	1.2	3	31	0.3887	25.0005	0.4118	1.4251	8.11
	1.5	4	31	0.5709	20.0075	0.4118	1.8152	2.85
	2	4	31	0.7278	25.0003	0.4115	2.1332	1.98
7	0.5	6	31	0.4595	25.0008	0.4118	1.5867	2.15
	0.65	6	31	0.5635	25.0006	0.4112	1.8069	2.93
	0.8	5	31	0.4043	25.0006	0.4116	1.4628	7.08
	0.9	4	31	0.1083	20.0291	0.1000	0.6584	15.78
	1.1	4	31	0.1166	19.9946	0.1000	0.6884	16.10
	1.2	5	31	0.3165	25.0207	0.4932	1.2542	7.68
	1.5	6	31	0.7881	25.0019	0.4995	2.2376	2.69
	2	6	31	0.7206	25.0014	0.4997	2.0978	1.73
10	0.5	9	31	0.6493	25.0069	0.4994	1.9832	2.06
	0.65	9	31	0.3625	25.0007	0.4091	1.3712	2.79
	0.8	8	31	0.2964	25.0010	0.4067	1.2112	6.43
	0.9	7	31	0.0999	20.0227	0.1000	0.6269	15.49
	1.1	7	31	0.1145	25.4748	0.1000	0.6810	15.82
	1.2	8	31	0.3650	25.0006	0.4117	1.3729	7.49
	1.5	9	31	0.7839	25.0001	0.4118	2.2949	2.28
	2	9	31	0.7686	25.0018	0.5296	2.2262	1.45
15	0.5	14	31	0.8980	27.9305	0.5001	2.6011	1.68
	0.65	14	31	0.3913	25.0005	0.4101	1.4425	2.48
	0.8	13	31	0.2730	25.0018	0.5000	1.1507	6.04
	0.9	12	31	0.0982	20.0729	0.1000	0.6202	15.16
	1.1	12	31	0.1128	20.0649	0.1000	0.6750	15.50
	1.2	13	31	0.2866	24.9908	0.2941	1.1902	6.12
	1.5	14	31	0.7164	25.0049	0.5000	2.1635	2.05
	2	14	31	0.9970	25.2039	0.5294	2.8612	1.19

本节选择已有控制图为 EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图。表 6 为当  $\gamma_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$  和  $n = 5, 7, 10, 15$  时, 在变异系数漂移量  $\tau = 1.1, 1.2, 1.5, 2.0$  下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图与其他变异系数控制图的  $ARL_1$ 。由表 6 可得到如下结论:

**结论 3** 对于 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 变异系数小漂移下的  $ARL_1$  值大于其他控制图, 而变异系数大漂移下, 与其他控制图基本相等。如: 当  $\gamma_0 = 0.05, n = 5, \tau = 1.1$  时, AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 61.4、51.2、44.1 和 30.1; 当  $\gamma_0 = 0.05, n = 7, \tau = 2$  时, AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 1.8、1.8、1.8 和 1.7。

**结论 4** 对于 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 变异系数小漂移的  $ARL_1$  值大于其他控制图, 而变异系数大漂移下, 与其他控制图基本相等。如: 当  $\gamma_0 = 0.15, n = 10, \tau = 1.1$  时, VSS-AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图、AEMWA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 16.3、31.0、27.5、35.4 和 20.2; 当  $\gamma_0 = 0.15, n = 15, \tau = 2$  时, VSS-AEMWA- $\gamma^2$ 控制图、EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图、AEMWA- $\gamma^2$ 控制图和 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图所对应的  $ARL_1$  值分别为 1.2、1.2、1.2 和 1.2。

结论 3 和结论 4 表明所提出 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图监控过程失控的能力最优; 而所提出 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图在监控过程小漂移的能力劣于 EWMA- $\gamma^2$ 控制图、MEWMA- $\gamma^2$ 控制图与 VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图。

表5 当 $\gamma_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ 和 $n = 5, 7, 10, 15$ 时, 不同漂移量 $\tau$ 下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图与其他双侧变异系数控制图的 $ARL_1$

n	$\tau$	$\gamma_0 = 0.05$				$\gamma_0 = 0.1$			
		SH- $\gamma$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS-SH- $\gamma$	VSS-AEWMA- $\gamma^2$	SH- $\gamma$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS-SH- $\gamma$	VSS-AEWMA- $\gamma^2$
5	1.1	159.9	61.4	98.8	<b>16.4</b>	160.6	61.7	100.2	<b>16.5</b>
	1.2	64.7	24.4	27.2	<b>8.1</b>	65.3	24.5	27.7	<b>8.2</b>
	1.5	10.6	6.4	5.2	<b>2.9</b>	10.8	6.5	5.3	<b>3.0</b>
	2	2.9	2.4	2.3	<b>2.0</b>	2.9	2.4	2.3	<b>2.0</b>
7	1.1	141.2	46.1	84.5	<b>16.1</b>	142.2	46.4	85.9	<b>16.3</b>
	1.2	50.3	17.7	20.7	<b>7.7</b>	50.9	17.9	21.2	<b>7.8</b>
	1.5	7.2	4.7	4.0	<b>2.7</b>	7.4	4.7	4.0	<b>2.7</b>
	2	2.1	1.8	1.8	<b>1.7</b>	2.1	1.9	1.9	<b>1.8</b>
10	1.1	120.3	34.6	72.4	<b>15.8</b>	121.3	34.9	73.7	<b>16.0</b>
	1.2	37.1	13.0	16.2	<b>7.5</b>	37.7	13.1	16.6	<b>7.6</b>
	1.5	4.8	3.4	3.1	<b>2.3</b>	4.9	3.5	3.1	<b>2.4</b>
	2	1.5	1.5	1.5	<b>1.5</b>	1.6	1.5	1.5	<b>1.5</b>
15	1.1	95.8	25.2	62.8	<b>15.5</b>	96.9	25.4	64.0	<b>15.7</b>
	1.2	25.0	9.3	13.2	<b>6.1</b>	25.5	9.4	13.5	<b>6.3</b>
	1.5	3.0	2.5	2.4	<b>2.1</b>	3.1	2.5	2.4	<b>2.2</b>
	2	1.2	1.2	1.2	<b>1.2</b>	1.2	1.2	1.2	<b>1.2</b>

n	$\tau$	$\gamma_0 = 0.15$				$\gamma_0 = 0.2$			
		SH- $\gamma$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS-SH- $\gamma$	VSS-AEWMA- $\gamma^2$	SH- $\gamma$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS-SH- $\gamma$	VSS-AEWMA- $\gamma^2$
5	1.1	162.0	62.3	102.5	<b>16.9</b>	164.0	63.1	105.8	<b>17.3</b>
	1.2	66.4	24.8	28.8	<b>8.4</b>	68.1	25.2	30.3	<b>8.6</b>
	1.5	11.1	6.6	5.4	<b>3.0</b>	11.6	6.7	5.5	<b>2.9</b>
	2	3.1	2.5	2.4	<b>2.0</b>	3.2	2.6	2.4	<b>2.1</b>
7	1.1	143.8	47.0	88.3	<b>16.6</b>	146.1	47.8	91.8	<b>17.0</b>
	1.2	52.0	18.2	22.1	<b>7.9</b>	53.7	18.6	23.4	<b>8.2</b>
	1.5	7.6	4.8	4.1	<b>2.8</b>	8.0	5.0	4.2	<b>2.8</b>
	2	2.2	1.9	1.9	<b>1.8</b>	2.3	2.0	2.0	<b>1.8</b>
10	1.1	123.1	35.4	76.0	<b>16.3</b>	125.7	36.2	79.3	<b>16.7</b>
	1.2	38.7	13.4	17.3	<b>7.8</b>	40.2	13.7	18.4	<b>8.0</b>
	1.5	5.1	3.6	3.2	<b>2.5</b>	5.4	3.7	3.3	<b>2.5</b>
	2	1.6	1.5	1.5	<b>1.5</b>	1.7	1.6	1.6	<b>1.5</b>
15	1.1	98.8	25.9	65.9	<b>16.0</b>	101.3	26.5	68.8	<b>16.4</b>
	1.2	26.3	9.6	14.1	<b>6.6</b>	27.5	9.8	14.9	<b>6.7</b>
	1.5	3.2	2.6	2.5	<b>2.3</b>	3.4	2.7	2.6	<b>2.3</b>
	2	1.2	1.2	1.2	<b>1.2</b>	1.3	1.3	1.3	<b>1.3</b>

注: 加粗数值表示行中最小值.

综上, 所提出 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图表现最优.

### 4 实例分析

本节将通过两个实例来阐明所提出变异系数控制图在实际中的应用.

#### 4.1 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图对烧结过程的监控

烧结是将各种金属粉末等原料, 配入适量的燃料和熔剂, 经混合和造球后在烧结设备上使得物料发生一系列物理化学变化, 将矿粉颗粒压缩黏结成块的过程. 本节考虑一家烧结机械零件制造公司的烧结实例数据 (Castagliola 等<sup>[10]</sup>). 根据 Castagliola 等<sup>[10]</sup>的描述, 为保证该工艺零件的质量, 要求压力

从 2 巴 (bar) 降至 1.5 巴的压降时间 ( $T_{pd}$ ) 大于 30 s, 这里  $T_{pd}$  是一个与孔隙收缩 (pore shrinkage) 相关的质量特性. 在烧结过程中, 使用熔融铜填充孔隙可显著延长压降时间  $T_{pd}$ . 冷却过程中烧结体内吸收的熔融铜量  $Q_C$  越多, 预期压降时间  $T_{pd}$  越大.  $T_{pd}$  与  $Q_C$  间的关联回归研究表明, 压降时间的标准差 ( $\sigma_{pd}$ ) 与其均值 ( $\mu_{pd}$ ) 间存在一个恒定的比例关系, 即  $\sigma_{pd} = \gamma_{pd} \times \mu_{pd}$ . 质量工程师决定通过对变异系数  $\gamma_{pd} = \sigma_{pd} / \mu_{pd}$  进行监控来检测过程变异性的变化. 本节利用所提出 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图对烧结过程实施监控, 具体步骤如下:

step 1: 收集 20 组容量为 5 的受控样本作为第

表6 当 $\gamma_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ 和 $n = 5, 7, 10, 15$ 时, 不同漂移量 $\tau$ 下 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图与其他单侧变异系数控制图的 $ARL_1$

n	$\tau$	$\gamma_0 = 0.05$					$\gamma_0 = 0.1$				
		EWMA- $\gamma^2$	MEWMA- $\gamma^2$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS- EWMA- $\gamma^2$	VSS- AEWMA- $\gamma^2$	EWMA- $\gamma^2$	MEWMA- $\gamma^2$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS- EWMA- $\gamma^2$	VSS- AEWMA- $\gamma^2$
5	1.1	51.2	44.1	61.4	30.1	<b>16.4</b>	51.5	44.5	61.7	30.3	<b>16.5</b>
	1.2	15.0	13.5	24.4	12.0	<b>8.1</b>	15.2	13.7	24.5	12.0	<b>8.2</b>
	1.5	5.7	5.3	6.4	4.0	<b>2.9</b>	5.8	5.4	6.5	4.0	<b>3.0</b>
	2.0	2.4	2.3	2.4	2.1	<b>2.0</b>	2.4	2.3	2.4	2.1	<b>2.0</b>
7	1.1	39.2	34.0	46.1	23.7	<b>16.1</b>	39.4	34.6	46.4	24.2	<b>16.3</b>
	1.2	11.3	10.2	17.7	9.5	<b>7.7</b>	11.4	10.5	17.9	9.3	<b>7.8</b>
	1.5	4.3	4.0	4.7	3.1	<b>2.7</b>	4.3	4.2	4.7	3.2	<b>2.7</b>
10	2.0	1.8	1.8	1.8	1.7	<b>1.7</b>	1.8	1.8	1.9	1.8	<b>1.8</b>
	1.1	30.2	26.0	34.6	19.1	<b>15.8</b>	30.4	26.5	34.9	19.4	<b>16.0</b>
	1.2	8.4	7.7	13.0	<b>7.3</b>	7.5	8.5	7.8	13.1	7.7	<b>7.6</b>
15	1.5	3.2	3.0	3.4	2.5	<b>2.3</b>	3.2	3.1	3.5	2.5	<b>2.4</b>
	2.0	<b>1.4</b>	<b>1.4</b>	1.5	1.5	<b>1.5</b>	<b>1.4</b>	<b>1.4</b>	1.5	<b>1.4</b>	1.5
	1.1	22.4	19.6	25.2	16.0	<b>15.5</b>	22.7	20	25.4	16.0	<b>15.7</b>
	1.2	6.7	6.2	9.3	6.1	<b>6.1</b>	6.8	6.3	9.4	<b>6.2</b>	6.3
15	1.5	2.3	2.2	2.5	<b>2.0</b>	2.1	2.3	2.3	2.5	<b>2.0</b>	2.2
	2.0	<b>1.1</b>	<b>1.1</b>	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	<b>1.2</b>

n	$\tau$	$\gamma_0 = 0.15$					$\gamma_0 = 0.2$				
		EWMA- $\gamma^2$	MEWMA- $\gamma^2$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS- EWMA- $\gamma^2$	VSS- AEWMA- $\gamma^2$	EWMA- $\gamma^2$	MEWMA- $\gamma^2$	AEWMA- $\gamma^2$	VSS- EWMA- $\gamma^2$	VSS- AEWMA- $\gamma^2$
5	1.1	51.9	46.3	62.3	32.4	<b>16.9</b>	52.4	48.5	63.1	32.2	<b>17.3</b>
	1.2	15.4	14.2	24.8	11.9	<b>8.4</b>	15.9	14.8	25.2	12.3	<b>8.6</b>
	1.5	5.9	5.6	6.6	4.0	<b>3.0</b>	6.1	5.8	6.7	4.2	<b>2.9</b>
	2	2.5	2.4	2.5	2.2	<b>2.0</b>	2.6	2.5	2.6	2.5	<b>2.1</b>
7	1.1	40.3	35.8	47.0	28.2	<b>16.6</b>	41	37.5	47.8	25.8	<b>17.0</b>
	1.2	11.7	10.7	18.2	9.4	<b>7.9</b>	12	11.1	18.6	9.8	<b>8.2</b>
	1.5	4.4	4.2	4.8	3.2	<b>2.8</b>	4.6	4.4	5.0	4.2	<b>2.8</b>
10	2	1.9	1.8	1.9	1.8	<b>1.8</b>	2	1.9	2.0	1.8	<b>1.8</b>
	1.1	31	27.5	35.4	20.2	<b>16.3</b>	31.4	28.7	36.2	20.4	<b>16.7</b>
	1.2	8.7	8	13.4	7.8	<b>7.8</b>	9	8.4	13.7	8.0	<b>8.0</b>
	1.5	3.3	3.2	3.6	2.6	<b>2.5</b>	3.4	3.3	3.7	2.7	<b>2.5</b>
15	2	1.5	1.5	1.5	1.5	<b>1.5</b>	1.5	1.5	1.6	1.5	<b>1.5</b>
	1.1	23.2	20.5	25.9	16.5	<b>16.0</b>	23.7	21.4	26.5	17.1	<b>16.4</b>
	1.2	6.9	6.5	9.6	<b>6.3</b>	6.6	7.1	6.7	9.8	6.7	<b>6.7</b>
	1.5	2.4	2.3	2.6	<b>2.1</b>	2.3	2.5	2.4	2.7	<b>2.2</b>	2.3
15	2	1.2	1.2	1.2	<b>1.2</b>	1.3	1.2	1.2	1.2	<b>1.2</b>	1.3

注: 加粗数值表示行中最小值。

I 阶段数据, 并基于第 I 阶段数据, 利用式 (1) 和 (2) 计算出 $\gamma_{pd}$ 的估计值 $\hat{\gamma}_0 = 0.417$ 。

step 2: 假设监控漂移量 $\tau = 1.25$ 。利用算法 3, 计算 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图监控漂移量 $\tau = 1.25$ 的最优参数 $(\lambda^*, k^*, w^*, h^*) = (0.0845, 3.2857, 0.565)$ 。

step 3: 利用式 (4) 求得 $n = 5$ 和 $\gamma_0 = 0.417$ 对应的 $(a, b, c)$ 值, 即 $a = 2.5008, b = 1.4286, c = -0.0262$ 。

step 4: 收集 20 个样本作为第 II 阶段数据, 利用式 (1) ~ (3) 分别求出每个样本的 $\bar{X}_i, S_i, \hat{\gamma}_i$ 和 $Z_i$ 。

step 5: 绘制 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图, 根据 Kang 等<sup>[8]</sup>和 Castagliola 等<sup>[10]</sup>分别绘制 SH- $\gamma$ 控制图和 EWMA-

$\gamma^2$ 控制图 (如图 6 所示)。

由图 6 可以发现: AEWMA- $\gamma^2$ 控制图在第 7 个样本处发出警报信号, EWMA- $\gamma^2$ 控制图在第 13 个样本处发出警报信号, 而 SH- $\gamma$ 控制图未发出警报信号。这表明所提出 AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的监控能力较强。

#### 4.2 VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图对锌合金压铸热室过程的监控

第 2 个实例数据来源于卫生洁具行业压铸热室工艺生产的锌合金零件。所关注的特性是在模塑工序与后续连续电镀表面处理间需要去除的废锌合金材料重量 (单位: g)。Castagliola 等<sup>[22]</sup>的回归研

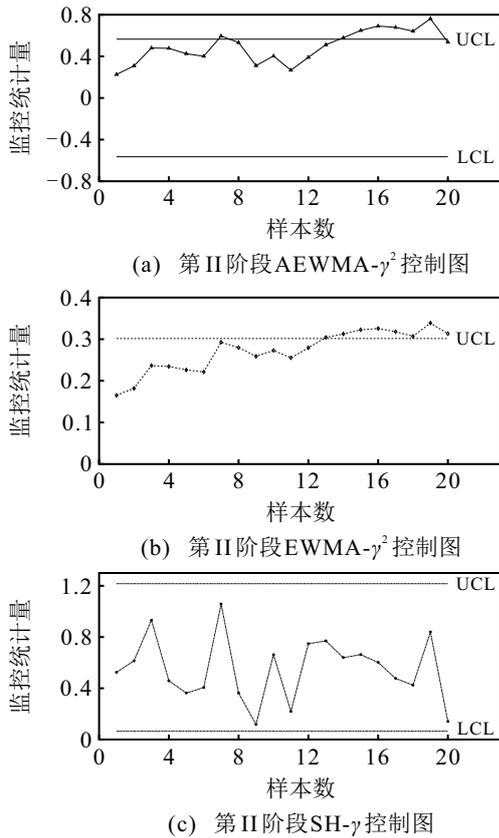


图6 烧结过程下的3种变异系数控制图

究显示锌合金压铸热室过程中废合金重量的标准差与均值成恒定的比例,故本文选取的实例数据来源于文献[22]中锌合金压铸热室过程中锌合金的废料重量数据.所提出VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图执行步骤如下:

step 1: 收集30组容量 $n = 5$ 的受控样本作为第I阶段数据集,并利用式(1)和(2)分别计算出每个样本的 $\bar{X}_t$ 、 $S_t$ 和 $\hat{\gamma}_t$ .利用所有第I阶段数据计算出受控变异系数 $\gamma_0$ 的估计值 $\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} \hat{\gamma}_i = 0.01$ .

step 2: 假设当过程从受控变异系数 $\gamma_0 = 0.01$ 漂移到失控变异系数 $\gamma_1 = 0.01 \times 1.2 = 0.012$ 时生产过程出错,即变异系数漂移量 $\tau = 1.2$ .利用式(7)求得所提出VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图监控变异系数漂移量 $\tau = 1.2$ 的最优参数 $(n_S^*, n_L^*, \lambda^*, k^*, w^*, h^*) = (3, 31, 0.3909, 3.3718, 0.4090, 1.4337)$ .

step 3: 基于最优参数 $(n_S^*, n_L^*, \lambda^*, k^*, w^*, h^*)$ 可得到下控制限 $LCL = -1.4337$ ,下警戒限 $LWL = -0.5864$ ,上警戒限 $UWL = 0.5864$ 和上控制限 $UCL = 1.4337$ .若第 $k$ 个样本处 $LWL < Z_k < UWL$ ,则第 $k + 1$ 个样本选择容量为 $n_S$ 的小样本;若第 $k$ 个样本处 $Z_k > UWL$ (或 $Z_k < LWL$ ),则第 $k + 1$ 个样本选择容量为 $n_L$ 的大样本.

step 4: 利用式(4)分别求出 $n_S = 3$ 和 $n_L = 31$

对应的 $(a, b, c)$ 值,即 $a = 12.0079$ , $b = 1.2874$ , $c = -1.9671 \times 10^{-5}$ 和 $a = 50.77027$ , $b = 5.7449$ , $c = -4.7395 \times 10^{-5}$ .

step 5: 收集30个样本作为第II阶段数据,利用式(1)~(3)分别求出每个样本的 $\bar{X}_t$ 、 $S_t$ 、 $\hat{\gamma}_t$ 和 $Z_t$ .

step 6: 绘制VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图,根据Muhammad等[27]和Castagliola等[22]分别绘制VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图和VSS-SH- $\gamma$ 控制图(如图7所示).

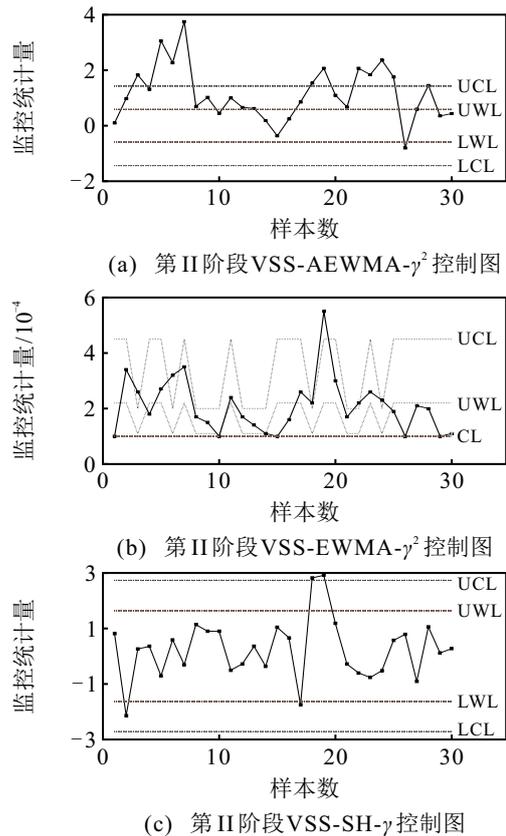


图7 监控锌合金压铸热室过程下的三种变异系数控制图

由图7可以发现:VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图在第3个样本处发出警报信号,而VSS-EWMA- $\gamma^2$ 控制图和VSS-SH- $\gamma$ 控制图分别在第7个样本处和第18个样本处发出警报信号.这表明所提出VSS-AEWMA- $\gamma^2$ 控制图的监控能力较强.

综上,两个实例均表明,所提出变异系数控制图具有良好的发现过程失控能力.

### 5 结论

实际中存在无法利用传统均值图或传统方差图进行监控的过程数据,如锌合金压铸热室过程中锌合金的废料重量.对于此类数据,Kang等[8]提出了利用变异系数控制图对其实施监控.随后,大批学者提出了监控变异系数的单侧EWMA控制图.由于实际过程中变异系数漂移方向和大小常常未知,前人

研究无法对过程变异系数实施有效监控. 对此, 本文首先基于变异系数平方的对数正态变换提出了一个监控过程变异系数的双侧 AEWMA 控制图, 并研究了样本容量  $n$ , 参数  $k$  和光滑参数  $\lambda$  对于该控制图的影响; 然后, 为提高所提出控制图的监控能力, 本文将 VSS 融入了控制图设计, 提出了监控过程变异系数的双侧 VSS AEWMA 控制图, 即 VSS-AEWMA- $\gamma^2$  控制图; 最后, 比较了所提出控制图与其他变异系数控制图间的性能表现. 结果显示, 所提出 VSS-AEWMA- $\gamma^2$  控制图表现最优.

从文中的数据分析中可以发现, 随着样本容量  $n$  的增加, 所提出 AEWMA- $\gamma^2$  控制图的监控过程失控能力会随之增强. 然而, 在实际 (如高端制造、生物医学) 中获取大量的样本常常很困难, 即使获得也需要大量时间、人力和财力. 对此, 未来研究将考虑利用机器学习、贝叶斯等方法来设计监控过程变异系数的 AEWMA 控制图.

#### 参考文献 (References)

- [1] 胡雪君, 王建江, 崔南方. 基于统计过程控制的两阶段缓冲监控方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(6): 1453-1462. (Hu X J, Wang J J, Cui N F. Two-stage buffer monitoring method based on statistical process control[J]. Control and Decision, 2020, 35(6): 1453-1462.)
- [2] 姚林, 张岩. 基于自适应混合核典型变量分析的工业过程质量相关故障检测[J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 801-807. (Yao L, Zhang Y. Quality-related fault detection for industrial processes based on adaptive mixed kernel canonical variable analysis[J]. Control and Decision, 2021, 36(4): 801-807.)
- [3] 周平, 张宇. 基于工业视角的概念漂移检测与适应方法综述[J]. 控制与决策, 2025, 40(6): 1774-1792. (Zhou P, Zhang Y. A review of concept drift detection and adaptation methods from an industrial perspective[J]. Control and Decision, 2025, 40(6): 1774-1792.)
- [4] 宋贲, 王晗, 张久军, 等. 融合主题模型与文本特征的汽车质量多维动态监测与诊断[J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2879-2890. (Song Z, Wang H, Zhang J J, et al. Multi-dimensional dynamic monitoring and diagnosis of automotive quality integrating topic models and textual features[J]. Control and Decision, 2025, 40(9): 2879-2890.)
- [5] Shewhart W A. Economic control of quality of manufactured product[M]. Oxford: Van Nostrand, 1931.
- [6] Page E S. Continuous inspection schemes[J]. *Biometrika*, 1954, 41(1/2): 100.
- [7] Roberts S W. Control chart tests based on geometric moving averages[J]. *Technometrics*, 1959, 1(3): 239-250.
- [8] Kang C W, Lee M S, Seong Y J, et al. A control chart for the coefficient of variation[J]. *Journal of Quality Technology*, 2007, 39(2): 151-158.
- [9] Hong E P, Kang H W, Kang C W. DEWMA control chart for the coefficient of variation[J]. *Advanced Materials Research*, 2011, 201/202/203: 1682-1688.
- [10] Castagliola P, Celano G, Psarakis S. Monitoring the coefficient of variation using EWMA charts[J]. *Journal of Quality Technology*, 2011, 43(3): 249-265.
- [11] Calzada M E, Scariano S M. A synthetic control chart for the coefficient of variation[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2013, 83(5): 853-867.
- [12] Zhang J J, Li Z H, Chen B, et al. A new exponentially weighted moving average control chart for monitoring the coefficient of variation[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2014, 78: 205-212.
- [13] Tran P H, Tran K P. The efficiency of CUSUM schemes for monitoring the coefficient of variation[J]. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2016, 32(6): 870-881.
- [14] Chen R, Li Z H, Zhang J J. A generally weighted moving average control chart for monitoring the coefficient of variation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 70: 190-205.
- [15] Hu X L, Zhang S Y, Xie F P, et al. On designing the two one-sided mixed EWMA-CUSUM monitoring schemes for the coefficient of variation with an application to the sintering process[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2022, 169: 108212.
- [16] Alabi O, Adegoke N A, Adebola F B, et al. Exponentially weighted moving average control charts for monitoring coefficient of variation under ranked set-sampling schemes[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2022, 92(8): 1567-1589.
- [17] Hu X L, Zhang S Y, Zhou X J, et al. The performance of double exponentially weighted moving average control charts for monitoring the coefficient of variation[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2024, 53(4): 1779-1798.
- [18] Jalilibal Z, Amiri A, Castagliola P, et al. Monitoring the coefficient of variation: A literature review[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2021, 161: 107600.
- [19] Capizzi G, Masarotto G. An adaptive exponentially weighted moving average control chart[J]. *Technometrics*, 2003, 45(3): 199-207.
- [20] Haq A, Bibi N, Khoo M B C. Enhanced EWMA charts for monitoring the process coefficient of variation[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2020, 36(7): 2478-2494.
- [21] Shu L J, Jiang W. A new EWMA chart for monitoring process dispersion[J]. *Journal of Quality Technology*, 2008, 40(3): 319-331.
- [22] Castagliola P, Achouri A, Taleb H, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size control chart[J]. *The International Journal of Advanced*

- Manufacturing Technology, 2015, 80(9): 1561-1576.
- [23] Noor-ul-Amin M, Riaz A. EWMA control chart for coefficient of variation using log-normal transformation under ranked set sampling[J]. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 2020, 44: 155-165.
- [24] Castagliola P, Achouri A, Taleb H, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sampling interval control chart[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2013, 29(8): 1135-1149.
- [25] Khaw K W, Khoo M B C, Yeong W C, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size and sampling interval control chart[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2017, 46(7): 5772-5794.
- [26] Yeong W C, Khoo M B C, Tham L K, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sampling interval EWMA chart[J]. *Journal of Quality Technology*, 2017, 49(4): 380-401.
- [27] Muhammad A N B, Yeong W C, Chong Z L, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size EWMA chart[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 126: 378-398.
- [28] Tran P H, Heuchenne C. Monitoring the coefficient of variation using variable sampling interval CUSUM control charts[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2021, 91(3): 501-521.
- [29] Yeong W C, Tan Y Y, Lim S L, et al. Variable sample size and sampling interval (VSSI) and variable parameters (VP) run sum charts for the coefficient of variation[J]. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2024, 21(2): 177-199.
- [30] Hu X L, Zhang S Y, Xie F P, et al. Triple exponentially weighted moving average control charts without or with variable sampling interval for monitoring the coefficient of variation[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2024, 94(3): 536-570.
- [31] Iglewicz B, Myers R H, Howe R B. On the percentage points of the sample coefficient of variation[J]. *Biometrika*, 1968, 55(3): 580-581.
- [32] Johnson N L. Systems of frequency curves generated by methods of translation[J]. *Biometrika*, 1949, 36(1/2): 149-176.
- [33] Jensen W A, Jones-Farmer L A, Champ C W, et al. Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review[J]. *Journal of Quality Technology*, 2006, 38(4): 349-364.
- [34] Psarakis S, Vyniou A K, Castagliola P. Some recent developments on the effects of parameter estimation on control charts[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2014, 30(8): 1113-1129.
- [35] Huber P J. Robust statistics[M]. New York: Wiley, 1981.
- [36] Beaton A E, Tukey J W. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data[J]. *Technometrics*, 1974, 16(2): 147-185.
- [37] Jiang W, Shu L J, Tsui K L. Weighted CUSUM control charts for monitoring poisson processes with varying sample sizes[J]. *Journal of Quality Technology*, 2011, 43(4): 346-362.
- [38] Shu L J. An adaptive exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variances[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2008, 78(4): 367-384.
- [39] Neuts M F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981.

### 作者简介

贡平邨 (1987-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为统计质量管理、金融风险管理, E-mail: [gpyeah@sina.com](mailto:gpyeah@sina.com);

郭宝才 (1978-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为统计质量管理、金融风险管理, E-mail: [gbc78@163.com](mailto:gbc78@163.com).