

非平衡图下异构线性系统输入有界的分布式预定时间优化控制

郭志军¹, 程金蕾¹, 黎倩^{2,3}, 黄玉水^{1†}

(1. 南昌大学信息工程学院, 南昌 330031; 2. 南昌大学先进制造学院, 南昌 330031;
3. 智能机器人江西省重点实验室, 南昌 330031)

摘要: 分布式优化控制是多智能体系统中的典型问题. 然而, 如何在非平衡图下实现快速收敛是一个极具挑战性的难题. 通过构造两个时变增益函数, 本文提出了一种双阶段的分布式优化控制架构, 即分布式预定时间估计和分布式预定时间优化控制. 与现有异构线性多智能体系统的分布式优化控制研究相比, 所提出的算法同时具有以下性能: 1) 可在预定时间内收敛至精确最优解, 且该收敛时间仅与一个时间参数有关, 与系统初始状态及控制参数均无关, 因此收敛时间易于调节; 2) 控制输入有界, 且无需传统的分数幂反馈, 算法结构更简洁; 3) 适用于更一般的非平衡通信网络. 最后, 通过严格的李雅普诺夫理论和仿真验证了算法的有效性和优势.

关键词: 分布式优化控制; 预定时间收敛; 非平衡图; 时变增益函数; 输入有界; 异构线性多智能体系统

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyj.2025.0858

引用格式: 郭志军, 程金蕾, 黎倩, 等. 非平衡图下异构线性系统输入有界的分布式预定时间优化控制 [J]. 控制与决策.

Distributed prescribed-time optimization control for heterogeneous linear systems with bounded input under unbalanced graphs

Guo Zhi-jun¹, Cheng Jin-lei¹, Li Qian^{2,3}, Huang Yu-shui^{1†}

(1. School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 2. School of Advanced Manufacturing, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 3. Jiangxi Key Laboratory of Intelligent Robot, Nanchang 330031, China)

Abstract: Distributed optimization control represents a classic problem in multi-agent systems. However, achieving rapid convergence under unbalanced graphs remains a highly challenging issue. By constructing two time-varying gain functions, this paper proposes a dual-stage distributed optimization control framework, namely distributed predefined-time estimation and distributed predefined-time optimization control. Compared with existing studies on distributed optimization control for heterogeneous linear multi-agent systems, the proposed algorithm simultaneously possesses the following advantages: 1) it can converge to the exact optimal solution within a predefined-time, where the convergence time is only related to a single time parameter, independent of the initial system state and control parameters, facilitating easy adjustment of the convergence time; 2) bounded control inputs, the algorithm does not require conventional fractional-power feedback, leading to a simpler and more concise structure; 3) applicability to more general unbalanced communication networks. Finally, the effectiveness and superiority of the algorithm are rigorously verified through Lyapunov-based analysis and numerical simulations.

Keywords: distributed optimization control; predefined-time convergence; unbalanced graph; time-varying gain function; bounded input; heterogeneous linear multi-agent systems

0 引言

近年来, 由于多智能体系统在无人机编队^[1]、智能电网调度^[2]、分布式机器学习^[3]等领域的广泛应用, 分布式协同受到越来越多学者的关注. 分布式优

化控制, 即通过协作方式使多智能体系统的全局优化目标函数最小化, 是多智能体系统领域的重要研究方向之一^[4-6]. 在分布式优化控制中, 全局目标函数是由所有智能体私有的局部目标函数构成的. 现有

收稿日期: 2025-08-21; 录用日期: 2026-04-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62563024, 62303206); 江西自然科学基金项目 (20242BAB25086, 20242BAB25090); 重庆市自然科学基金项目 (CSTB2024NSCQ-MSX0255).

†通信作者. E-mail: huangyushui@ncu.edu.cn.

大量研究工作对这一问题进行了研究,如基于梯度下降的离散时间迭代方法^[7];基于零梯度和的分布式连续时间优化算法^[8];基于辅助变量和投影算子的分布式约束优化算法^[9-11].值得注意的是,上述研究工作的算法收敛时间大多是无穷的,即当时间趋于无穷大时,系统状态才收敛于最优解,这难以满足实际动态场景中对快速收敛的性能需求.因此,基于有限时间/固定时间控制理论^[12,13],研究人员提出了一系列分布式有限时间/固定时间收敛的分布式优化控制算法^[14-16].然而,由于其固有的分数幂反馈结构,导致算法收敛时间上界估计值依赖于系统初始状态和控制参数,且估计时间上界表达式较为复杂,不易调节.例如,在多无人系统的博弈对抗领域^[4],传统固定时间收敛方法其收敛时间上界较难提前估计,这对于实际应用是非常不利的.因此,需要进一步研究收敛时间可提前设定的分布式预定时间优化控制算法.

为解决上述问题,基于预定时间理论的分布式预定时间优化控制算法相继被提出.在文献^[17-20]中,基于改进的幂积分反馈策略,研究人员提出了多种具有预定时间收敛性能的分布式优化控制算法,但这些算法本质上仍属于固定时间理论框架.基于时基发生器策略,文献^[21-23]提出了实用预定时间收敛的分布式资源分配算法.值得注意的是,文献^[21-23]中的算法在预定时间内只能收敛至近似最优解,而无法收敛至精确最优解.为克服这一局限,文献^[24-27]提出了基于时变增益函数的分布式预定时间优化控制算法,保证系统变量在预定时间内收敛至最优解.在该方法中,当时间趋于预定时间时,由于时变增益函数趋于无穷大,导致控制输入可能无界,因此需要对算法的控制输入有界性进行分析,这也是当前分布式预定时间优化控制领域中的难点.

在上述研究工作中^[17-27],多智能体模型为积分器型同构系统.然而,在实际应用中,存在大量的异构多智能体系统模型(如智能电网、集群机器人系统等).因此,需要进一步研究异构系统的分布式优化控制问题.通过假设系统矩阵是行满秩矩阵,文献^[28]提出了一种基于事件触发通信策略的分布式优化控制算法.在此基础上,文献^[29]放宽了行满秩条件,提出了适用于异构线性系统的分布式优化控制算法.进一步,基于分布式估计策略和盈余变量方法,研究人员将上述工作进一步拓展至非平衡通信网络^[30,31].基于非光滑分析策略,文献^[32]提出了不等式约束条件下,基于状态反馈和输出反馈的分布式优化控制策略,并用于解决智能电网的经济调度问题.文献^[33]提出了基于辅助变量的分布式优化控

制策略,简化了文献^[32]的算法设计和分析难度.然而,文献^[28-33]的研究工作只能实现渐进/指数收敛.为了加快算法收敛速度,基于时基发生器方法,在文献^[34]和^[35]中分别提出了无约束和等式约束下的分布式优化控制算法.但值得关注的是:1)文献^[34]和^[35]在预定时间内只能收敛至近似最优解,而不是精确最优解;2)在工作^[34]和^[35]中需要假设通信网络是无向图,即无法适用于更一般的非平衡通信网络.

基于上述讨论,在非平衡通信网络下,针对异构线性多智能体系统,研究分布式预定时间优化控制算法,且同时保证控制输入的有界性仍是一个未解决的问题.本文主要贡献如下:1)通过构造两个算法模块,本文提出了一种双阶段的适用于非平衡通信网络的分布式预定时间优化控制架构:即非平衡估计阶段和优化控制阶段.不同于现有的异构线性多智能体下的分布式优化控制工作^[28,29,32,35],本文算法适用于更一般的非平衡通信网络.2)基于时变增益反馈,本文提出了分布式预定时间优化控制算法.该算法保证系统状态变量在预定时间内收敛至最优解,且系统的控制输入是有界的.同时,该收敛时间仅与一个时间参数有关,通过设定该参数可调节算法的收敛时间.与基于时基发生器的方法相比^[21,22,34,35],该算法能保证系统变量收敛至精确最优解,而基于时基发生器的方法只能收敛至近似最优解;不同于现有基于固定时间理论架构的分布式优化控制方法^[17-20],本文算法的收敛时间上界与系统控制参数无关,而文献^[17-20]的收敛时间上界值与控制参数高度耦合.因此,本文提出的算法在收敛时间设定方面更灵活.3)不同于现有预定时间收敛的分布式优化控制算法(适用于积分型的同构系统)^[17-27],我们的研究工作进一步推广至异构线性系统,提高了算法的使用范围.

1 预备知识与问题描述

符号说明 符号 \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^{m \times n}$ 分别表示自然数集、实数集、 n 维欧氏空间、 $m \times n$ 实矩阵集合. I_n 表示 $n \times n$ 维单位矩阵, 1_n 和 0_n 分别表示元素全为1、全为0的 n 维列向量.对矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A^T 为其转置; $\text{diag}\{A_1, \dots, A_n\}$ 表示以矩阵 A_1, \dots, A_n 为块的对角块矩阵; $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ 表示以 a_1, \dots, a_n 为元素的对角矩阵; $\text{col}(x_1, \dots, x_n)$ 表示以 x_1^T, \dots, x_n^T 为元素的列向量,即 $\text{col}(x_1, \dots, x_n) = [x_1^T, \dots, x_n^T]^T$.对 n 维列向量 $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\|x\|_p$ 表示其欧几里得 p 范数, $\langle x, y \rangle$ 表示 x 与 y 的内积.

1.1 图论知识

考虑一个包含 N 个智能体的通信图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, 节点集 $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$, 边集 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, 有向边 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 表示从 i 指向 j . 邻接矩阵定义为 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 若 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 权重平衡图需满足: $\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji} (\forall i \in \mathcal{V})$; 若不满足, 则为非平衡图. 如果存在从任意节点 i 到节点 j 的有向路径 \mathcal{V} , 则 \mathcal{G} 为强连通的. 拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A$, 其中 D 是入度矩阵, 定义为 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$, $d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}$, 且 \mathcal{N}_i 是第 i 个节点的邻居集.

引理 1^[30,36] 如果图 \mathcal{G} 是强连通的且其拉普拉斯矩阵为 $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 则存在一个正的左特征向量 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_N]^T$, 使得 $\xi^T L = 0_N^T$ 成立, 其中 $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$; 此外, 对于正定矩阵 $E = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, 下列不等式成立:

$$\begin{cases} \min_{x^T \mathbf{1}_N = 0} x^T \mathcal{L} x \geq \lambda_2(\mathcal{L}) x^T x, \\ \min_{x^T \xi = 0} x^T \mathcal{L} x \geq \lambda_G x^T E x, \\ \max x^T (L^T L) x \leq \lambda_N (L^T L) x^T x, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{L} = \frac{EL + L^T E}{2}$, $\lambda_2(\mathcal{L})$ 是矩阵 \mathcal{L} 第二小特征值, $\lambda_N(L^T L)$ 是 $L^T L$ 的最大特征值, λ_G 是图 \mathcal{G} 的代数连通度. 进一步, 由于矩阵 E 为正定对角矩阵, 所以对于上述第二个不等式, 显然有 $x^T E x \geq \underline{\xi} x^T x$ 成立, 其中 $\underline{\xi} = \min\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$.

1.2 常用凸优化理论^[3]

设向量空间 $D \subseteq \mathbb{R}^n$. 若对任意 $x_1, x_2 \in D$ 及任意 $\mu \in [0, 1]$, 均满足 $\mu x_1 + (1 - \mu)x_2 \in D$, 则称 D 为凸集. 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在凸集 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的实值函数. 若对任意 $x_1, x_2 \in D$ 及任意 $\mu \in [0, 1]$, 不等式 $f(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) \leq \mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x_2)$ 成立, 则称 f 为凸函数. 若存在常数 $t > 0$, 不等式 $f(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) \leq \mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x_2) - \frac{t}{2} \mu(1 - \mu) \|x_1 - x_2\|^2$ 成立, 则称 f 为强凸函数. 若存在一个常数 $z > 0$, 使得对 $\forall x_1, x_2 \in D$, 满足不等式: $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq z \|x_1 - x_2\|$, 则称函数 f 满足集合 D 上的李普希兹条件, 常数 z 是李普希兹常数.

1.3 基于时变增益函数的预定时间收敛

引理 2 给定时变函数 $\eta(t)$ ^[37]: $\eta(t) = \left(\frac{T_u}{t_0 + T_u - t}\right)^\rho$, $t \in [t_0, t_0 + T_u)$, 其中 ρ 是实

数且 $\rho > 1$, t_0 和 T_u 分别是初始时间和用户预先设定时间. 若存在一个正定李雅普诺夫函数 $V(x)$, 满足下列条件: $\dot{V}(x) + dV(x) + l\delta(t)V(x) \leq 0$, $t \in [t_0, t_0 + T_u)$, 其中 $d \geq 0$, $l > 0$, $\delta(t)$ 满足:

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}, & t \in [t_0, t_0 + T_u) \\ \frac{\rho}{T_u}, & t \in [t_0 + T_u, \infty) \end{cases}$$

则称系统可以在预定时间 $t_0 + T_u$ 内收敛, 即有^[38]:

$$\begin{cases} V(x) \leq \eta(t)^{-l} e^{-d(t-t_0)} V(x_0), & t \in [t_0, t_0 + T_u) \\ V(x) \equiv 0. & t \in [t_0 + T_u, \infty) \end{cases}$$

1.4 问题描述

考虑由 N 个异构智能体组成的多智能体系统, 第 i 个智能体的动力学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \\ y_i = C_i x_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ 和 $y_i \in \mathbb{R}^q$ 分别是智能体的内部状态, 控制输入和系统输出. 常数矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p_i}$ 和 $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n_i}$ 分别是系统的状态矩阵, 输入矩阵和输出矩阵.

若每一个智能体都有一个私有的局部目标函数 $f_i(y_i): \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, 则全局目标函数 $f(y) = \sum_{i=1}^N f_i(y_i)$. 本文的目标是为每个智能体设计一个分布式控制器 u_i , 确保所有智能体协同工作, 以在预定时间内解决下列全局优化控制问题:

$$\begin{cases} \min_{y \in \mathbb{R}^{Nq}} f(y) = \min_{y_i \in \mathbb{R}^{Nq}} \sum_{i=1}^N f_i(y_i), \\ \text{s.t. } y_1 = \dots = y_N, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $y = \text{col}(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{Nq}$. 因此, 需要如下假设:

假设 1 设智能体 i 的局部目标函数 $f_i(y_i)$ 是可微的, 同时梯度 $\nabla f_i(y_i)$ 满足 z_i -李普希兹条件, 即对任意 $a, b \in \mathbb{R}^q$, 有: $\|\nabla f_i(a) - \nabla f_i(b)\| \leq z_i \|a - b\|$. 令 $\bar{z} = \max\{z_1, \dots, z_N\}$.

假设 2 设目标函数 $f_i(y_i)$ 是强凸函数, 其强凸常数为 $m_i > 0$, 即对任意 $a, b \in \mathbb{R}^q$, 满足: $(a - b)^T (\nabla f_i(a) - \nabla f_i(b)) \geq m_i \|a - b\|^2$. 令 $m = \min\{m_1, \dots, m_N\}$.

假设 3 系统 (1) 的零动态响应是渐近稳定的. 另外, 智能体 i 的矩阵对 (A_i, B_i) 是可控的, 并且秩 $\text{rank}(C_i B_i) = q$ (其中 $i = 1, \dots, N$).

假设 4 智能体之间的通讯网络是强连通且非平衡的.

引理 3^[30] 如果矩阵 (A_i, B_i) 是可控的, 并且 $C_i B_i$ 的秩 $\text{rank}(C_i B_i) = q$, $(i = 1, \dots, N)$, 则: $\text{rank}([C_i B_i \ C_i A_i]) = q = \text{rank}(C_i B_i)$, $\text{rank}([C_i B_i \ I_q]) = q = \text{rank}(C_i B_i)$. 因此存在反馈矩阵 $P_i \in \mathbb{R}^{p_i \times n_i}$ 和 $F_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q}$, 使得等式 $C_i B_i P_i = C_i A_i$ 和等式 $C_i B_i F_i = I_q$ 成立.

注释 1 假设 1 与假设 2 共同保证了优化问题 (2) 解的存在性和唯一性, 是目前优化领域的常用假设^[28,29,31-35]. 假设 3 是系统控制理论中常用的假设, 其核心作用是保证引理 3 中矩阵方程的可解性^[30,32,39,40]. 虽然该假设在一定程度上限制了算法的实际应用, 但本文考虑的系统模型仍可代表一类实际系统, 如多无人航空飞行器系统^[42-44].

注释 2 在实际应用中, 存在大量异构多智能体系统的优化控制问题. 例如, 电池储能系统的经济调度问题和多无人车的最优趋同问题: a) 在储能系统中, 每个电池的动力学系统模型可建模成关于能量和有功功率的一阶线性系统. 由于每个电池参数结构等不一致, 电池储能系统是一个典型的异构多智能体系统^[31]. 另外, 储能系统的经济运行目标通常是最小化全局有功功率函数, 即电池储能系统的经济调度问题可建模成本文考虑的异构线性系统的优化控制问题 (1)-(2); b) 在多无人车的最优趋同问题中, 无人车模型可通过反馈线性化建立成以位移和速度为状态的一阶线性系统. 由于无人车的结构、摩擦系数、机械质量等均不同, 多无人车系统是一个异构线性多智能体系统^[29]. 为了使所有无人车从各自初始位置最优趋同至某个位置, 通常是建立成关于位移状态的全局最优问题, 则多无人车的最优趋同问题也可建模成本文考虑的优化控制问题 (1)-(2). 基于此, 现有大量研究工作如^[28-35]也研究了本文类似的异构多智能体系统的优化控制问题.

2 主要结果

2.1 算法设计

本文设计如下基于时变增益函数的分布式预定时间优化控制算法:

$$\begin{cases} u_i = -P_i x_i + (d + l\delta_2(t))F_i \\ (-l_1 \frac{\nabla f_i(y_i)}{\phi_i^i} - l_2 \sum_{j=1}^N a_{ij}(y_i - y_j) - l_3 \eta_i), \\ \dot{v}_i = l_1 l_2 (d + l\delta_2(t)) \sum_{j=1}^N a_{ij}(y_i - y_j), v_i(t_0) = 0, \\ \dot{\phi}_i = -(d + l\delta_1(t))l_4 \sum_{j=1}^N a_{ij}(\phi_i - \phi_j), \end{cases} \quad (3)$$

其中 P_i 和 F_i 是引理 3 中的反馈矩阵, $d > 0$, $l\rho > \max\{2, \frac{2}{d_4}\} > 0$, 其中 d_4 由不等式 (26) 得出, l_1, l_2, l_3 和 l_4 的定义满足下列条件:

$$\begin{cases} l_1 > 0, l_2 > \frac{2l_1}{\lambda_2(\mathcal{L})} \left(\frac{2N\bar{z}^2}{m} + \bar{z} + l_3 + \frac{m}{2N} \right), \\ l_3 > \frac{N\bar{z}^2}{m\xi}, l_4 \geq \frac{\lambda_{\max}(E)}{2\lambda_G \xi}. \end{cases} \quad (4)$$

分布式估计器 $\phi_i \in \mathbb{R}^N$, $\phi_i(t_0)$ 的初始值满足 $\phi_i^i(t_0) = 1$, $\phi_i^j(t_0) = 0$, $i \neq j$ (其中 $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$), ϕ_i^i 表示为向量 ϕ_i 的第 i 个元素. $\delta_i(t)$ 定义如下:

$$\delta_i(t) = \begin{cases} \dot{\eta}_i(t), & t \in [t_0, t_0 + \iota T_u) \\ \eta_i(t), & t \in [t_0 + \iota T_u, \infty) \\ \frac{\rho}{\iota T_u}, & t \in [t_0 + \iota T_u, \infty) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\eta_i(t) = \left(\frac{\iota T_u}{t_0 + \iota T_u - t} \right)^\rho$, $t \in [t_0, t_0 + \iota T_u)$, $\iota = 1, 2$.

注释 3 在算法 (3) 中, 控制增益 d, l 及时变函数 $\delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$ 用来调节收敛时间、收敛速度, 并确保与时变增益函数有关的项的有界性, 从而保证控制输入的有界性; 控制增益 l_1, l_2, l_3, l_4 主要用于保证算法的收敛性. 在控制参数设置过程中, 先根据用户收敛时间需求选择合适的参数 $d, \delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$, 然后根据参数选择条件 (4) 选择合适的 l_1, l_3, l_4 , 再根据 d_4 的定义及 (4) 确定 d_4 和 l_2 的取值, 最后根据 $l\rho > \max\{2, \frac{2}{d_4}\}$ 条件选择合适的参数 l 和 ρ .

2.2 收敛性分析

定理 1 在假设 1-4 下, 如果系统 (1) 实施优化控制算法 (3), 则有以下三个主要结论:

- 1) ϕ_i 在预定时间 $t_0 + T_u$ 收敛至 ξ , 即 $\lim_{t \rightarrow t_0 + T_u} \phi_i = \xi$; 当 $t \geq t_0 + T_u$, $\phi_i = \xi$, 同时 $\dot{\phi}_i$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是有界的;
- 2) 系统输出状态 y_i 在预定时间 $t_0 + 2T_u$ 内收敛至最优解, 即 $\lim_{t \rightarrow t_0 + 2T_u} y_i = y_i^*$; 当 $t \geq t_0 + 2T_u$, $y_i = y_i^*$, 其中 y_i^* 是问题 (2) 的最优解;
- 3) 控制输入 u_i 在 $[t_0, +\infty)$ 上是有界的.

证明: 证明分为三步, 第一步证明分布式估计器 ϕ_i 在预定时间内收敛至 ξ ; 第二步证明输出 $y_i(t)$ 在预定时间 $t_0 + 2T_u$ 内收敛到最优值; 第三步证明系统控制输入 u_i 的有界性.

第一步: 为方便分析, 令 $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T$, $\hat{\phi} = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i = (\xi^T \otimes I_N) \phi$, 并且定义 $\rho = \phi - 1_N \otimes$

$\hat{\phi} = (M \otimes I_N)\phi$, 其中 $M = I_N - 1_N \xi^T$, 则有 $LM = ML = L$ 和 $M^T E L = E L$ 成立. 联立 (3) 中的第三个式子, 并写成向量形式得:

$$\dot{\rho} = -l_4(d + l\delta_1(t))(L \otimes I_N)\rho. \quad (6)$$

考虑如下候选李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}\rho^T(E \otimes I_N)\rho. \quad (7)$$

对 V_1 关于时间 t 求导, 并根据引理 1 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\frac{1}{2}(d + l\delta_1(t))l_4(\rho^T((L^T E + E L) \otimes I_N)\rho) = \\ & -(d + l\delta_1(t))l_4\rho^T(L \otimes I_N)\rho \leq \\ & -(d + l\delta_1(t))l_4\lambda_{\min}(E)\rho^T\rho, \end{aligned} \quad (8)$$

另外, 从等式 (7) 中可知, $-(\lambda_{\max}(E)/2)\rho^T\rho \leq -V_1 \leq -(\lambda_{\min}(E)/2)\rho^T\rho$, 即 $-\rho^T\rho \leq -(2/\lambda_{\max}(E))V_1$, 代入 (8) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -l_4(d + l\delta_1(t))\frac{2\lambda_{\min}(E)}{\lambda_{\max}(E)}V_1 \leq \\ & -(d + l\delta_1(t))V_1. \end{aligned} \quad (9)$$

根据 l_4 的定义及引理 2 得:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_{\min}(E)\|\rho\|^2 \leq V_1 \leq \eta_1^{-l}(t)e^{-d(t-t_0)}V_1(t_0), \\ t \in [t_0, t_0 + T_u] \\ \|\rho\| \equiv V_1 \equiv 0, t \in [t_0 + T_u, \infty) \end{cases} \quad (10)$$

因此, ρ 在预定时间 $t_0 + T_u$ 内收敛至 0_{NN} , 也即

$\lim_{t \rightarrow t_0 + T_u} \phi_i = \xi$; 当 $t \geq t_0 + T_u$, $\phi_i = \xi$. 当 $t \rightarrow (t_0 + T_u)^-$ 时, $\delta_1(t) \rightarrow +\infty$, 即 $\delta_1(t)$ 是无界的, 因此需要证明 $\|\dot{\phi}\|$ 的有界性. 显然 $\|\dot{\phi}\|$ 的有界性等价于分析 $\delta_1(t)\eta_1^{-l/2}(t)$ 的有界性, 因为 $\delta_1(t)\eta_1^{-l/2}(t) = \frac{\rho}{T_u}(\frac{t_0 + T_u - t}{T_u})^{(l\rho-2)/2}$. 如果 $l\rho - 2 > 0$, 则 $\delta_1(t)\eta_1^{-l/2}(t) \leq \frac{\rho}{T_u}$, 又因为 $0 \leq e^{\frac{d}{2}(t-t_0)} \leq 1$, 所以 $\|\dot{\phi}\|$ 有界.

第二步: 令 $\Theta = \text{diag}(\phi_1^T, \dots, \phi_N^T)$, $\phi = (\phi_1^T, \dots, \phi_N^T)^T$, $\nabla f(y) = (\nabla f_1(y_1)^T, \dots, \nabla f_i(y_i)^T)^T$, $x = [x_1, \dots, x_N]^T$, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_N)$, 向量 y, ν 以及矩阵 B, C, P 和 F 的定义与向量 x 和矩阵 A 类似. 将 (3) 代入 (1) 并改写成向量形式得:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BP)x + BF(d + l\delta_2(t)) \\ \quad (-l_1(\Theta^{-1} \otimes I_q)\nabla f(y) - l_2(L \otimes I_q)y - l_3\nu), \\ \dot{\nu} = l_1 l_2 (d + l\delta_2(t))(L \otimes I_q)y, \\ \dot{\phi} = -(d + l\delta_1(t))l_4(L \otimes I_q)\phi, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (11)$$

对 (11) 的第一个等式左右两边同左乘矩阵 C , 则:

$$\begin{cases} \dot{y} = (d + l\delta_2(t))(-l_1(\Theta^{-1} \otimes I_q)\nabla f(y) - \\ \quad l_2(L \otimes I_q)y - l_3\nu), \\ \dot{\nu} = l_1 l_2 (d + l\delta_2(t))(L \otimes I_q)y, \\ \dot{\phi} = -(d + l\delta_1(t))l_4(L \otimes I_q)\phi. \end{cases} \quad (12)$$

由第一步分析可知, 当 $t \geq t_0 + T_u$ 时候, ϕ_i 收敛到拉普拉斯矩阵 0 特征值的左特征向量 ξ . 因此, 当 $t \geq t_0 + T_u$, 等式 (12) 可等价于:

$$\begin{cases} \dot{y} = (d + l\delta_2(t))(-l_1(E^{-1} \otimes I_q)\nabla f(y) - \\ \quad l_2(L \otimes I_q)y - l_3\nu), \\ \dot{\nu} = l_1 l_2 (d + l\delta_2(t))(L \otimes I_q)y. \end{cases} \quad (13)$$

为分析算法的预定时间最优收敛性, 首先给出系统 (13) 的平衡解与问题 (2) 的最优解之间的关系. 假设 (y^*, ν^*) 是 (13) 的平衡解, 其中 $y^* = \text{col}(y_1^*, \dots, y_N^*)$, $\nu^* = \text{col}(\nu_1^*, \dots, \nu_N^*)$, 则有:

$$\begin{cases} -l_1(E^{-1} \otimes I_q)\nabla f(y^*) - l_2(L \otimes I_q)y^* - \\ \quad l_3\nu^* = 0_{Nq}, \\ l_1 l_2 (L \otimes I_q)y^* = 0_{Nq}. \end{cases} \quad (14)$$

根据 (14) 的第二个等式可得 $y_1^* = \dots = y_N^*$. 在等式 (13) 的第二个等式左右两边同乘以 $(\xi^T \otimes I_q)$, 可得 $\sum_{i=1}^N \xi_i \dot{\nu}_i = 0_q$, 由于 $\sum_{i=1}^N \nu_i(t_0) = 0_q$. 因此, $\sum_{i=1}^N \xi_i \nu_i^* = 0_q$. 在 (14) 的第一个等式左右两边同时乘以 $(\xi^T \otimes I_q)$, 有:

$$\sum_{i=1}^N \nabla f_i(y_i^*) = 0_q. \quad (15)$$

结合上述分析, 可知 (13) 的平衡解 (y^*, ν^*) 是问题 (2) 的最优解.

下面, 将证明 (12) 的预定时间收敛性. 在 $t \in [t_0, t_0 + T_u]$ 内, 时变函数 $\delta_2(t)$ 与矩阵 Θ^{-1} 均有界. 结合有界的初始条件, 可推知系统变量 x, y, ν 在该区间内有界. 在 $t \in [t_0 + T_u, +\infty)$ 内, 由于 ϕ_i 保持为 ξ_i 不变, 因此分析 (12) 的预定时间收敛性等价于分析 (13) 的预定时间收敛性. 为了便于分析, 令 $\alpha = y - y^*$, $\beta = \nu - \nu^*$, $h = \text{col}(\alpha, \beta)$, 则有:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = (d + l\delta_2(t))(-l_1(E^{-1} \otimes I_q)\zeta \\ \quad - l_2(L \otimes I_q)\alpha - l_3\beta), \\ \dot{\beta} = l_1 l_2 (d + l\delta_2(t))(L \otimes I_q)\alpha, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\zeta = \nabla f(y) - \nabla f(y^*)$. 考虑如下候选李雅普诺夫函数:

$$V_2 = \frac{1}{2}\alpha^T(E \otimes I_q)\alpha + \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{l_1}\beta)^T(E \otimes I_q)(\alpha + \frac{1}{l_1}\beta). \quad (17)$$

显然, 根据 (17) 可知 $d_1(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) \leq V_2 \leq d_2(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2)$ 且 $\|\frac{\partial V_2}{\partial h}\| \leq d_3\|h\|$, 其中 d_1, d_2 和 d_3 是正常数, $\|h\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$. 对 V_2 关于时间

t 求导可得:

$$\dot{V}_2 = (d + l\delta_2(t))V_3, \quad (18)$$

其中:

$$V_3 = -2l_1\alpha^T\zeta - l_2\alpha^T(\mathcal{L} \otimes I_q)\alpha - 2l_3\alpha^T(E \otimes I_q)\beta - \beta^T\zeta - \frac{l_3}{l_1}\beta^T(E \otimes I_q)\beta. \quad (19)$$

对于任意 $y \in \mathbb{R}^{Nq}$, y 可以分解成 $y = \bar{y} + y^\perp$, 其中 $\bar{y} \in C$, $y^\perp \in C^\perp$, 且 $C = \{1_N \otimes o : o \in \mathbb{R}^q\}$, C^\perp 是 C 的正交补空间. 根据假设 2, 有:

$$-\beta^T\zeta \leq \frac{N\bar{z}^2}{2l_1m\xi}\beta^T(E \otimes I_q)\beta + \frac{l_1m}{2N}\alpha^T\alpha, \quad (20)$$

以及:

$$\begin{cases} (y - \bar{y})^T(\nabla f(y) - \nabla f(\bar{y})) \geq \\ \quad -\bar{z}\|y - \bar{y}\|^2 = -\bar{z}\|y^\perp\|^2, \\ (\bar{y} - y^*)^T(\nabla f(y) - \nabla f(\bar{y})) \geq \\ \quad -\bar{z}\|y^\perp\|\|\bar{y} - y^*\|, \\ (y - \bar{y})^T(\nabla f(\bar{y}) - \nabla f(y^*)) \geq \\ \quad -\bar{z}\|\bar{y} - y^*\|\|y^\perp\|. \end{cases} \quad (21)$$

根据假设 2, 有:

$$(\nabla f(\bar{y}) - \nabla f(y^*))^T(\bar{y} - y^*) \geq \frac{m}{N}\|\bar{y} - y^*\|^2. \quad (22)$$

由 (21) 和 (22) 式, 可得:

$$\begin{aligned} -\alpha^T\zeta &= -(y - y^*)^T(\nabla f(y) - \nabla f(y^*)) = \\ &= -(y - \bar{y} + \bar{y} - y^*)^T(\nabla f(y) - \nabla f(\bar{y}) + \\ &\quad \nabla f(\bar{y}) - \nabla f(y^*)) \leq \\ &= -\frac{m}{N}\|\bar{y} - y^*\|^2 + 2\bar{z}\|y^\perp\|\|\bar{y} - y^*\| + \bar{z}\|y^\perp\|^2 \leq \\ &= -\frac{m}{2N}\|\bar{y} - y^*\|^2 + \left(\frac{2\bar{z}^2}{m} + \bar{z}\right)\|y^\perp\|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

根据等式 $(\xi^T \otimes I_q)\nu(t) = 0_q$, 则下列不等式成立:

$$\begin{aligned} -2l_3\alpha^T(E \otimes I_q)\beta &= \\ &= -2l_3(\bar{y} + y^\perp - y^*)(E \otimes I_q)\beta = \\ &= -2l_3\|y^\perp\|^T(E \otimes I_q)\beta \leq \\ &= 2l_1l_3\|y^\perp\|^2 + \frac{l_3}{2l_1}\beta^T(E \otimes I_q)\beta. \end{aligned} \quad (24)$$

将 (20)-(24) 代入 (19), 则可得:

$$\begin{aligned} V_3 &\leq -\frac{l_1m}{N}\|\bar{y} - y^*\|^2 - \left(\frac{l_3}{2l_1} - \right. \\ &\quad \left. \frac{N\bar{z}^2}{2l_1m\xi}\right)\beta^T(E \otimes I_q)\beta + \frac{l_1m}{2N}\alpha^T\alpha - (l_2\lambda_2(\mathcal{L}) - \\ &\quad 2l_1\left(\frac{2N\bar{z}^2}{m} + \bar{z} + l_3\right))\|y^\perp\|^2 \leq \\ &= -\frac{l_1m}{2N}\|\alpha\|^2 - \left(\frac{l_3\xi}{2l_1} - \frac{N\bar{z}^2}{2l_1m}\right)\|\beta\|^2 - \\ &\quad (l_2\lambda_2(\mathcal{L}) - 2l_1\left(\frac{2N\bar{z}^2}{m} + \bar{z} + l_3 + \frac{m}{2N}\right))\|y^\perp\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

根据 l_1, l_2, l_3 以及 l_4 的定义, 可知 $l_2\lambda_2(\mathcal{L}) - 2l_1\left(\frac{2N\bar{z}^2}{m} + \bar{z} + l_3 + \frac{m}{2N}\right) > 0$, 所以有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -(d + l\delta_2(t))V_3 \leq \\ &= -(d + l\delta_2(t))\left(\frac{l_1m}{2N}\|\alpha\|^2 + \left(\frac{l_3\xi}{2l_1} - \frac{N\bar{z}^2}{2l_1m}\right)\|\beta\|^2\right) \leq \\ &= -d_4(d + l\delta_2(t))V_2(x), \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $d_4 = \min\left\{\frac{l_1m}{2Nd_2}, \frac{l_3\xi}{2l_1d_2} - \frac{N\bar{z}^2}{2l_1md_2}\right\} > 0$. 根据引理 2, 则有下列结论:

$$\begin{cases} V_2(x) \leq \eta_2(t)^{-d_4l}e^{-dd_4(t-t_0)}V_2(x_0), \\ \quad t \in [t_0 + T_u, t_0 + 2T_u) \\ V_2(x) \equiv 0, t \in [t_0 + 2T_u, \infty) \end{cases} \quad (27)$$

即当 $V_2(t) \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. 由 $\alpha = y - y^*$ 和 $\beta = \nu - \nu^*$, 当 $\alpha \rightarrow 0$, 则 $y(t) \rightarrow y^*$; 同时, 当 $\beta \rightarrow 0$, 则 $\nu(t) \rightarrow \nu^*$. 另外, $\forall t \geq t_0 + 2T_u$ 有 $V_2(t) \equiv 0$, 故 $y(t) \equiv y^*$, $\nu(t) \equiv \nu^*$. 因此, 输出 y 在预定时间 $t_0 + 2T_u$ 内收敛到最优解 y^* , 证明完毕.

第三步: 在 (3) 中的控制输入 u_i 下, 系统 (1) 是收敛的, 接下来证明控制输入 u_i 是有界的. 根据 (3) 的定义可知, 在 $t \in [t_0, t_0 + T_u)$ 内, 时变函数 $\delta_2(t)$, 系统变量 x_i, y_i, ν_i 均是有界的, 因此控制输入 u_i 在 $t \in [t_0, t_0 + T_u)$ 显然是有界的. 在 $t \in [t_0 + T_u, t_0 + 2T_u)$ 内, 根据 (17) 和 (27), 下列不等式成立:

$$\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \leq \frac{1}{d_1}\eta_2(t)^{-d_4l}e^{-dd_4(t-t_0)}V_2(x_0). \quad (28)$$

根据假设 2, 可以得出:

$$\begin{aligned} \|\dot{\alpha}\| &\leq (d + l\delta_2(t))\left(\frac{l_1\bar{z}\|\alpha\|}{\lambda_{\min}(E)} + \right. \\ &\quad \left. \lambda_{\max}(L)l_2\|\alpha\| + l_3\|\beta\|\right) \leq \\ &= (d + l\delta_2(t))(2l_4\|\alpha\| + l_3\|\beta\|) \leq \\ &= (d + l\delta_2(t))[8l_4^2\|\alpha\|^2 + 2l_3^2\|\beta\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &= (d + l\delta_2(t))\varepsilon(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $l_4 = \max\left\{\frac{l_1\bar{z}}{\lambda_{\min}(E)}, \lambda_{\max}(L)l_2\right\}$, $\varepsilon = \min\{\sqrt{2}l_3, 2\sqrt{2}l_4\}$ 和 $\delta_2(t) = \frac{\rho}{t_0 + T_u - t}$. 根据 (28), 有:

$$\varepsilon(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{d_1}}\eta_2(t)^{-\frac{d_4l}{2}}e^{-\frac{dd_4(t-t_0)}{2}}V_2^{\frac{1}{2}}(x_0). \quad (30)$$

又因为:

$$\begin{aligned} \delta_2(t)\eta_2(t)^{-d_4l/2} &= \\ &= \frac{\rho}{t_0 + 2T_u - t} \frac{(t_0 + 2T_u - t)^{0.5d_4l\rho}}{2T_u^{0.5d_4l\rho}} = \\ &= \frac{\rho}{2T_u} \left(\frac{t_0 + 2T_u - t}{T_u}\right)^{(d_4l\rho - 2)/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

若 $d_4l\rho - 2 > 0$, 则 $\delta_2(t)\eta_2(t)^{-\frac{d_4l}{2}} \leq \frac{\rho}{2T_u}$. 此外, 又

因为 $0 \leq e^{-\frac{d d_4(t-t_0)}{2}} \leq 1$, 则有下列结论:

$$\|\dot{\alpha}\| \leq \left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{d_1}} + \frac{\varepsilon l \rho}{2\sqrt{d_1} T_u} \right) V_2^{\frac{1}{2}}(x_0). \quad (32)$$

所以, 对于 $t \in [t_0 + T_u, t_0 + 2T_u]$, $\|\dot{\alpha}\|$ 是有界的, 对于 $t \geq t_0 + 2T_u$ 时, $\|\dot{\alpha}\|$ 显然有界. 根据 $\dot{\beta}$ 的定义, 因为 $\|\dot{\alpha}\|$ 有界, 所以 $\|\dot{\beta}\|$ 有界. 根据 α, β 的定义及等式 (13) 和 (14), 可知 \dot{y} 和 \dot{v} 有界, 即 \dot{x} 和 \dot{v} 有界. 进一步, 根据 (1), (3) 和 (11) 可得, 控制输入 $\|u\|$ 有界, 即 $\|u_i\|$ 有界当 $t \in [t_0 + T_u, +\infty)$. 结合上述分析, 控制输入 $\|u_i\|$ 在 $t \in [t_0, +\infty)$ 内有界, 证明完毕.

注释 4 与现有基于双幂次反馈的固定时间优化控制策略相比^[14-16], 本文提出的算法具有以下优势与不同: 1) 收敛时间上界调节便利性方面, 现有基于双幂次反馈的固定时间优化控制策略其收敛时间上界通常为如下形式 $T_u \leq \frac{1}{\alpha^k(1-pk)} + \frac{1}{\beta^k(qk-1)}$, 其中参数 α, β, p, q, k 为与控制参数相关的正常数且需满足 $pk < 1, qk > 1$. 而本文所提出的基于时变增益函数的预定时间优化控制策略其收敛时间上界 T_u 为单一参数, 且可由设计人员任意提前设定. 因此, 该算法在收敛时间上界调节便利性上更具优势; 2) 收敛时间上界保守性方面, 在基于双幂反馈的固定时间优化控制策略中, 由于控制参数与收敛时间上界间的高度耦合, 导致收敛时间上界 T_u 往往比实际收敛时间更大, 而本文提出的预定时间优化控制算法中其收敛时间上界值 T_u 是与控制参数无关的单一参数且可由设计人员任意设定, 因此更接近实际的收敛时间值; 3) 收敛性分析难易方面, 在基于双幂反馈的固定时间优化控制策略收敛性分析中, 李雅普诺夫函数的导数是分数阶形式, 而本文算法的李雅普诺夫导数是整数幂形式. 显然, 对于分数幂项的分析与放缩的难度要远大于整数幂项, 即本文算法在收敛性分析方面更为简单.

注释 5 不同于现有基于时基发生器的实用预定时间收敛方法^[34,35](只能使状态/输出在预定时间内收敛至最优解的一个可调邻域内), 本文提出的算法保证系统输出在预定时间内收敛至精确最优解. 通过引入两个时变增益变量 $\delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$, 首先使 $\phi_i(t)$ 在预定时间 $t_0 + T_u$ 内收敛至拉普拉斯矩阵 0 特征值对应的左特征向量; 再此基础上通过将估计值 $\phi_i^i(t)$ 嵌入至控制器中, 从而使得系统输出在预定时间 $t_0 + 2T_u$ 内收敛至最优解, 同时适用于非平衡通信图. 在传统基于时基发生器的方法中, 由于只能收敛至近似最优解, 因此无法先精确的估计拉普拉斯矩阵 0 特征值对应的左特征向量, 即无法适用于

非平衡通信网络.

注释 6 当 t 趋于预定时间时, $\delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$ 将趋于无穷大, 导致与时变增益变量有关的项趋于无穷大. 因此, 如何分析系统内与时变增益有关量(如控制输入)的有界性是现有分布式预定时间控制中的难点. 为了解决这一关键问题, 本文思路是保证系统状态变量收敛速率快于时变增益函数趋于无穷大的速率. 根据对李雅普诺夫函数的分析, 创造性地在时变增益函数前引入一个常数 l , 即通过调节 l 的大小, 使得与时变增益函数有关的项在时间趋于预定时间时是有界的.

注释 7 本文重点聚焦研究适用于异构多智能体系统的分布式预定时间优化控制算法. 然而, 智能体的异构特性往往从结构上给算法性能带来影响^[41]. 例如, 在收敛速度方面, 异构特性使得系统的部分节点起主导作用, 通过为主导节点设计合理的算法, 使得系统的异质性相互作用, 从而加快算法收敛速度. 另外, 在鲁棒性与容错能力方面, 异构系统相当于在系统层面为每个智能体引入了设计多样性, 当面对外部故障时, 由于异质冗余使得系统具有更好的整体可靠性. 因此, 在未来研究中, 将进一步深入研究异构特性如何提升分布式优化控制算法的收敛性能.

3 仿真研究

本节通过两个数值仿真案例来验证本文所提出算法的有效性和优势.

案例 1: 考虑由 6 个智能体组成的系统, 其通信拓扑网络如图 1 所示. 令系统状态矩阵为: $A_1 = A_2 = [1, 0; 1, 1]$, $A_3 = A_4 = [0, 1; 1, -1]$, $A_5 = A_6 = [1, 1, 0; 0, 1, -1; 1, 0, 2]$, $B_1 = B_2 = [-2, 1]^T$, $B_3 = B_4 = [1, 0]^T$, $B_5 = B_6 = [1, 0, 2]^T$, $C_1 = C_2 = [1, 1]$, $C_3 = C_4 = [1, 1]$, $C_5 = C_6 = [0.5, -1, 0]$.

假设每个智能体的局部目标函数分别为: $f_1(y_1) = 0.8(y_1 - 4)^2 + y_1$, $f_2(y_2) = 0.5(y_2 + 2)^2$, $f_3(y_3) = 0.7y_3^2 + 1$, $f_4(y_4) = 0.6y_4^2 + 3$, $f_5(y_5) = (y_5 - 1)^2$, $f_6(y_6) = y_6^2$, 显然, 上述 6 个目标函数 $f_i(y_i)$ 都是连续可微的, 并且均满足假设 1 和假设 2, 其梯度函数 $\nabla f_i(y_i)$ 分别为: $\nabla f_1(y_1) = 1.6(y_1 - 4)$

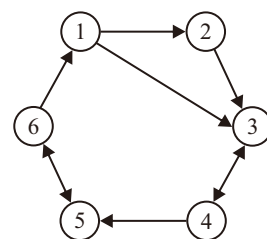


图1 各智能体间通信拓扑图

+1, $\nabla f_2(y_2) = y_2 + 2$, $\nabla f_3(y_3) = 1.4y_3$, $\nabla f_4(y_4) = 1.2y_4$, $\nabla f_5(y_5) = 2y_5 - 2$, $\nabla f_6(y_6) = 2y_6$. 令系统状态初始值: $x_1(0) = [1, 2]^T$, $x_2(0) = [2, 1]^T$, $x_3(0) = [-2, 0]^T$, $x_4(0) = [4, 0]^T$, $x_5(0) = [1, -3, 0]^T$, $x_6(0) = [0, -4, 2]^T$. 矩阵 P 和 F 的取值为: $P_1 = P_2 = [-2, -1]$, $P_3 = P_4 = [1, 0]$, $P_5 = P_6 = [1, -1, 2]$, $F_1 = F_2 = -1$, $F_3 = F_4 = 1$, $F_5 = F_6 = 2$. 为了更好地描述控制算法的收敛性能, 定义优化控制误差:
$$e(t) = \sum_{i=1}^N \|y_i - y_i^*\|^2, i = 1, 2, \dots, 6.$$

(1) 算法基本性能测试: 为了验证本文所提算

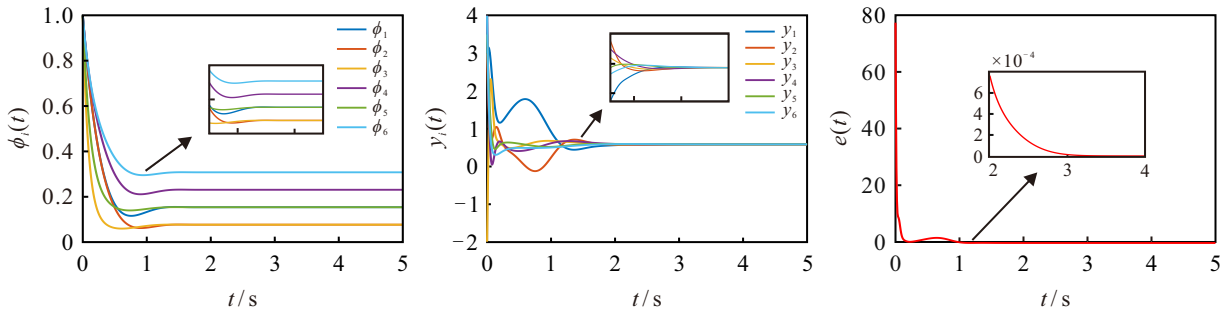


图2 案例1分布式优化控制算法(3)下的仿真结果: (a) 估计器 $\phi_i(t)$; (b) 输出状态 $y_i(t)$; (c) 误差 $e(t)$

为了进一步测试参数 d , l 和 ρ 与算法收敛速率的关系, 考虑 6 组参数: $d = 14, l\rho = 2, T_u = 4$; $d = 15, l\rho = 5, T_u = 4$; $d = 16, l\rho = 4, T_u = 4$; $d = 16, l\rho = 3, T_u = 4$; $d = 20, l\rho = 3, T_u = 4$; $d = 20, l\rho = 3, T_u = 3.5$, 其余参数与上文相同. 仿真结果如图 3 所示. 从仿真结果可得: $d + l\rho$ 的值越大, 收敛速率越快; 当 $d + l\rho$ 为固定值时, d 越大, 收敛速率越快; 系统的收敛时间与参数 d, l, ρ 以及初始条件无关, 用户可通过调整参数 T_u 来调节收敛时间.

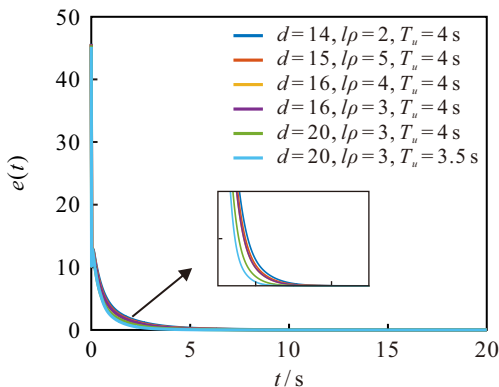


图3 案例1不同参数下收敛性能比较

(2) 对比仿真: 为了展示本文算法在收敛速度和收敛精度的性能, 与文献 [30] 和 [34] 中提出的算法进行比较. 首先对文献 [30] 的算法进行验证, 系统初始输入状态 x_i 属于 $[-2, 2]$ 范围内, 控制参数

法 (3) 的有效性, 取控制参数 $l_1 = 10, l_2 = 3.5, l_3 = 8, l_4 = 8, d = 15, l = 1, \rho = 5, t_0 = 0.01s, T_u = 2s$. 显然, 控制参数满足条件 (4). 仿真结果如图 2 所示, 其中图 2(a) 为估计器的迭代过程, 图 2(b) 为系统输出变化曲线, 图 2(c) 为误差曲线变化过程. 从图 2(a) 可知, 分布式估计器 ϕ_i 在预定时间 $t_0 + T_u = 2.01s$ 内收敛至图的拉普拉斯矩阵 0 特征值的左特征向量. 根据图 2(b) 和 2(c), 可知系统的输出 y_i 在预定时间 $t_0 + 2T_u = 4.01s$ 内收敛全局目标函数的最优值 $y^* = 0.587$.

$\alpha = 3, \delta = 0.5, \beta = 0.2$ 或者 $\beta = 2$. 仿真结果如图 4 所示. 然后, 将文献 [34] 中的预定时间的时基发生器技术应用于解决本文一阶线性系统的分布式优化控制问题, 其仿真结果如图 4 所示. 从中可以看出, 系统输出状态在预定时间 $t_0 + T_u = 4.01s$ 内收敛于最优解的一个较小邻域内. 最后, 对本文提出的预定时间算法进行验证, 系统初始状态 $x_i \in [-2, 2]$, 控制增益 l_1, l_2, l_3, l_4 与上述案例测试相同, 时变增益 $d = 15, l = 1, \rho = 5, t_0 = 0.01s, T_u = 4s$. 从图 4 可以看出, 系统在给定时间 $t_0 + T_u = 4.01s$ 内收敛于最优解. 根据图 4 可得出, 虽然可以通过调整控制参数加快现有指数收敛算法的收敛速度, 但我们的工作收敛精度方面具有更好的效果; 尽管基于时基发生器的分布式预定时间优化控制算法其控制输

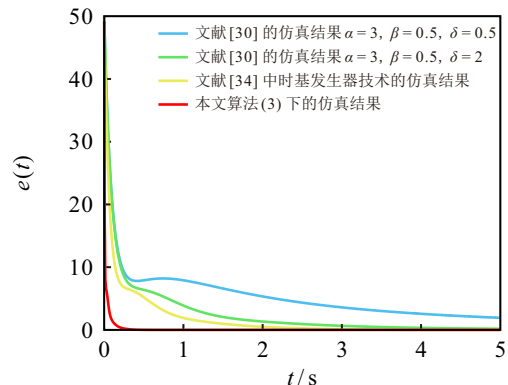


图4 案例1不同算法下的测试结果

入有界且收敛时间上界可调,但在收敛精度方面我们的算法更有优势.

案例 2: 考虑由 6 个航空飞行器构成的网络化系统,其系统模型可通过线性化后降阶为 $x_i = A_i x_i(t) + B_i u_i(t)$, $y_i = C_i x_i(t)$, 其中状态 $x_i = [\beta_i(t), p_i(t), \gamma_i(t)]^T$ 且 $\beta_i(t)$ 表示为侧偏角, $p_i(t)$ 表示为横摇率, $\gamma_i(t)$ 表示为偏航角速率; 控制输入 $u_i(t)$ 定义为 $u_i(t) = [\delta_{DT}, \delta_{AI}, \delta_{RU}, \delta_{RTV}, \delta_{YTV}]^T$ 且 δ_{DT} 表示为副翼偏度, δ_{AI} 为差动尾翼偏度, δ_{RU} 为横摇推力矢量偏度, δ_{RTV} 表示为舵偏转, δ_{YTV} 表示为偏航推力矢量偏转^[43,44]. 与现有文献类似^[42-44], 令系统矩阵 $A_i = [-0.059, 0.496, -0.868; -5.513, -0.939, 0.665; 0.068, 0.026, -0.104]$, $B_i = [0.006, 0.006, 0.004, 0, 0.09; 1.879, 1.328, 0.029, 0.675, 0.217; -0.109, -0.109, -0.084, 0.007, -2.974]$, $C_i = [1, -1, 1]$. 航空飞行器之间的通信网络如图 1 所示. 在多航空飞行器执行编队、跟踪等任务时,通常需要进一步满足能量消耗、跟踪误差等最小化的综合性能指标要求,该综合性能指标可建模为全局成本函数最小化^[42], 即 $\min \sum_{i=1}^6 f_i(y_i)$, $s.t. y_i = y_j, i \neq j$, 其中 $f_i(y_i)$ 为第 i 个航空飞行器的成本函数,且定义为 $f_1(y_1) = 2.5y_1^2 + 8y_1 + 0.5$, $f_2(y_2) = 2y_2^2 + 4y_2 + 1.5$, $f_3(y_3) = 0.8y_3^2 + 5y_3 + 3$, $f_4(y_4) = 1.8y_4^2 + 2y_4 + 1$, $f_5(y_5) = y_5^2 + 3.5y_5 + 2.5$, $f_6(y_6) = 1.5y_6^2 + 4.5y_6 + 2$. 各航空飞行器的初始状态设为 $x_1(0) = [1, 2, 0]^T$, $x_2(0) = [2, 1, 0]^T$, $x_3(0) = [-2, 0, 1]^T$, $x_4(0) = [2, 0, -1]^T$, $x_5(0) = [1, -2, 2]^T$, $x_6(0) = [0, -2, 2]^T$, 矩阵 P 和 F 取值为: $P_i = [2.786, 0.737, 0.826; 0, 0, 0; 0, 0, 0]$, $F_i = [0, 0, 0, 0, -0.3225]^T$, 其余控制参数与案例 1 一致. 系统输出 y_i 的变化过程如图 5 所示. 从中可以看出, 系统输出

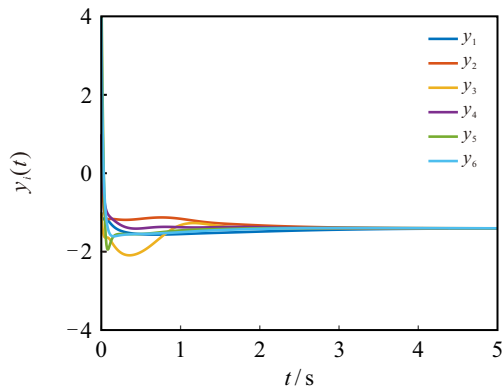


图5 案例 2 分布式优化控制算法 (3) 下各个航空飞行器输出状态 $y_i(t)$ 的仿真结果

在预定时间 4 s 内收敛至最优解 $y^* = -1.4065$, 即验证了本文所提算法在多航空飞行器优化控制问题中的有效性.

4 结论

针对一阶异构线性多智能体系统, 本文研究了非平衡通信网络下的分布式优化控制问题. 基于分布式估计器、梯度下降、时变增益函数、比例积分协议等技术, 本文提出了一种具有预定时间收敛性能的分布式优化控制算法. 该算法主要包含以下两部分: 首先, 构造合适的分布式估计器, 保证估计器在预定时间 T_u 内收敛至拉普拉斯矩阵 0 特征值对应的左特征向量; 在此基础上, 设计比例积分协议和时变增益函数, 使系统输出变量 $y_i(t)$ 在预定时间 $2T_u$ 内收敛至精确最优解. 通过严格的李雅普诺夫稳定性分析, 本文提出的算法收敛时间上界仅仅与参数 T_u 有关, 并可由用户任意给定, 且算法的控制输入是有界的. 最后, 数值仿真及对比仿真验证了本文所提算法的有效性及其先进性. 在未来研究工作中, 可考虑将本文方法推广至高阶非线性多智能体系统中.

参考文献 (References)

- [1] Dong X W, Zhou Y, Ren Z, et al. Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 5014-5024.
- [2] Cherukuri A, Cortés J. Initialization-free distributed coordination for economic dispatch under varying loads and generator commitment[J]. *Automatica*, 2016, 74: 183-193.
- [3] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1-122.
- [4] Shorinwa O, Halsted T, Yu J, et al. Distributed optimization methods for multi-robot systems: Part 1 — A tutorial[J]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2024, 31(3): 121-138.
- [5] Doostmohammadian M, Aghasi A, Pirani M, et al. Survey of distributed algorithms for resource allocation over multi-agent systems[J]. *Annual Reviews in Control*, 2025, 59: 100983.
- [6] 刘腾飞, 秦正雁, 姜钟平. 分布式反馈优化研究现状与发展[J]. *控制与决策*, 2023, 38(8): 2301-2312. (Liu T F, Qin Z Y, Jiang Z P. Distributed feedback optimization: Status and prospects[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(8): 2301-2312.)
- [7] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48-61.
- [8] Lu J, Tang C Y. Zero-gradient-sum algorithms for

- distributed convex optimization: The continuous-time case[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2348-2354.
- [9] Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization *via* continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication[J]. *Automatica*, 2015, 55: 254-264.
- [10] Yang S F, Liu Q S, Wang J. A multi-agent system with a proportional-integral protocol for distributed constrained optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3461-3467.
- [11] 时侠圣, 孙佳月, 徐磊, 等. 二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1336-1344.
(Shi X S, Sun J Y, Xu L, et al. Distributed nonsmooth resource allocation algorithms over second-order multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1336-1344.)
- [12] Zuo Z Y, Tie L. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems[J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(2): 363-370.
- [13] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [14] Wang X Y, Wang G D, Li S H. Distributed finite-time optimization for integrator chain multiagent systems with disturbances[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(12): 5296-5311.
- [15] 杨菲阳, 于志永, 蒋海军, 等. 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1412-1419.
(Yang F Y, Yu Z Y, Jiang H J, et al. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1412-1419.)
- [16] 陈刚, 李志勇. 集合约束下多智能体系统分布式固定时间优化控制[J]. *自动化学报*, 2022, 48(9): 2254-2264.
(Chen G, Li Z Y. Distributed fixed-time optimization control for multi-agent systems with set constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(9): 2254-2264.)
- [17] Cui Q, Song Y D, Wen C Y. Prescribed time consensus control of multiagent systems with minimized time-varying cost function[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(5): 3381-3388.
- [18] De Villeros P, Sánchez-Torres J D, Defoort M, et al. Predefined-time formation control for multiagent systems-based on distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(12): 7980-7988.
- [19] Yue Y Y, Liu Q S. Distributed predefined-time convergent algorithm for solving time-varying resource allocation problem over directed networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, 55(5): 2463-2473.
- [20] Wu H T, Liu Y, Abdel-Aty M, et al. Predefined-time distributed optimization for resource allocation problems with time-varying objective function and constraints[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2025, 12(11): 2353-2355.
- [21] Guo Z J, Chen G. Predefined-time distributed optimal allocation of resources: A time-base generator scheme[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(1): 438-447.
- [22] Luan M, Wen G H, Ge X H, et al. Fully distributed resource allocation over unbalanced digraphs in prescribed time: A relaxed time-base generator approach[J]. *Automatica*, 2025, 177: 112313.
- [23] Huang J Y, Yang C H, Yue Y Y, et al. A predefined-time distributed optimization algorithm for solving time-varying multirobot optimal formation problem[J]. *Automatica*, 2026, 184: 112739.
- [24] Gong X, Cui Y K, Shen J, et al. Distributed optimization in prescribed-time: Theory and experiment[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(2): 564-576.
- [25] Zhou J L, Lv Y Z, Wen C Y, et al. Solving specified-time distributed optimization problem *via* sampled-data-based algorithm[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(4): 2747-2758.
- [26] 郭志军, 曾令伟, 洪宝源, 等. 动态事件触发通信下分布式预定时间非光滑约束优化算法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(6): 2031-2040.
(Guo Z J, Zeng L W, Hong B Y, et al. Distributed nonsmooth constrained optimization: A predefined-time and dynamic event-triggered approach[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(6): 2031-2040.)
- [27] Zuo G W, Zhu L J, Wang Y J, et al. Achieving distributed convex optimization within prescribed time for high-order nonlinear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, 55(10): 4784-4797.
- [28] Li Z H, Wu Z Z, Li Z K, et al. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multiagent systems with event-triggered mechanisms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(4): 1763-1770.
- [29] An L W, Yang G H. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(12): 6850-6857.
- [30] Li L, Yu Y, Li X X, et al. Exponential convergence of distributed optimization for heterogeneous linear multi-agent systems over unbalanced digraphs[J]. *Automatica*, 2022, 141: 110259.
- [31] Xian C X, Liu Y F, Zhao Y, et al. Distributed constrained optimal coordination of multiple heterogeneous systems over a directed communication network[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, 70(10): 6577-6592.
- [32] Deng Z H, Luo J. Fully distributed algorithms for constrained nonsmooth optimization problems of general linear multiagent systems and their application[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(2): 1377-1384.

- [33] Jiang S Y, Ding Z T. Distributed optimal resource allocation control for heterogeneous linear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, 70(5): 3378-3385.
- [34] Li S L, Nian X H, Deng Z H, et al. Predefined-time distributed optimization of general linear multi-agent systems[J]. *Information Sciences*, 2022, 584: 111-125.
- [35] Jin W L, Zhang H G, Yang Y P, et al. Distributed practical predefined-time output optimal allocation of resources for heterogeneous multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, 22: 19646-19654.
- [36] Ren W, Beard R W. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control[M]. London: Springer, 2008.
- [37] Song Y D, Wang Y J, Holloway J, et al. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time[J]. *Automatica*, 2017, 83: 243-251.
- [38] Ding T F, Ge M F, Xiong C H, et al. Prescribed-time formation tracking of second-order multi-agent networks with directed graphs[J]. *Automatica*, 2023, 152: 110997.
- [39] Su Y F, Huang J. Cooperative output regulation of linear multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1062-1066.
- [40] Isidori A. The zero dynamics of a nonlinear system: From the origin to the latest progresses of a long successful story[C]. Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, 2011: 18-25.
- [41] Montanari A N, Barioni A E D, Duan C, et al. Optimal flock formation induced by agent heterogeneity[J]. *Nature Communications*, 2025, 16: 9626.
- [42] Li S L, Nian X H, Deng Z H. Distributed optimization of general linear multi-agent systems with external disturbance[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(11): 5951-5970.
- [43] Siwakosit W, Hess R A. Multi-input/multi-output reconfigurable flight control design[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(6): 1079-1088.
- [44] Chen W, Chowdhury F N. Analysis and detection of incipient faults in post-fault systems subject to adaptive fault-tolerant control[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, 22(9): 815-832.

作者简介

郭志军, 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为多智能体分布式优化与学习、多机器人系统, E-mail: guozhijun@ncu.edu.cn;

程金蕾, 女, 硕士生, 主要研究方向为分布式优化和安全控制, E-mail: jinleicheng@email.ncuedu.cn;

黎倩, 女, 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为智能控制与人工智能, E-mail: qianli@ncu.edu.cn;

黄玉水, 男, 教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为智能控制与人工智能, E-mail: huangyushui@ncu.edu.cn.