

# 求解非线性方程组的近邻频次引导多变异差分进化算法

赵世杰<sup>1,2,3†</sup>, 邓姝婷<sup>1</sup>, 赵秋丽<sup>1</sup>, 宋金玲<sup>1</sup>

1. 辽宁工程技术大学 理学院, 辽宁 阜新 123000;
2. 辽宁工程技术大学 测绘与地理科学学院, 辽宁 阜新 123000;
3. 辽宁工程技术大学 运筹与优化研究所, 辽宁 阜新 123000)

**摘要:** 求解非线性方程组问题是数值计算领域的重要任务之一, 其难点是如何在一次运行中同时找到多个根. 针对邻域拥挤差分进化算法在非线性方程组多根联解时存在解出不完整问题, 提出一种近邻频次引导的多变异差分进化算法. 其多变异策略基于个体适应度值进行分组且每组个体采用不同的变异算子, 以实现全局和邻域信息的综合学习; 近邻频次引导机制则是利用个体被选为邻域个体的频次信息以提升算法多根联解效率, 同步增强对潜在根的探索能力. 实验结果表明, 所提算法相较于其他对比算法具有相对更高的找根率和成功率.

**关键词:** 智能优化算法; 非线性方程组; 差分进化算法; 多根联解; 多变异策略; 近邻频次引导机制

**中图分类号:** TP18 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyj.2025.0834

**引用格式:** 赵世杰, 邓姝婷, 赵秋丽, 等. 求解非线性方程组的近邻频次引导多变异差分进化算法 [J]. 控制与决策.

## A nearest-neighbor frequency-guided multi-mutation differential evolution algorithm for solving nonlinear equation systems

ZHAO Shi-jie<sup>1,2,3†</sup>, DENG Shu-ting<sup>1</sup>, ZHAO Qiu-li<sup>1</sup>, SONG Jin-ling<sup>1</sup>

- (1. College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China; 2. The School of Geomatics, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China; 3. Institute for Optimization and Decision Analytics, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

**Abstract:** Solving nonlinear equation systems is one of the important tasks in the field of numerical computation. And its difficulty lies in finding multiple roots simultaneously in a single run. To address the issue that the neighborhood crowded differential evolution algorithm fails to fully solve when multi-root joint solution of nonlinear equation systems, a nearest-neighbor frequency-guided multi-mutation differential evolution algorithm is proposed. Its multi-mutation strategy groups individuals based on their fitness values, and each group uses a different mutation operator to achieve comprehensive learning of global and neighborhood information. The nearest-neighbor frequency-guided mechanism utilizes the frequency information of individuals being selected as neighborhood individuals to improve the efficiency of multi-root joint solution and enhance the exploration ability for potential roots. Experimental results show that the proposed algorithm has a relatively higher root-finding rate and success rate compared to other comparison algorithms.

**Keywords:** intelligent optimization algorithm; nonlinear equation systems; differential evolution algorithm; multi-root joint solution; multi-mutation strategy; nearest-neighbor frequency-guided mechanism

## 0 引言

非线性方程组 (Nonlinear Equation Systems, NESs)<sup>[1]</sup> 广泛存在于现实世界的许多实际应用中, 如经济学、电网<sup>[2]</sup> 等领域, 但 NESs 存在多个不同的根, 较难同时求解. 因此, NESs 多根联解是一个重要的研究课题. 目前, NESs 求解算法主要有传统优化算

法和智能优化算法. 牛顿法、信赖域法<sup>[3]</sup> 等传统优化算法在求解 NESs 时往往在一次运行中只能寻得一个根, 相较而言, 智能优化算法能同时从多个初始点并行搜索, 可在一次运行中定位到多个根, 更具鲁棒性和高效性, 较适于 NESs 多根联解问题. 因此, 基于智能优化算法的 NESs 多根联解及其多根的多样性

收稿日期: 2025-08-13; 录用日期: 2026-02-25.

基金项目: 辽宁省自然科学基金面上项目 (2023-MS-317); 辽宁省研究生教育教学改革研究项目 (LNYJG2023119).

†通信作者. E-mail: zhaoshijie@lntu.edu.cn

维护机制已受到国内外学者的广泛关注.

差分进化算法 (Differential Evolution, DE) 是 NESs 多根联解的重要基算法, 联合聚类策略、小生境技术等多样性维护机制<sup>[4]</sup> 可有效缓解选择压力, 以强化 NESs 多根联解的效用, 如 Guo 等<sup>[5]</sup> 提出基于密度聚类的差分进化算法 (Density Clustering-based DE, DCDE), Wang<sup>[6]</sup> 等提出混合小生境双存档差分进化算法, 赵等<sup>[7]</sup> 提出邻域交叉双变异差分进化算法. 此外, Li 等<sup>[8]</sup> 将邻域技术与 DE 算法相结合, 提出一类基于进化多任务的非线性方程组优化框架. Wu 等<sup>[9]</sup> 将小生境技术、聚类策略与 DE 算法相结合, 提出基于 K-means 的物种形成差分进化算法. Qu 等<sup>[10]</sup> 将整体种群分割成基于邻域的各个子种群, 提出基于邻域拥挤的差分进化算法 (Neighborhood-based Crowding DE, NCDE). He 等<sup>[11]</sup> 改进邻域策略并提出基于模糊邻域的定向差分进化算法 (Fuzzy Neighborhood based Differential Evolution with Orientation, FNODE). Li 等<sup>[12]</sup> 提出基于多样性的邻域竞争小生境差分进化算法 (Diversity-based Niching DE, DNDE) 用于求解 NESs 问题.

基于小生境技术的 DE 算法虽在 NESs 多根联解方面取得一定成效, 但仍面临挑战, 如 NCDE 算法的个体仅在邻域内进行变异而导致种群多样性降低, 且随机选择变异个体引导进化并未充分利用内蕴寻优信息. 鉴于此, 提出一种近邻频次引导的多变异差分进化算法, 以增强 NES 多根联解的寻优性能.

## 1 非线性方程组

NESs<sup>[1]</sup> 由  $m$  个方程组成, 其定义式为

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

其中,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$  表示  $n$  维决策变量,  $S = \prod_{j=1}^n [L_j, U_j] \subseteq \mathbb{R}^n$  表示决策空间,  $L_j$  和  $U_j$  分别表示第  $j$  维变量的下界和上界; 且  $m$  个方程中至少有一个非线性方程. 若  $f_i(x^*) = 0$  对所有  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  均成立, 则称  $x^*$  是该非线性方程的一个根.

此外, 本文在对 NESs 问题进行智能求解时, 参照文献 [7] 将其转换为最小化单目标优化问题

$$\min \sum_{i=1}^m f_i^2(x). \quad (2)$$

其中,  $f_i(x)$  为第  $i$  个方程的函数值, 且最小化单目标优化问题的多个最优解对应于 NESs 的多个根.

## 2 近邻频次引导的多变异差分进化算法

### 2.1 多变异策略

为引导个体综合学习全局与邻域寻优信息, 同时提高计算资源利用效率, 提出一种多变异策略. 该策略根据预设比例  $\omega = \omega_{SP} : \omega_{MP} : \omega_{IP}$  将种群划分为较优  $SP$  (SuperiorPop)、一般  $MP$  (MiddlePop) 和较差  $IP$  (InferiorPop) 三个子群. 具体而言, 种群按适应度升序排列后, 以  $\omega_{SP} : \omega_{MP} : \omega_{IP}$  依次分出三组个体. 其中, 较优个体专注于对已知潜在的区域进行深度挖掘, 以实现快速收敛; 一般个体负责平衡算法的全局搜索与局部开发性能; 而较差个体则侧重于增强种群多样性, 以提高多根联解的有效性.

**情形 1:** 当  $x_i \in SP$  时, 在 DE/best/1<sup>[5]</sup> 的基础上以邻域最优个体  $x_{best}$  为基准, 变异算子  $v_i$  的计算式为

$$v_i = x_{best} + F(x_{r_1} - x_{r_2}). \quad (3)$$

其中,  $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{best} \in subpop_i$  且  $subpop_i$  表示当前个体  $x_i$  的邻域子种群,  $x_{best}$  为  $subpop_i$  中适应度最优的个体,  $x_{r_1}, x_{r_2}$  是从  $subpop_i$  中随机选择的两个不同个体,  $F$  为缩放因子, 且  $r_1 \neq r_2 \neq i$ .

**情形 2:** 当  $x_i \in MP$  时, 变异算子  $v_i$  的计算式为

$$v_i = x_{r_1} + F(x_{r_2} - x_{r_3} + x_{r_4} - x_{r_5}). \quad (4)$$

其中,  $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3} \in subpop_i, x_{r_4}, x_{r_5} \in pop$  且  $pop$  表示当前整个种群,  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq r_5 \neq i$ .

**情形 3:** 当  $x_i \in IP$  时, 变异算子  $v_i$  的计算式为

$$v_i = x_{r_3} + F(x_{r_1} - x_{r_2}). \quad (5)$$

其中,  $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3} \in subpop_i$ , 且  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ . 不同于式 (3) 和 (4) 以距当前个体最近的多个个体构成邻域子种群, 该式是选取最远的多个个体. 该算子驱使当前个体向新的区域搜索, 进而提高种群多样性.

此外, 参照文献 [13] 设置个体适应度值的临界阈值  $\delta = 0.5$ , 当  $f(x_i) < \delta$  时, 也采用式 (3) 的变异算子.

综上所述, 个体进化的多变异策略计算式为

$$v_i = \begin{cases} x_{best} + F(x_{r_1} - x_{r_2}), & x_i \in SP \text{ or } f(x_i) < \delta \\ x_{r_1} + F(x_{r_2} - x_{r_3} + x_{r_4} - x_{r_5}), & x_i \in MP \\ x_{r_3} + F(x_{r_1} - x_{r_2}), & x_i \in IP \end{cases} \quad (6)$$

基于多变异策略的个体进化示意图如图 1, 不同组个体选择不同变异算子进行变异, 以充分利用全局和邻域寻优信息, 提升算法的种群多样性和 NESs 多根锚定概率. 随着寻优进程, 较优个体逐渐聚集于不同的根. 为避免计算资源浪费并探索新的解区域, 当

个体满足根条件时 (详见 3.2 节), 将其存储为候选根, 并重新初始化, 以进一步探寻其他潜在根。

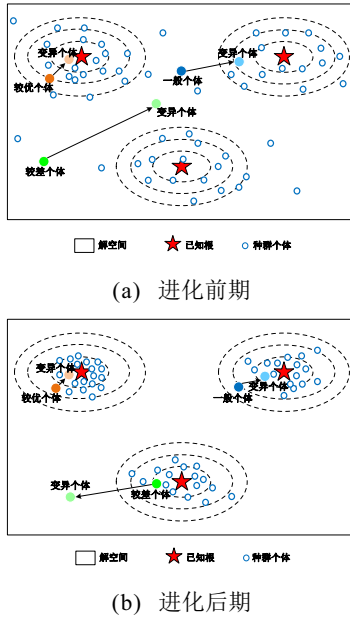


图1 多变异策略变异个体进化示意

## 2.2 近邻频次引导机制

多变异策略在一定程度上可提升 NCDE 算法的 NESs 多根联解效率。然而, 解析 NCDE 算法的邻域特性, 其邻域个体内蕴的频次信息具有重要价值。频次较高的个体可能蕴含着更优的寻优信息, 但 NCDE 算法并未充分利用这些潜质信息。

为进一步提升算法的 NESs 多根联解性能, 构建一种近邻频次引导机制。该机制基于频次较高的个体引导种群进化, 进而充分利用这些个体中的高价值寻优信息。具体来说, 将种群中的每个个体  $x_j$  与一个独立的个体计数器  $C_j$  相关联, 用于动态记录该个体在进化进程中被其他个体选作邻域个体的累计次数。在每次迭代时, 当某个个体  $x_i$  需要从其邻域子种群  $subpop_i$  中选择个体参与变异算子操作时, 被选中的邻域个体  $x_j$  的计数器值增加 1, 以记录近邻频次信息, 基于此得到新的变异算子。该变异算子根据每个个体的近邻频次信息, 采用轮盘赌选择法选择一个个体来代替变异算子中与差分向量相加的个体, 即近邻频次引导机制。故式 (4) 中的  $x_{r_1}$  替换为近邻频次信息引导的个体  $x'_{r_1}$ , 得到新的变异算子

$$v_i = x'_{r_1} + F(x_{r_2} - x_{r_3} + x_{r_4} - x_{r_5}) \quad (7)$$

其中,  $x'_{r_1}$  是从  $subpop_i$  中采用轮盘赌选择法选择的个体;  $x_{r_2}$ 、 $x_{r_3}$  是从  $subpop_i$  中随机选择的个体;  $x_{r_4}$ 、 $x_{r_5}$  是从  $pop$  中随机选择的个体, 且  $r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq r_5 \neq i$ 。与此前所述变异算子类似, 式 (7) 中  $x'_{r_1}$ 、 $x_{r_2}$ 、 $x_{r_3}$  均源自以  $x_i$  为中心的邻域子种群

$subpop_i$ 。

近邻频次引导机制可依概率确保个体更优价值信息的充分利用, 促使进化个体向根迭代逼近, 不断探索并锚定 NESs 的多个根。特别地, 该机制的变异算子可嵌入多变异策略, 即替换式 (4), 以进一步改善算法的 NESs 多根联解性能。

## 2.3 本文算法

融合多变异策略和近邻频次引导机制, 提出近邻频次引导的多变异差分进化算法 (Nearest-neighbor Frequency-guided Multi-mutation Differential Evolution algorithm, NFMDE); 同时为避免子代替换潜在的丢根问题, 每次迭代后再执行判断种群个体是否为候选根操作。NFMDE 算法的伪码如下:

输入: 种群规模  $NP$ 、决策空间  $S$ 、最大评估次数  $MaxFES$ 、变量维度  $n$

输出: 最终所得 NESs 问题的多个根  $x^*$

1. 随机生成  $NP$  个种群个体
2. 计算种群个体的适应度值
3. **While**  $FES < MaxFES$
4. **for**  $i = 1 : NP$
5. // 将种群个体根据适应度值升序排列, 再按比例  $\omega$  将种群划分为  $SP$ 、 $MP$ 、 $IP$  三个子群
6. **if**  $x_i \in SP$
7. // 采用式 (3) 生成变异个体  $v_i$
8. **elseif**  $x_i \in MP$
9. // 采用式 (7) 生成变异个体  $v_i$
10. **else**
11. // 采用式 (5) 生成变异个体  $v_i$
12. **Endif**
13. // 若  $f(x_i) < \delta$ , 则按式 (3) 再更新  $x_i$
14. // 根据变异算子的不同, 选择不同模式得到子种群  $subpop_i$
15. // 个体基于不同的变异算子执行变异操作并生成  $v_i$ , 进而再执行交叉操作以生成子代  $u_i$
16. **Endfor**
17. **for**  $i = 1 : NP$
18. // 计算子代  $u_i$  的适应度值
19.  $FES = FES + 1$
20. **Endfor**
21. **for**  $i = 1 : NP$
22. // 计算子代  $u_i$  与子种群  $subpop_i$  中所有个体的欧氏距离, 找出与  $u_i$  欧氏距离最近的父代  $x_i$
23. //  $u_i$  与最近父代  $x_i$  比较, 选择适应度更优者为新父代, 若满足根的要求则保存并重新初始化

24. Endfor

25. Endwhile

## 2.4 NFMDE 算法的理论分析

### (1) 时间复杂度分析

NFMDE 算法的复杂度主要受种群规模  $NP$ 、迭代次数  $Iter$ 、决策变量维度  $n$  和邻域子种群规模  $M$  的影响. 根据 NFMDE 算法的伪码可知, 其主要操作及时间复杂度运算包括种群初始化  $O(NP \times n)$ 、计算初始个体适应度值  $O(NP)$ 、计算个体被选为邻域个体的频次  $O(Iter \times NP \times M)$ 、种群升序排列  $O(Iter \times NP \times \log NP)$ 、选择变异算子  $O(Iter \times NP)$ 、计算欧氏距离组成邻域子种群  $O(Iter \times NP \times (NP \times n + NP \times \log NP))$ 、变异操作  $O(Iter \times NP \times n)$ 、交叉操作生成子代  $O(Iter \times NP \times n)$ 、计算子代适应度值操作

$O(Iter \times NP)$ 、选择与更新操作 (计算欧氏距离并比较)  $O(Iter \times NP \times (NP \times n + 1))$ .

综上所述, 最高阶复杂度主要来自组成邻域子种群和选择更新操作中的距离计算部分, 故所提 NFMDE 算法的时间复杂度为  $O(Iter \times NP^2 \times n)$ , 且与改进相对的 NCDE 算法时间复杂度是一致的.

### (2) 寻根有效性分析

为验证 NFMDE 算法的 NESs 多根联解性能, 以式 (8) 为例, 分别绘制 NCDE 算法和 NFMDE 算法的寻根演化过程见图 2, 其中  $t$  为迭代次数, 圆圈为式 (8) 的根, 星号为种群个体, 二者重合表示算法找到的根; 带方框的圆圈表示算法未找到的根.

$$\begin{cases} x_1 - \sin(5\pi x_2) = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $x_j \in [-1, 1], j = 1, 2$ .

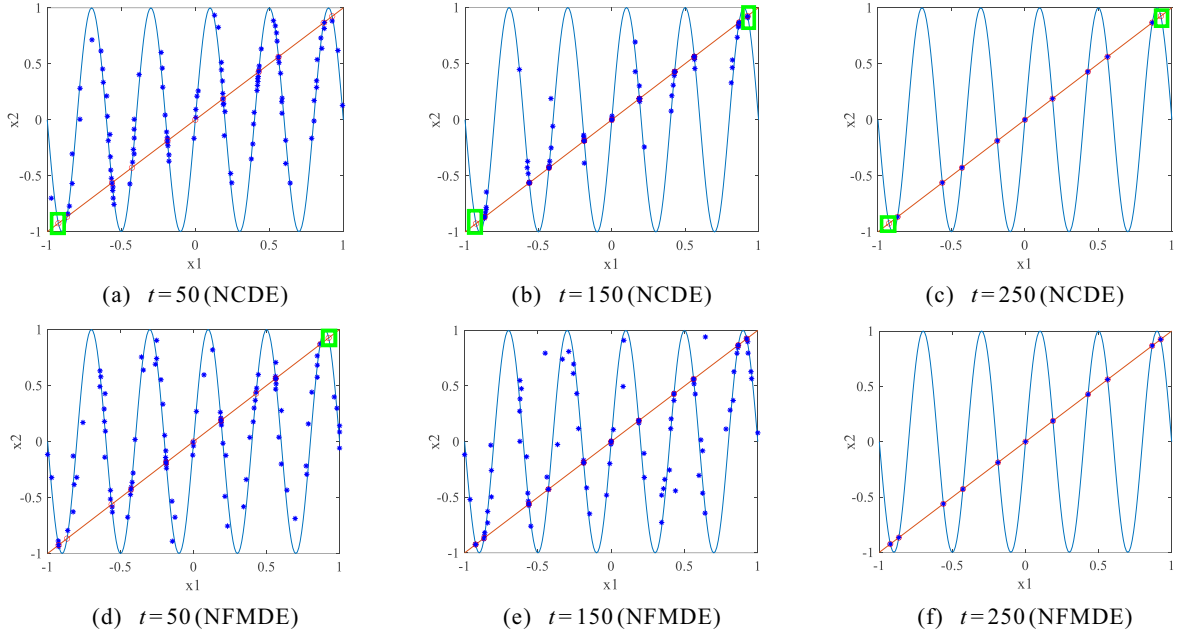


图2 NCDE 算法和 NFMDE 算法对 NESs 问题的寻根演化过程对比示意 ( $t$  为迭代次数)

由图 2 可知, 迭代演化初期, NCDE 和 NFMDE 算法的种群已呈现向 NESs 根附近聚焦的特点且均有某一个根未被成功锚定, 但 NFMDE 算法的进化个体在搜索空间内分散更均匀. 迭代演化中期, NCDE 算法的种群个体高度聚集在各个根附近, 但进化初期时未被定位到的根周围仍没有个体分布; 而 NFMDE 算法不仅成功锚定并聚集在 NESs 全部根的附近, 且进化个体仍保持较好的搜索空间散布性和全局探索能力. 迭代演化末期, NCDE 算法不仅未定位到进化初期和中期时的丢根, 甚至在进化中期被多个个体聚集的根最终也丢失了; 而 NFMDE 算法则成功找到 NESs 问题的全部 11 个根. 这表明

NFMDE 算法相较于 NCDE 算法具有更高的种群多样性和计算资源利用效率, 且得益于 NFMDE 算法在迭代过程中对满足根条件个体的动态存储机制, 可有效避免丢根问题, 进而提高算法的 NESs 多根联解性能.

## 3 实验与结果

### 3.1 测试函数描述

为测验 NFMDE 算法的寻根性能, 以 6 个不同特征的 NESs 测试函数<sup>[14]</sup> 进行实验, 基本信息如下:

F1:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 1 - |x_1 - x_2| = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $x_i \in [-3, 3], i = 1, 2$ , 该方程组有 2 个根.

F2:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^D x_i^2 - 1 = 0 \\ |x_1 - x_2| + \sum_{i=3}^D x_i^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $x_i \in [-1, 1], i = 1, \dots, D, D = 20$ , 该方程组有 2 个根.

F3:

$$\begin{cases} 0.04\left(\frac{11}{15} - x_1\right)e^{10x_1/(1+x_1/100)} - x_1 = 0 \\ 0.04(2.2 - 2x_1 - 3x_2)e^{10x_2/(1+x_2/100)} + \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $x_i \in [0, 1], i = 1, 2$ , 该方程组有 7 个根.

F4:

$$x_i - \cos\left(2x_i - \sum_{j=1}^D x_j\right) = 0, i = 1, \dots, D \quad (12)$$

其中,  $x_i \in [-1, 1], D = 3$ , 该方程组有 7 个根.

F5:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + \cos(2x_2) + 0.09240 = 0 \\ \sin(3x_3) + \sin\left(\frac{10x_1}{3}\right) + \log(2x_2) - \\ 2.52x_3 + 0.08805 = 0 \\ 2(x_1 - 0.75)^2 + \sin(16\pi x_2 - \frac{\pi}{2}) - \\ 3.26815 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $x_1 \in [1, 2.5], x_2 \in [0.2, 2], x_3 \in [0.1, 3]$ , 该方程组只有 1 个根.

F6:

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $x_1 \in [-5, 1.5], x_2 \in [0, 5]$ , 该方程组有 3 个根.

### 3.2 评价指标与参数设置

以找根率 (Root Rate, RR) 和成功率 (Success Rate, SR)<sup>[9]</sup> 作为算法 NESs 多根联解性能的评价指标, 以 NCDE<sup>[10]</sup>、FNODE<sup>[11]</sup>、ANDE<sup>[15]</sup>、CADE<sup>[16]</sup>、DCDE<sup>[5]</sup> 和 DNDE<sup>[12]</sup> 作为对比算法, 各算法参数设置如表 1 所示. 为保证算法性能评价的公平性, 各算法均采用相同的种群规模  $NP$ 、最大评估次数 (F1 为 5000, F2-F6 为 2500), 且分别独立运行 30 次.

此外, 若个体满足以下条件即认为是 NESs 的根: ① 适应度值小于  $\varepsilon$ ; ② 个体与根的距离小于  $\theta = 0.01$ . 当  $n \leq 5$  时,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ; 否则  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

### 3.3 实验结果与分析

#### (1) 调控参数的性能分析

NFMDE 算法的 NESs 多根联解性能主要受多

表1 各算法的参数设置

算法	参数设置
NFMDE	$NP = 100, F = 0.5, CR = 0.9$
NCDE	$NP = 100, F = 0.5, CR = 0.9$
ANDE	$NP = 100, F = 0.9, CR = 0.1$
CADE	$NP = 100, F = 0.5, CR = 0.9, T = 10$
FNODE	$NP = 100, F = 0.5, CR = 0.9, m = 11$
DCDE	$NP = 100, F = 0.5, CR = 0.9, m = 5$
DNDE	$NP = 100, \gamma = 0.5, D(S_i) = 0.25$

变异策略的适应度阈值  $\delta$  和分组比例  $\omega$  影响. 为测试不同分组比例  $\omega$  对 NFMDE 的性能影响, 设计 10 组  $\omega$  为 1:1:1、1:1:2、1:1:3、1:2:1、1:2:2、1:3:1、2:1:1、2:1:2、2:2:1、3:1:1, 对应算法分别记为 NFMDE-1、...、NFMDE-10, 各算法独立运行 30 次的 Friedman 检验秩次排名结果见表 2 (秩次排名值越小表示对应算法的性能越优异).

表2 不同  $\omega$  下 NFMDE 算法的 Friedman 检验秩次排名

算法	RR	SR
NFMDE-1	3.2692	2.4583
NFMDE-2	4.3462	3.7083
NFMDE-3	5.2692	4.1667
NFMDE-4	3.6923	3.0417
NFMDE-5	3.8077	3.2083
NFMDE-6	4.2692	3.2083
NFMDE-7	2.7692	2.4167
NFMDE-8	3.3846	2.7500
NFMDE-9	3.4231	2.7500
NFMDE-10	<b>1.6923</b>	<b>1.5000</b>

由表 2 可知, 不同分组比例  $\omega$  对 NFMDE 算法的性能影响有所不同, NFMDE-10 (分组比例为 3:1:1) 时获得最好的 Friedman 检验秩次排名, 故后续实验中 NFMDE 算法都采用  $\omega = 3:1:1$  的分组比例.

#### (2) 改进策略的有效性分析

为验证改进策略的有效性, 将仅引入多变异策略的算法记为 NFMDE-M, 在此基础上引入近邻频次引导机制即得所提 NFMDE 算法. 以 3.1 节的 6 个 NESs 测试函数进行对比实验, 分别统计 NCDE、NFMDE-M、NFMDE 算法独立运行 30 次实验所得 RR 与 SR 指标对比统计结果见表 3 和表 4, 其中 +/- = 分别表示 NFMDE-M 或 NFMDE 算法的评价指标值优于/劣于/等于 NCDE 算法的评价指标值.

由表 3 可知, 所提 NFMDE-M 和 NFMDE 算法的 RR 值均比 NCDE 算法的优越, 且 NFMDE 算法获得最高的平均找根率 0.9278; 表 4 中 NFMDE-

表3 各算法 RR 指标的对比统计结果

函数	NCDE	NFMDE-M	NFMDE
F1	0.3667	<b>0.9833</b>	<b>1.0000</b>
F2	0.0000	<b>0.5000</b>	<b>0.6333</b>
F3	0.9286	<b>0.9857</b>	<b>1.0000</b>
F4	0.9571	<b>0.9857</b>	<b>1.0000</b>
F5	0.3000	<b>0.8667</b>	<b>0.9333</b>
F6	0.8222	<b>0.9889</b>	<b>1.0000</b>
Avg.	0.5624	<b>0.8851</b>	<b>0.9278</b>
+/-/=		6/0/0	6/0/0

表4 各算法 SR 指标的对比统计结果

函数	NCDE	NFMDE-M	NFMDE
F1	0.1000	<b>0.9667</b>	<b>1.0000</b>
F2	0.0000	0.0000	<b>0.2667</b>
F3	0.6000	<b>0.9333</b>	<b>1.0000</b>
F4	0.7000	<b>0.9000</b>	<b>1.0000</b>
F5	0.3000	<b>0.8667</b>	<b>0.9333</b>
F6	0.4667	<b>0.9667</b>	<b>1.0000</b>
Avg.	0.3611	<b>0.7722</b>	<b>0.8667</b>
+/-/=		5/0/1	6/0/0

表5 NFMDE 算法与 6 种对比算法的 RR 指标对比结果

函数	NFMDE	NCDE	ANDE	FNODE	CADE	DCDE	DNDE
F1	<b>1.0000</b>	0.3667	0.0333	0.0000	0.3833	<b>1.0000</b>	<b>1.0000</b>
F2	0.6333	0.0000	0.0000	0.1167	0.0000	0.8667	<b>1.0000</b>
F3	<b>1.0000</b>	0.9286	0.8476	0.9333	0.9429	<b>1.0000</b>	0.9887
F4	<b>1.0000</b>	0.9571	0.5048	<b>1.0000</b>	0.9905	<b>1.0000</b>	<b>1.0000</b>
F5	<b>0.9333</b>	0.3000	0.0667	0.0000	0.0333	0.7000	0.4333
F6	<b>1.0000</b>	0.8222	0.6889	0.8222	0.8778	0.9889	<b>1.0000</b>
Avg.	<b>0.9278</b>	0.5624	0.3569	0.4787	0.5380	0.9259	0.9037
+/-/=		6/0/0	6/0/0	5/0/1	6/0/0	2/1/3	2/1/3

表6 NFMDE 算法与 6 种对比算法的 SR 指标对比结果

函数	NFMDE	NCDE	ANDE	FNODE	CADE	DCDE	DNDE
F1	<b>1.0000</b>	0.1000	0.0000	0.0000	0.1000	<b>1.0000</b>	<b>1.0000</b>
F2	0.2667	0.0000	0.0000	0.0333	0.0000	0.6333	<b>1.0000</b>
F3	<b>1.0000</b>	0.6000	0.0667	0.5333	0.6333	<b>1.0000</b>	0.7000
F4	<b>1.0000</b>	0.7000	0.0000	<b>1.0000</b>	0.9333	<b>1.0000</b>	<b>1.0000</b>
F5	<b>0.9333</b>	0.3000	0.0667	0.0000	0.0333	0.7000	0.4333
F6	<b>1.0000</b>	0.4667	0.1667	0.5000	0.6333	0.8333	<b>1.0000</b>
Avg.	<b>0.8667</b>	0.3611	0.0500	0.3444	0.3889	0.8611	0.8556
+/-/=		6/0/0	6/0/0	5/0/1	6/0/0	2/1/3	2/1/3

M 算法和 NFMDE 算法的 SR 值也均优于 NCDE 算法. 此外, 耦合两种策略的 NFMDE 算法不仅获得最高的平均成功率 0.8667, 而且在 +/-/= 次数统计数据上性能表现最佳, 并在全部 NESs 上获得最优 SR 值, 再次验证了所提策略和算法的有效性.

### (3) 算法性能的对比分析

为进一步验证 NFMDE 算法的优越性, 以 3.2 节的 6 种对比算法进行 30 次独立实验, 所得 RR 和 SR 指标的对比结果分别见表 5 和表 6.

由表 5 可知, 相较于其他 6 种算法, NFMDE 算法在 +/-/= 统计数据上均表现最好; 其次, 在 6 组 NESs 函数上, NFMDE 算法获得了 0.9278 的最高平均 RR 值. 表 6 中的 SR 指标仍保持多根同步捕获能

力的高竞争性, 且获得最高的平均 SR 值 0.8667 和最佳的 +/-/= 统计数据, 充分验证了 NFMDE 算法具有更为优异的 NESs 多根联解性能.

为直观展示 NFMDE 算法的 NESs 多根联解优越性, 绘制不同算法在 F3、F5、F6 上的 RR 指标迭代对比曲线, 见图 3. 由图 3 可知, 随着迭代进程的推进, 种群个体逐渐向各个根附近聚集, 各算法的 RR 值都呈现较为明显的上升趋势, 且只有 NFMDE 算法在 3 个方程组中均获得高达 1 的最优 RR 值; 相较于其他对比算法, NFMDE 算法在寻优过程中保持较高的 RR 值, 且具有较高的计算资源利用效率, 同时也能更快地定位到 NESs 的更多根, 再次直观佐证了 NFMDE 算法对 NESs 多根联解的有效性.

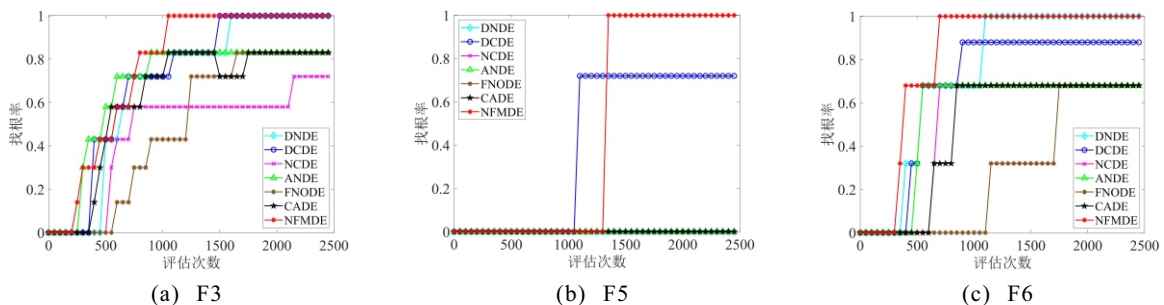


图3 NFMDE 算法与 6 种对比算法的 RR 指标对比曲线

为验证所提 NFMDE 算法在 RR 和 SR 指标方面的整体优势, 基于 Friedman 检验的秩次排名结果见表 7. 由表 7 可知, NFMDE 算法在 RR 和 SR 指标的秩次排名均显著优于其他对比算法, 从而验证了 NFMDE 算法在 NESs 多根联解性能上的优越性.

## 4 结论

本文针对邻域拥挤差分进化算法在 NESs 多根联解时难以在一次运行中找到多个根及并行迭代找根不完整的问题, 提出一种近邻频次引导的多变异差分进化算法 (NFMDE), 以实现较高种群多样性和

表7 NFMDE 算法与对比算法的 Friedman 秩次排名

算法	RR	SR
NFMDE	<b>1.9167</b>	<b>1.9167</b>
NCDE	5.4167	5.2500
ANDE	6.3333	6.4167
FNODE	5.1667	5.1667
CADE	4.8333	4.9167
DCDE	2.1667	2.1667
DNDE	2.1667	2.1667

计算资源利用效率. 实验结果表明, 所提 NFMDE 算法相较于其他对比算法具有相对更优的找根率和成功率, 且获得了最优的 Friedman 检验秩次排名, 有效验证了其优越的 NESs 多根联解性能. 未来, 将重点研究如何融合自适应参数控制、斥力技术等以进一步提升算法的 NESs 多根联解性能.

### 参考文献 (References)

- [1] Liao Z W, Zhu F Y, Mi X Y, et al. A neighborhood information-based adaptive differential evolution for solving complex nonlinear equation system model[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 216: 119455.
- [2] Ahmed H, Ushirobira R, Efimov D. On robust synchronization of nonlinear systems with application to grid integration of renewable energy sources[J]. *Annual Reviews in Control*, 2021, 52: 213-221.
- [3] Yan X K, He Q L, Wang Y F. Truncated trust region method for nonlinear inverse problems and application in full-waveform inversion[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, 404: 113896.
- [4] Wu X H, Wu B, Sun J, et al. Mixed fuzzy inter-cluster separation clustering algorithm[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(10): 4790-4795.
- [5] Guo Y, Li M, Jin J, et al. A density clustering-based differential evolution algorithm for solving nonlinear equation systems[J]. *Information Sciences*, 2024, 675: 120753.
- [6] Wang K, Gong W Y, Liao Z W, et al. Hybrid niching-based differential evolution with two archives for nonlinear equation system[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(12): 7469-7481.
- [7] 赵世杰, 赵秋丽, 陈淼, 等. 基于邻域交叉的双变异差分进化算法求解非线性方程组[J]. *控制与决策*, 2025, 40(2): 546-552. (Zhao S J, Zhao Q L, Chen M, et al. Solving nonlinear equation systems with neighborhood crossover-based dual-mutation differential evolution algorithm[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(2): 546-552. [自助补缺])
- [8] Li S J, Gong W Y, Lim R, et al. Evolutionary multitasking for solving nonlinear equation systems[J]. *Information Sciences*, 2024, 660: 120139.
- [9] Wu J Y, Gong W Y, Wang L. A clustering-based differential evolution with different crowding factors for nonlinear equations system[J]. *Applied Soft Computing*, 2021, 98: 106733.
- [10] Qu B Y, Suganthan P N, Liang J J. Differential evolution with neighborhood mutation for multimodal optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2012, 16(5): 601-614.
- [11] He W, Gong W Y, Wang L, et al. Fuzzy neighborhood-based differential evolution with orientation for nonlinear equation systems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2019, 182: 104796.
- [12] Li J W, Zhao X C, Wu L Y, et al. A diversity-based niching differential evolution with neighborhood competition for nonlinear equation systems[J]. *Expert Systems with Applications*, 2026, 298: 129635.
- [13] Liao Z W, Gong W Y, Wang L. Memetic niching-based evolutionary algorithms for solving nonlinear equation system[J]. *Expert Systems with Applications*, 2020, 149: 113261.
- [14] Liao Z W, Gong W Y, Yan X S, et al. Solving nonlinear equations system with dynamic repulsion-based evolutionary algorithms[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(4): 1590-1601.
- [15] Wang Z J, Zhan Z H, Lin Y, et al. Automatic niching differential evolution with contour prediction approach for multimodal optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(1): 114-128.
- [16] 王开, 龚文引. 求解非线性方程组系统的改进差分进化算法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(9): 2121-2128. (Wang K, Gong W Y. Solving nonlinear equations system with an improved differential evolution[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(9): 2121-2128.)

### 作者简介

赵世杰 (1987-), 男, 副教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为智能优化与计算、机器学习与数据解析、水下导航与智能定位, E-mail: zhaoshijie@lntu.edu.cn;

邓姝婷 (2000-), 女, 硕士生, 主要研究方向为进化计算、非线性方程组智能求解, E-mail: dengshuting2023@163.com;

赵秋丽 (1998-), 女, 硕士生, 主要研究方向为进化计算、非线性方程组智能求解, E-mail: zhao3346231586@163.com;

宋金玲 (2002-), 女, 硕士生, 主要研究方向为进化计算、智能路径规划, E-mail: songjinling0205@163.com.