

# 一种深度信念网络泛化误差边界量化方法及应用

王功明<sup>1,2†</sup>, 赵赫楠<sup>1</sup>, 韩红桂<sup>1,2</sup>, 乔俊飞<sup>1,2</sup>

(1. 北京工业大学 信息科学技术学院, 北京 100124; 2. 北京工业大学 智慧环保北京实验室, 北京 100124)

**摘要:** 深度信念网络 (Deep Belief Network, DBN) 是一种深度学习模型, 解决了传统神经网络因梯度消失导致的深层训练难题, 目前已被广泛应用. 然而, 与其他机器学习模型一样, DBN 泛化能力同样难以调控, 这对应用范围及效果提出了严峻挑战. 鉴于此, 提出一种深度信念网络泛化误差边界量化方法 (DBN with Quantitative Generalization, DBN-QG), 旨在解决 DBN 泛化误差上界不可控的问题, 提升泛化能力. 首先, 构建一个 DBN 模型, 分析训练误差与测试误差在数据序列上的关联特性, 给出泛化误差的数学描述. 其次, 通过分析模型的 Rademacher 复杂度、稀疏度等特性, 提出泛化误差边界上限可量化约束性定理, 给出证明. 最后, 根据泛化误差上界约束, 给出 DBN 模型在训练阶段的最优参数配置, 并将最优参数配置的 DBN-QG 用于预测胶州湾近海岸水环境 CO<sub>2</sub> 浓度. 实验结果显示, 所提出 DBN-QG 模型在预测精度和泛化性能方面均优于其他预测模型. 同时, DBN 泛化误差的边界量化方法不仅提高了其在 CO<sub>2</sub> 预测方面的可解释性, 同时为机器学习模型的量化分析提供了较为一般化的理论基础.

**关键词:** 深度信念网络; 泛化误差; 误差边界; 定量分析; CO<sub>2</sub> 预测; 胶州湾

**中图分类号:** TP183 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2025.1059

**引用格式:** 王功明, 赵赫楠, 韩红桂, 等. 一种深度信念网络泛化误差边界量化方法及应用 [J]. 控制与决策.

## A method for quantifying generalization error boundary of deep belief network and its applications

WANG Gong-ming<sup>1,2†</sup>, ZHAO He-nan<sup>1</sup>, HAN Hong-gui<sup>1,2</sup>, QIAO Jun-fei<sup>1,2</sup>

(1. College of Information Science and Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Beijing Laboratory of Smart Environmental Protection, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Deep belief network (DBN) is an effective deep learning model, which has addressed the deep training problem caused by vanishing gradients in traditional neural networks and been widely applied in multiple fields. However, like the other machine learning models, DBN also faces the problem of difficulty in regulating generalization ability, which poses a severe challenge to the application scopes and effects. This paper proposes a method for quantifying generalization error boundary of DBN (DBN-QG), aiming to solve the problem that the upper bound of generalization error is uncontrollable and improve the generalization ability. First, a DBN model is constructed, among which the correlation characteristics of training error and testing error are analyzed on the data sequence, and then providing a mathematical description of the generalization error. Second, by analyzing the Rademacher complexity and sparsity degree as well as the other characteristics, a quantifiable constraint theorem for the upper limit of the generalization error boundary is proposed and further proved. Finally, based on the upper bound constraint of the generalization error, the optimal parameter configurations are given in the training process, and the resulting DBN-QG is used to predict the CO<sub>2</sub> state of the coastal water environment in Jiaozhou Bay. The experimental results show that the proposed DBN-QG is superior to other models in terms of prediction accuracy and generalization performance. Furthermore, the boundary quantification method of DBN generalization error not only enhances its interpretability in CO<sub>2</sub> prediction, but also provides a relatively generalized theoretical basis for the quantitative analysis of machine learning models.

收稿日期: 2025-10-13; 录用日期: 2026-04-17.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (62373018); 北京市自然科学基金面上项目 (4232043); 中国博士后科学基金项目 (2025T180479).

责任编辑: 赵春晖.

†通信作者. E-mail: wanggm@bjut.edu.cn.

**Keywords:** deep belief network; generalization error; error boundary; quantitative analysis; CO<sub>2</sub> prediction; Jiaozhou Bay

## 0 引言

深度信念网络 (Deep belief network, DBN) 是一种借鉴深度学习思想建立起来的高效机器学习模型, 其解决了传统神经网络因梯度消失导致的深层训练难题<sup>[1]</sup>, 目前已被广泛应用于大数据分析、特征提取、建模与预测等多个领域<sup>[2-4]</sup>. 从模型结构和算法方面看, DBN 由多层受限玻尔兹曼机 (Restricted Boltzmann machine, RBM) 堆叠构成, 采用对比散度算法进行逐层无监督预训练, 最后通过反向传播算法进行参数微调, 进而实现了对深层神经网络的有效训练, 为现代深度学习技术的发展奠定了基础. 研究表明, 拥有多层结构的 DBN 具有更强大的复杂数据特征提取能力和大数据建模能力<sup>[5-6]</sup>.

随着深度神经网络学习理论和应用研究的不断发展, DBN 的研究也受到了多种性能指标的约束. 研究发现, 与其他机器学习模型一样, DBN 也面临着泛化能力难以调控的问题, 即泛化误差边界不可控, 这对任务场景间的泛化性能与应用效果提出了严峻的挑战<sup>[7-8]</sup>. 为了提升泛化性能, 相关研究人员开展了多种尝试. Fan 等人<sup>[9]</sup> 为提升模型泛化性能, 采用线性递减权重粒子群算法对模型超参数进行优化, 验证了所提出模型在碳排放领域复杂数据建模中的有效性和适用性. Zhou 等人<sup>[10]</sup> 分析了影响泛化能力的关联因素及特点, 提出了一种自组织模糊神经网络, 从稳定性和鲁棒性的角度提升了模型泛化能力. 相关预测实验结果表明, 这种自组织模糊神经网络能够通过模型结构自适应调整机制实现较好的泛化性能<sup>[11]</sup>. Hoy 等人<sup>[12]</sup> 提出了基于贝叶斯优化和集成学习的神经网络泛化能力提升策略, 并通过固体废弃物生成量的预测实验给出了有效性证明. 然而, 基于自组织和贝叶斯优化的模型自适应设计方法通常仅从模型学习策略优化的角度提升泛化能力, 对于模型结构上的连接特性考虑甚少. 为了挖掘模型稀疏表述能力, Wang 等人<sup>[13]</sup> 提出了 DBN 模型结构的稀疏连接机制, 通过在目标函数中添加稀疏惩罚项实现了对模型结构稀疏度与密集表述的有效平衡, 进而从稀疏表述的角度实现了模型对外部数据差异性的免疫反应, 提升了泛化能力. 为了进一步考虑多工况运行环境下的模型泛化能力提升问题, Wang 等人<sup>[14]</sup> 在分析模型结构连接特性的基础上, 提出了一种事件驱动的 DBN 学习策略, 以事件驱动代替时间驱动的方式增强了模型对外部非平稳因素的容错

能力, 并在水环境水质状态预测应用中验证了其在提升泛化性能方面的有效性. 研究发现, 神经网络作为学习模型载体, 只有在数据驱动的作用下才能展现其动力学特性, 即神经网络对数据具有极强的依赖性. 然而, 上述方法尽管在泛化能力提升方面产生了实质效果, 但它们主要从模型自适应学习能力提升的角度出发, 忽略了外部非平稳数据对模型复杂度、可解释性等方面的影响.

为了进一步强化神经网络泛化性能, 从多个角度提升泛化能力, Han 等人<sup>[15]</sup> 通过平衡模型学习精度与计算复杂度, 设计一种基于复杂度描述的方法来提升模糊神经网络泛化能力, 并在污水处理过程的水质建模与预测应用中验证了其可行性. Zhang 等人<sup>[16]</sup> 提出一种基于自适应鲁棒模糊神经网络, 降低了模型对外部干扰的敏感度提升泛化能力, 并在膜透水率的在线检测中得到验证. Guo 等人<sup>[17]</sup> 分析了训练数据与测试数据的特点, 提出了一种融合迁移学习的 DBN, 通过共有特征迁移克服了训练数据与测试数据之间的差异性, 实现了 DBN 在泛化性能上的显著提升. Peng 等人<sup>[18]</sup> 从小批量训练策略入手, 通过优化分批训练样本、选择性抓取样本关键固有特性等方法, 提出了一种基于非典型样本采样的深度神经网络训练算法来提升泛化性能. Imaizumi 等人<sup>[19]</sup> 通过统计学习理论分析过拟合特性, 并在此基础上提出了融合高斯梯度噪声的损失曲面隐式正则化方法, 从抑制过拟合的角度提升了泛化性能. Ballas 等人<sup>[20]</sup> 提出了一种基于对比学习的数据域泛化性能提升方法, 通过利用神经网络模型的多层和多尺度表述实现了泛化性能的局部可控, 并在多个数据集的泛化测试实验中证明了所提方法的有效性. He 等人<sup>[21]</sup> 针对深度神经网络的深层结构特点, 在不同隐含层层数配置下获得训练和测试结果, 通过求取不同配置下训练和测试之间的 KL 散度来分析泛化性能, 进而有针对性地提升了泛化能力. 以上方法的理论研究和应用效果表明, DBN 作为一种具有深度结构的神经网络, 具有较强的学习能力和自适应扩展潜力<sup>[22]</sup>, 适应于复杂状态特征学习和时间序列建模及预测控制<sup>[23-24]</sup>. 然而, 当应用场景对模型在不同数据集之间的泛化性能具有较高要求时, 尽管现有的 DBN 泛化能力提升方法取得了明显的效果, 但仍缺乏理论基础和可解释性. 尤其是, 在面临多场景的泛化性能提升时, 严重缺乏较为统一的泛化误差

定量分析理论支撑. 因此, 如何在复杂应用场景中有效提升 DBN 在数据表征与预测过程中的泛化性能<sup>[25-27]</sup>, 同时给出具有可解释性的定量分析理论是 DBN 理论与应用研究的重要挑战.

针对以上问题, 本文提出了一种 DBN 泛化误差边界量化方法 (DBN-QG), 旨在解决 DBN 泛化误差上界不可控的问题, 有效提升泛化能力, 并通过胶州湾近海岸水环境 CO<sub>2</sub> 浓度建模与预测验证所提方法的有效性. 本文主要贡献总结如下:

1) 构建了数据驱动的 DBN 标准模型, 分析了训练误差与测试误差在数据序列上的关联特性, 给出了泛化误差的数学描述.

2) 分析了 DBN 模型的 Rademacher 复杂度、覆盖数和稀疏度等特性, 提出了泛化误差边界上限可量化约束性定理, 并给出了证明.

3) 根据泛化误差上界约束, 给出了 DBN 模型在训练阶段的最优参数配置, 并将最优参数配置的 DBN-QG 用于预测胶州湾近海岸水环境 CO<sub>2</sub> 浓度.

最后, 实验结果显示, 所提出的 DBN-QG 模型在预测精度和泛化性能方面均明显优于其他预测模型. 另外, 泛化误差的边界量化方法不仅提高了 DBN-QG 在预测任务中的可解释性, 同时为机器学习模型的量化分析提供了较为一般化的理论基础.

## 1 问题描述

### 1.1 DBN 模型

DBN 是一种深度神经网络, 通过无监督预训练和有监督精调两个阶段完成训练. DBN 模型由输入层、多个隐含层 (每两层构成一个受限玻尔兹曼机, RBM) 和输出层构成. 在训练过程中, 首先对所有的 RBM 逐个进行无监督预训练, 获得整个模型的初始权重; 然后在给定期望输出值的基础上对整个模型进行有监督的精调, 进而获得最优权重.

其中 DBN 的输入为  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , 输出为  $\hat{\mathbf{y}}(t) = [\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_m(t)]$ . 当给定模型结构时, DBN 的主要任务是训练并获得最优权重矩阵  $\mathbf{w}$ . 在无监督学习过程中, 初始权重矩阵  $\mathbf{w}_r$  将通过依次训练几个堆叠的 RBM 获得. 假设  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{h}$  分别表示第一个 RBM 的输入和输出, 其初始权重矩阵  $\mathbf{w}_r$  的更新公式如下:

$$\mathbf{w}_{r1}(t+1) = \mathbf{w}_{r1}(t) - \eta \Delta \mathbf{w}_{r1}(t), \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{w}_{r1}(t) = D(\mathbf{v}_i \mathbf{h}_j) - \hat{D}(\mathbf{v}_i \mathbf{h}_j), \quad (2)$$

其中,  $\eta$  表示 RBM 的学习率,  $D(\mathbf{v}_i \mathbf{h}_j)$  和  $\hat{D}(\mathbf{v}_i \mathbf{h}_j)$  分别表示 RBM 的初始状态值和训练状态值. 一般来讲,  $\hat{D}(\mathbf{v}_i \mathbf{h}_j)$  可以通过 Gibbs 采样来近似获得. 其他

的 RBM 可根据公式 (1) 和 (2) 来训练, 进而得到初始权重矩阵  $\mathbf{W}_r$ .

在有监督学习过程中, 根据标签数据对  $\mathbf{w}_r$  进行靶向优化, 可以获得最优权重矩阵  $\mathbf{w}$ , 即如果  $\mathbf{y}(t)$  和  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  分别是目标输出和 DBN 输出, 那么最优权重矩阵  $\mathbf{w}$  可通过下式求解:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t+1) &= \mathbf{w}(t) - \gamma \frac{\partial(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))}{\partial \mathbf{w}(t)} \\ \mathbf{w}(0) &= \mathbf{w}_r, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\gamma$  为有监督学习步长.

**问题 1** 由 DBN 训练过程及公式 (1)-(3) 可知, 通过训练可使 DBN 的输入输出动力学特性等效为一个非线性映射  $f: \mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{Y}(t)$ . 然而, 映射  $f$  的性能仅在训练集上有效, 而无法保证在测试集或其他场景中的有效性, 即 DBN 模型的泛化性能不可控. 这种不可控的泛化性能极大地影响着 DBN 的应用效果, 严重时会导致模型无法应用或应用失败. 因此, 对模型泛化性能进行量化分析是提升 DBN 性能的一项重要任务, 也是研究机器学习过程中无法回避的一个挑战性问题.

### 1.2 DBN 泛化误差

给定训练样本  $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\}^N$ , 由公式 (1)-(3) 可知, 训练获得的 DBN 动力学特性可表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \hat{\mathbf{y}}(t) + \varepsilon(t) = f(\mathbf{w}(t), \mathbf{x}(t)) + \varepsilon(t) \\ t &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{y}(t)$  和  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  分别为 DBN 的期望输出和实际输出,  $f(\cdot)$  为 DBN 输入输出的等效函数,  $\varepsilon(t)$  表示训练误差,  $N$  为训练样本个数. 因此, 表征训练过程精度的经验误差可表示为:

$$\begin{aligned} E_{tp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \varepsilon(t)^T \varepsilon(t) = \\ &= \frac{\sum_{t=1}^N d_e(f(\mathbf{w}(t), \mathbf{x}(t)), \mathbf{y}(t))}{2N}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $d_e(\cdot, \cdot)$  表示欧氏距离函数. 如果样本足够大, 那么 DBN 在测试样本中的动力学特性可表示为:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \hat{\mathbf{y}}(t) + \xi(t) = f(\mathbf{w}(t), \mathbf{x}(t)) + \xi(t) \\ t &= N+1, N+2, \dots, N+K, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\xi(t)$  表示预测误差,  $K$  为测试样本个数. 因此, 表征测试过程精度的预测误差可表示为:

$$\begin{aligned} E_{pp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \tilde{\mathbf{y}}) &= \frac{1}{2} \xi(t)^T \xi(t) = \\ &= \frac{\sum_{t=N+1}^{N+K} d_e(f(\mathbf{w}(t), \mathbf{x}(t)), \tilde{\mathbf{y}}(t))}{2K}. \end{aligned} \quad (7)$$

根据公式 (4)-(7) 可得, DBN 模型的泛化误差为:

$$GE = |E_{tp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \mathbf{y}) - E_{pp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \tilde{\mathbf{y}})|. \quad (8)$$

由公式 (8) 可知, 泛化误差 GE 揭示了经验误差和测试误差之间的差距, 在应用过程中越小越好.

**问题 2** 根据公式 (4)-(8), 泛化误差 GE 不仅受预测过程不确定性因素影响, 而且对等效函数  $f(\cdot)$  具有较强的敏感性. 因此, 有必要通过分析训练过程的相关参数来定量地给出 GE 的上界.

## 2 DBN 泛化误差边界量化方法

为了解决问题 1 和问题 2 中面临的挑战, 本节提出一种 DBN 泛化误差边界量化方法 (DBN-QG), 并给出理论证明.

### 2.1 DBN 训练过程的基本概念与关键特性

**(1) 假设类** 如果在训练过程中通过  $\kappa$  次迭代后, DBN 输入输出特性的等效函数空间为  $S_\kappa$ , 那么 DBN 训练结果的假设类可表示为:

$$S_{DBN, \kappa} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow E_{tp}(f) | f \in S_\kappa\}. \quad (9)$$

公式 (9) 表明, 假设类中任意一个函数输出都与 DBN 在训练过程中的经验误差相关.

**(2) Rademacher 复杂度** 在机器学习理论中, 模型的复杂度是衡量其训练“程度”的有效性指标. 在 DBN 模型中, 本文拟将 Rademacher 复杂度用于评估模型的泛化能力, 其核心思想是通过分析模型在随机噪声数据上的拟合程度来推断实际数据的泛化误差, 可表示为:

$$R_N(S_{DBN, \kappa}) = \mathfrak{R}\left(\sup_{\lambda} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \lambda_t E_{tp}(f)\right), \quad (10)$$

其中,  $\lambda_t$  是独立同分布的 Rademacher 自由变量 (取值为 1 或 -1) 且  $P(\lambda_t = 1) = P(\lambda_t = -1) = 0.5$ ,  $\mathfrak{R}(\cdot)$  表示用于求解增加 Rademacher 自由变量后训练误差期望的函数. 因此, 第  $j$  个隐含层输出与  $\lambda_t$  之间的相关性指数可表示为:

$$R_N(S_{DBN, \kappa}\{j\}) = \mathfrak{R}\left(\sup_{\lambda} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \lambda_t E_{tp}(f)\{j\}\right), \quad (11)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, l$ ,  $l$  是 DBN 隐含层层数. 反映了 DBN 不同隐含层层数配置和 Rademacher 自由变量  $\lambda_t$  作用下误差期望的稳定性. 因此,  $R_N(S_{DBN, \kappa}\{j\})$  可作为量化分析泛化误差 GE 的重要指标.

**(3) 覆盖数** 在机器学习中, 覆盖数是从统计的角度描述数据集的复杂度的重要工具, 能反映模型在训练集误差与实际测试误差之间的联系. 假设在 DBN 等效函数空间  $S_\kappa$  中有  $N_\kappa$  个函数, 那么其覆盖

数可表示为:

$$N(\varepsilon, S_\kappa, d_\varepsilon) = \min_{N_\kappa} \{(f_1, \dots, f_{N_\kappa}) | d_\varepsilon(f_i(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \mathbf{y}) \leq \varepsilon\}, \quad (12)$$

其中,  $\varepsilon$  是误差阈值.

**(4) 稀疏度** 在神经计算中, 模型节点间的连接稀疏度是衡量模型可移植性和鲁棒性的重要参数之一. 对于 DBN 模型, 其稀疏度可表示为:

$$s_d = \frac{n(0 \leq w(i, j) \leq 0.1)}{n_{w(i, j)}}, \quad (13)$$

其中,  $n(0 \leq w(i, j) \leq 0.1)$  和  $n_{w(i, j)}$  分别是表示满足  $0 \leq w(i, j) \leq 0.1$  的权值连接参数个数和所有权值连接参数个数.

为实现稀疏度的显式控制, 采用 L1 正则化诱导权重稀疏, 总损失函数定义为:  $L_{total} = L_{base} + \lambda_1 \sum_{i, j} |w(i, j)|$ . 其中,  $L_{base}$  为均方误差损失,  $\lambda_1 = 0.002$  (通过交叉验证确定). 训练过程中每 50 次迭代计算一次稀疏度  $s_d$ , 若  $s_d < 0.3$  则将  $\lambda_1$  乘以 1.2; 若  $s_d > 0.5$  则乘以 0.8, 确保最终稀疏度稳定在  $0.4 \pm 0.05$  范围内.

### 2.2 GE 边界量化方法

根据概率近似正确 (PAC) 学习理论及相关结论<sup>[28-29]</sup>, GE 的上界可通过分析假设类来界定. 给定任意常数  $\varphi \in (0, 1)$ , 任意训练结果  $f \in S_\kappa$  的泛化误差能以  $1 - \varphi$  的最小概率被界定为:

$$GE = |E_{tp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \mathbf{y}) - E_{pp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \tilde{\mathbf{y}})| \leq 2R_N(S_{DBN, \kappa}) + \sqrt{\frac{\log(1/\varphi)}{2N}} \leq \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l R_N(S_{DBN, \kappa}\{j\}) + \sqrt{\frac{\log(1/\varphi)}{2N}}. \quad (14)$$

通过进一步分析可得出 GE 上界的具体表达式, 如定理 1 所述.

**定理 1** 给定任意常数  $\varphi \in (0, 1)$ , 那么 DBN 任意训练结果  $f \in S_\kappa$  的泛化误差能以最小概率  $1 - \varphi$  实现有界, 且上界可被定量描述为:

$$GE = |E_{tp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \mathbf{y}) - E_{pp}(f(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \tilde{\mathbf{y}})| \leq \frac{\mu}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{\log(1/\varphi)}{2N}} + \frac{12}{N} \sqrt{(\kappa n_1 s_d + \frac{n_h \kappa^2 s_d^2}{2}) \log(4\sqrt{Nl} s_d \kappa \beta^2)}, \quad (15)$$

其中,  $N$  是训练样本个数,  $\kappa$  是训练迭代次数,  $l$  是隐含层层数,  $n_1$  和  $n_h$  分别表示第一个隐含层和其他隐含层的节点个数,  $s_d$  为 DBN 结构稀疏度,  $\beta$  表示 DBN 连接权值的上限 ( $w(i, j) \leq \beta$ ).

**证明** 基于公式 (15) 和 PAC 学习理论, 继续分析  $R_N(S_{\text{DBN},\kappa}\{j\})$  可得:

$$R_N(S_{\text{DBN},\kappa}\{j\}) \leq \inf_{\mu > 0} \left( \frac{\mu}{\sqrt{N}} + \frac{12}{N} \int_{\mu}^{\sqrt{N}} \sqrt{\log N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e)} d\varepsilon \right), \quad (16)$$

其中,  $\mu > 0$  是一个常数. 根据节点之间连接权值矩阵特定及其对覆盖数的影响<sup>[28-29]</sup> 可知, 覆盖数满足以下特性:

$$N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e) \leq \prod_{i=1}^{\kappa} N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta_{\omega}}, \mathbf{w}_1(i), d_e\right) \times \prod_{i=2}^{\kappa} N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta_{\omega}}, \mathbf{w}_2(i), d_e\right) \times \dots \times \prod_{i=l-1}^{\kappa} N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta_{\omega}}, \mathbf{w}_{l-1}(i), d_e\right) \times N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta_{\omega}}, \mathbf{w}_l(j), d_e\right), \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{w}_l(j)$  表示第  $j$  个样本数据训练下的输出权值矩阵. 由公式 (17) 可知,  $R_N(S_{\text{DBN},\kappa}\{j\})$  主要受限于权值矩阵. 因此, 根据权值矩阵特性<sup>[28-29]</sup> 可得:

(1) 权值矩阵的有界性假设: 根据 DBN 模型定义, 连接权值  $w(i, j) \leq \beta$  ( $\beta$  为权值上限), 结合稀疏度  $s_d$ , 可得有效权值 ( $w(i, j) \neq 0$ ) 的上限为  $\beta\sqrt{s_d}$ .

(2) 覆盖数的乘积性质: 对于堆叠的 RBM 层, 每层权值矩阵的覆盖数满足乘积关系, 即

$$N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e) = \prod_{k=1}^l N(\varepsilon_k, \mathbf{w}_k, d_e), \quad (18)$$

其中  $\varepsilon_k = \varepsilon / ((2\kappa+1)\beta)$ , 且  $\sum_{k=1}^l \varepsilon_k \leq \varepsilon$ .

(3) 单层 RBM 的覆盖数计算: 对于第  $k$  层 RBM, 节点数为  $n_k$ , 稀疏度  $s_d$ , 则有效节点数为  $n_k s_d$ , 其覆盖数满足:

$$N(\varepsilon_k, \mathbf{w}_k, d_e) \leq \left( \frac{4\beta\sqrt{s_d}}{\varepsilon_k} + 1 \right)^{n_k s_d}, \quad (19)$$

代入  $\varepsilon_k = \varepsilon / ((2\kappa+1)\beta)$ , 化简得:

$$N(\varepsilon_k, \mathbf{w}_k, d_e) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right)^{n_k s_d}. \quad (20)$$

(4) 任意两个隐含层间矩阵空间的覆盖数满足:

$$N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta}, \mathbf{w}_1, d_e\right) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta\mathbf{w}_1}{\varepsilon} + 1 \right)^{n_1 s_d} \\ N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta}, \mathbf{w}_2, d_e\right) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta\mathbf{w}_2}{\varepsilon} + 1 \right)^{(1-s_d)n_2 s_d}$$

...

$$N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta}, \mathbf{w}_{l-1}, d_e\right) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta\mathbf{w}_{l-1}}{\varepsilon} + 1 \right)^{(1-s_d)n_{l-1} s_d} \\ N\left(\frac{\varepsilon}{(2\kappa+1)\beta}, \mathbf{w}_l, d_e\right) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta\mathbf{w}_l}{\varepsilon} + 1 \right), \quad (21)$$

其中,  $n_l$  表示第  $l$  个隐含层的节点数, 且  $1 \leq i \leq \kappa$ . 由权值矩阵的上限、稀疏特性<sup>[28-29]</sup> 可知,  $\mathbf{w}_l(i)$  的上界可表示为  $\mathbf{w}_l(i) \leq \beta\sqrt{s_d}$ . 因此, 公式 (17) 可表示为:

$$N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right)^{n_1 s_d} \times \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right)^{(1-s_d)n_2 s_d} \times \dots \times \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right)^{(1-s_d)n_{l-1} s_d} \times \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right). \quad (22)$$

当  $n_2 = n_3 = \dots = n_{l-1} = n_h$  时, 公式 (22) 进一步表示为:

$$N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e) \leq \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right)^x, \quad (23)$$

$$\chi = 1 + \kappa n_1 s_d + \frac{n_h \kappa (\kappa - 1)}{2} (1 - s_d) s_d, \quad (24)$$

基于公式 (23) 和公式 (24) 可知, 公式 (16) 的积分项上界可表示为:

$$\int_{\mu}^{\sqrt{N}} \sqrt{\log N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e)} d\varepsilon \leq \int_{\mu}^{\sqrt{N}} \sqrt{\chi \log \left( \frac{(4\kappa+2)\sqrt{l}\beta^2\sqrt{s_d}}{\varepsilon} + 1 \right)} d\varepsilon \leq \sqrt{\chi} \sqrt{\log((\sqrt{N} - \mu)((4\kappa+2)\sqrt{l}s_d\beta^2) + 1)}. \quad (25)$$

当训练样本足够多时可知  $\kappa \gg 1$  和  $\sqrt{N} \gg \mu$ , 且  $s_d$  通常较小, 因此公式 (25) 可进一步表示为:

$$\int_{\mu}^{\sqrt{N}} \sqrt{\log N(\varepsilon, S_{\kappa}\{j\}, d_e)} d\varepsilon \leq \sqrt{(\kappa n_1 s_d + \frac{n_h \kappa^2}{2} s_d^2) \log(4\sqrt{N} l s_d \kappa \beta^2)}. \quad (26)$$

基于公式 (26) 更新公式 (16), 可得:

$$R_N(S_{\text{DBN},\kappa}\{j\}) \leq \frac{\mu}{\sqrt{N}} + \frac{12}{N} \sqrt{(\kappa n_1 s_d + \frac{n_h \kappa^2}{2} s_d^2) \log(4\sqrt{N} l s_d \kappa \beta^2)}. \quad (27)$$

进一步更新公式 (14), 可得:

$$GE \leq \frac{\mu}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{\log(1/\varphi)}{2N}} + \frac{12}{N} \sqrt{(\kappa n_1 s_d + \frac{n_h \kappa^2 s_d^2}{2}) \log(4\sqrt{Nl s_d \kappa \beta^2})}. \quad (28)$$

**定理 1** 证毕.

### 2.3 GE 边界主导变量分析

由公式 (28) 可知, 泛化误差上边界主要由训练过程中的超参数决定. 因此, 可通过合理选取、设定这些超参数来最小化泛化误差的上边界. 下面给出一些具体分析:

1) **训练样本数量  $N$**  训练样本是 DBN 模型获取关于任务世界先验知识的唯一来源. 通过训练过程, DBN 模型将训练样本中蕴含的规律内化为自身的参数, 这些参数随后构成了模型在面对新问题时进行推理和预测所依赖的全部先验知识基础. 当训练样本数量越大时, DBN 模型学习到的任务世界先验知识就会越多. 因此, 在相关数据可获取的前提下, 训练样本数量  $N$  越大越好.

2) **训练迭代次数  $\kappa$**  训练迭代次数是一个关键变量, 它决定着 DBN 模型在训练过程中的“训练充分度”. 当  $\kappa$  增大时, DBN 模型通常能够较充分地提取训练样本中的动态特性. 然而,  $\kappa$  过大时, 训练过程容易出现过拟合现象. 因此, 训练迭代次数  $\kappa$  不能太小或太大, 需要寻找一个折中方案.

3) **稀疏度  $s_d$**  稀疏表述是衡量 DBN 模型内部连接方式的一个重要参量. 稀疏连接能够使得模型更加适合用来表征高维且关键信息较少的数据. 稀疏度  $s_d$  在控制 DBN 模型信息表征能力的同时, 还能调整模型输出信息的鲁棒性能. 因此, 稀疏度  $s_d$  也不能太大, 需要在保证稀疏学习的基础上, 不能降低模型对信息的表征能力.

4) **模型结构参数  $n_1, n_h$  和  $l$**  由公式 (28) 可知, 当模型结构参数  $n_1, n_h$  和  $l$  较小时, DBN 泛化误差的上界则相应减小. 但随着结构参数增大, 模型计算复杂度可能会呈指数增加, 会导致模型训练过程的能耗过大. 因此, 应该结合能耗指标、泛化误差指标合理选择模型结构参数的取值.

5) **其他参数** 概率常数  $\varphi$  是保证 DBN 泛化能力有界的置信度参数, 在保证有界的情况下  $\varphi$  又影响着泛化误差的上界大小, 因此  $\varphi$  一般取值在 0.7-0.9 之间. 模型节点间连接权值最大值  $\beta$  是表征 DBN 密集连接上限的参量, 为保证模型学习过程中的稳定性及输出波动最小化, 一般将  $\beta$  设置为较小值, 但需要控制在稀疏度之上.

## 3 仿真分析

### 3.1 数据预处理方案

为了验证 DBN 泛化误差边界量化方法的有效性, 根据公式 (28) 对 DBN 训练过程的主要参数 (如表 1 所示) 进行反馈调整, 并将提出的 DBN-QG 用于胶州湾近海岸  $\text{CO}_2$  浓度预测中. 训练过程中, 模型输入是影响  $\text{CO}_2$  浓度变化的相关辅助变量, 输出是  $\text{CO}_2$  浓度 (如表 2 所示). 相关数据来自胶州湾近海岸区域环境检测站点及环保部门, 时间跨度自 2000 年 1 月至 2024 年 12 月, 总共收集 9600 组数据.

表1 影响 DBN-QG 泛化误差的关键参数

参数	含义
$N$	训练样本数
$\kappa$	训练迭代次数
$s_d$	模型稀疏度
$n_1$	第一个隐含层节点数
$n_h$	其他隐含层节点数
$l$	隐含层层数
$\beta$	连接权值最大值

表2 DBN-QG 的输入输出变量

输入输出	单位	含义
$x_1(t)=\text{CO}_2(t)$	ppm	$\text{CO}_2$ 浓度
$x_2(t)=T(t)$	$^{\circ}\text{C}$	气温
$x_3(t)=H(t)$	%	相对湿度
$x_4(t)=\text{Pop}(t)$	万人	人口
$x_5(t)=\text{Pa}(t)$	Pa	大气压
$x_6(t)=\text{Cg}(t)$	$\text{m}^3$	汽油消耗量
$x_7(t)=\text{Cp}(t)$	kWh	用电量
$x_8(t)=\text{GDP}(t)$	¥	GDP
$x_9(t)=\text{Ru}(t)$	%	城市化率
$x_{10}(t)=\text{Ri}(t)$	%	工业化率
$x_{11}(t)=\text{Li}(t)$	lx	光照
$x_{12}(t)=\text{Sp}(t)$	吨	贝类产量
$y_1(t)=\text{CO}_2(t+k)$	ppm	下一时刻 $\text{CO}_2$ 浓度

模型输入包含日度环境数据 (气温、湿度等) 与年度数据 (GDP、人口等), 采用差异化预处理策略:

(1) 趋势性宏观指标 (GDP): 通过最小二乘法拟合年度增长趋势  $GDP(y) = ay + b$ , 结合日度时间映射  $y(t) = 2000 + [(t-1)/365.25]$  与年度微小变动部分  $\Delta GDP: \Delta GDP(t) = \frac{GDP(y(t)+1) - GDP(y(t))}{365.25} \cdot day(t)$ , 生成日度 GDP 数据.

(2) 稳定性宏观指标 (人口、贝类产量等): 基于相邻年度均值填充  $Pop_{daily}(t) = \frac{Pop(y(t)) + Pop(y(t)+1)}{2}$ , 保留年度级变化特征.

(3) 合理性验证: 插值后数据与原始年度数据的相对误差均小于 3%, Pearson 相关系数大于 0.95. 时间轴完全对齐.

需要指出的是, 采用线性插值法将 GDP 年度数据日度化的目的是实现与日度数据维度上的统一. 至于气温、湿度等日度变量具有高度随机波动性则属于不可控的外部干扰, 与插值处理后的 GDP 数据融合建模时不会对整体数据集的非线性特性产生太大影响, 或影响甚微. 主要原因在于, 线性插值处理后的数据与具有随机波动性的日度环境数据同属于输入特征向量中的分量, 基本不存在相互影响.

### 3.2 实验分析

在训练过程中, 根据公式 (28) 采取“定六寻一”的策略交互验证泛化误差上界量化方法的有效性. 图 1-4 给出了不同参数配置下的泛化误差变化曲线. 考虑到神经计算模型存在的随机性, 实验中对每个参数独立重复测试 5 次, 绘制出平均性能曲线. 同时, 每个参数对泛化误差影响曲线的其他参数配置均在图例中给出. 可以看出, 训练过程中关键参数对泛化误差的影响基本与公式 (28) 展现特性相吻合.

结合图 1-4 结果与公式 (28), 可将 DBN-QG 在训练过程中的关键参数最优配置选为:  $N = 7200$ ,  $\kappa = 300$ ,  $s_d = 0.4$ ,  $n_1 = 12$ ,  $n_h = 10$ ,  $l = 4$ ,  $\beta = 0.8$ . 基于以上最优参数配置, 将 DBN-QG 在测试数

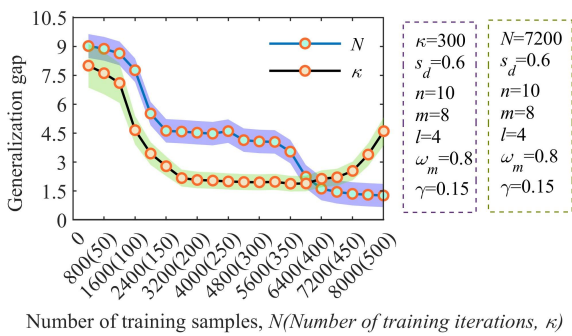


图1 训练样本数和训练迭代次数对泛化误差的影响曲线

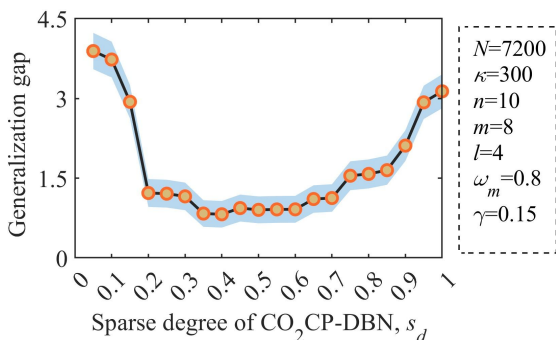


图2 稀疏度对泛化误差的影响曲线

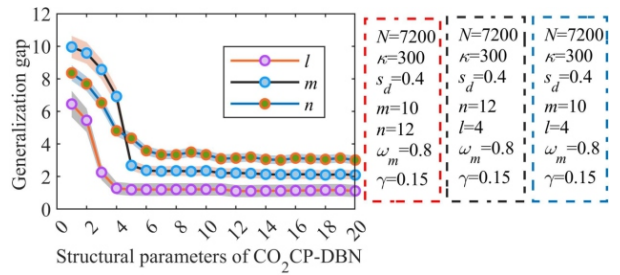


图3 模型结构参数对泛化误差的影响曲线

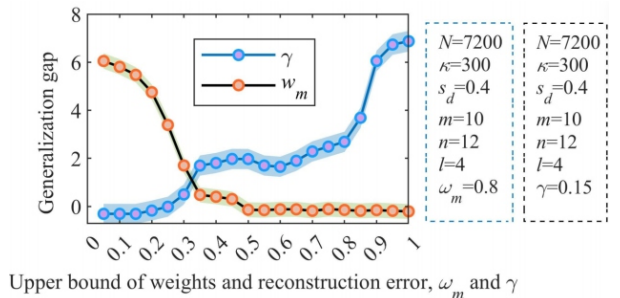


图4 连接权值上限对泛化误差的影响曲线

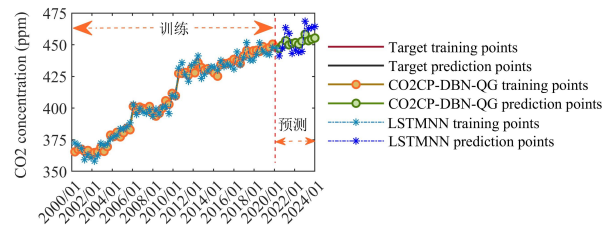


图5 DBN-QG 与 LSTMNN 的训练和预测结果

据集上进行预测实验. 图 5 给出了 DBN-QG 与 LSTMNN 在训练和预测过程中的性能对比结果. 可以看出, DBN-QG 在训练过程中的建模精度相较于 LSTMNN 的优势并不明显, 但在测试过程中的预测精度相较于 LSTMNN 的优势非常明显. 主要原因是 DBN-QG 按照泛化误差上界量化与最小化策略优化了训练过程中的关键参数, 使得其在预测过程中取得了较小的误差.

### 3.3 对比实验

为了更全面地展现 DBN-QG 在建模与预测  $CO_2$  浓度过程中的优势, 进行了 20 次独立重复对比试验. 对比结果如表 3 所示. 对比结果显示, 所提出的 DBN-QG 在泛化误差上界量化策略的指导下取得了较其他方法更精确的建模性能, 并且其在测试集上的预测结果仍然是最优的. 同时, DBN-QG 在多次试验中的波动性也是最小的, 主要原因在于对模型稀疏度的调控增强了其鲁棒性和稳定性. 另外, DBN-QG 的运行时间较短, 这说明参数优化这一耗时“工作”在泛化误差量化方法与最优参数配置下得到了针对性的加速寻优.

表3 DBN-QG 与其他预测模型的对比结果

模型	训练RMSE	预测 RMSE	运行时间 (s)
DBN	18.24±2.85	27.98±3.13	65.62±8.34
LSTMNN	11.69±1.72	20.81±2.46	29.38±2.79
FNN	13.52±1.36	19.84±2.17	27.16±2.31
RBFNN	16.15±2.48	30.49±2.95	25.72±3.42
BPNN	27.82±4.15	41.39±5.92	69.35±5.61
DBN-QG	6.76±0.93	8.13±0.98	19.68±0.76

以上实验结果基本印证了泛化误差量化方法与公式(28)结论的可行性,为DBN模型在训练过程中快速积累有效先验知识提供了参数优化方案,也为其应用测试提供了性能边界的可调控策略。

### 3.4 讨论

以上实验结果显示, DBN-QG 方法在数据量相对充足的情况下取得了较好的效果. 然而, 其在小样本场景、非平稳数据及高维稀疏数据上的性能表现会略有下降, 现给出以下分析:

(1) 数据类型: DBN-QG 适用于时间序列数据(如水质、环境监测数据), 尤其适合同时包含短期动态特征(日度环境数据)和长期趋势特征(年度宏观数据)的混合数据源。

(2) 数据规模: 适用于中大规模数据, 此时理论上界紧致性最佳, 参数优化效果最显著. 然而, 数据量不足时, 泛化误差理论上界会明显增大, “紧致性”欠佳, 这也是神经计算模型普遍存在的问题。

(3) 任务场景: 适用于预测任务(如浓度预测、状态评估)“工况”稳定的场景, 对非平稳的状态下的建模与预测性能会略有下降, 此时表现出泛化误差理论上界的“紧致性”不高。

(4) 高维稀疏数据: 当数据存在高维稀疏特性时, 为保证学习精度, 模型计算复杂度势必会大幅增加. 这种情况下, DBN-QG 需要先通过 PCA 或 Lasso 进行关键特征选择, 降低输入维度。

因此, 在面临小样本场景、非平稳数据及高维稀疏数据等场景时, 应首先通过少量样本快速调整模型参数, 提升小样本泛化能力. 然后, 引入变分自编码器(VAE)提取数据的平稳特征, 再输入 DBN-QG 进行训练与预测. 最后, 采用注意力机制自动筛选关键特征, 降低模型计算复杂度。

## 4 结论

针对机器学习模型在建模与预测任务中普遍存在的泛化误差边界不可控、难以量化等问题及困扰, 本文以深度信念网络作为研究对象模型, 提出了一种泛化误差上界量化方法, 解决了深度信念网络泛化误差上界不可控的问题, 提升了泛化学习的可解释性. 通过分析训练误差与测试误差在数据时序上

的关联特性, 给出了泛化误差的数学描述. 同时, 基于 Rademacher 复杂度、覆盖数和稀疏度等特性解析, 提出了泛化误差边界上限可量化约束性定理, 并给出了证明. 所提出的泛化误差上界量化方法将机器学习中“离散化”的开环训练-测试过程转化为“连续化”的闭环训练-测试过程, 大幅提升了模型的训练效率, 且保证了其在目标域中的测试性能, 为多任务泛化和应用提供了可行的理论保障。

最后, 通过胶州湾近海岸 CO<sub>2</sub> 浓度预测实验验证了所提方法的有效性. 实验结果显示, 所提出的 DBN-QG 模型在预测精度和泛化性能方面均明显优于其他预测模型. 另外, 泛化误差的边界量化方法不仅提高了 DBN-QG 在预测任务中的可解释性, 同时为机器学习模型的性能量化分析提供了较为一般化的理论基础。

### 参考文献 (References)

- [1] Hinton G E, Osindero S, Teh Y W. A fast learning algorithm for deep belief nets[J]. *Neural Computation*, 2006, 18(7): 1527-1554.
- [2] 潘广源, 柴伟, 乔俊飞. DBN 网络的深度确定方法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(2): 256-260.  
(Pan G Y, Chai W, Qiao J F. Calculation for depth of deep belief network[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(2): 256-260.)
- [3] 王功明, 乔俊飞, 关丽娜, 等. 深度信念网络研究现状与展望[J]. *自动化学报*, 2021, 47(1): 35-49.  
(Wang G M, Qiao J F, Guan L N, et al. Review and prospect on deep belief network[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(1): 35-49.)
- [4] Mohamed A R, Dahl G E, Hinton G. Acoustic modeling using deep belief networks[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2012, 20(1): 14-22.
- [5] Wang G M, Qiao J F, Bi J, et al. An adaptive deep belief network with sparse restricted Boltzmann machines[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(10): 4217-4228.
- [6] Wang G M, Yuan G H, Hu Z Q, et al. Complexity-based structural optimization of deep belief network and application in wastewater treatment process[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2024, 20(4): 6974-6982.
- [7] Singh M, Dubey R K. Deep learning model based CO<sub>2</sub> emissions prediction using vehicle telematics sensors data[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2023, 8(1): 768-777.
- [8] Wang G M, Qiao J F, Liu C X, et al. How deep is deep enough for deep belief network for approximating model predictive control law[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2022, 19(3): 2067-2078.
- [9] 樊学秀, 江可申, 覃素平, 等. 分数阶多项式驱动的自适应灰色模型在碳排放预测中的应用[J]. *控制与决策*,

- 2026, 41(1): 143-152.  
(Fan X X, Jiang K S, Qin S P, et al. An adaptive grey prediction model driven by fractional-order polynomial and its application in carbon emission forecasting[J]. *Control and Decision*, 2026, 41(1): 143-152.)
- [10] Zhou H B, Zhang Y, Duan W P, et al. Nonlinear systems modelling based on self-organizing fuzzy neural network with hierarchical pruning scheme[J]. *Applied Soft Computing*, 2020, 95: 106516.
- [11] Zhou H B, Li Y, Zhang Q Y, et al. Soft-sensing of effluent total phosphorus using adaptive recurrent fuzzy neural network with Gustafson-Kessel clustering[J]. *Expert Systems with Applications*, 2022, 203: 117589.
- [12] Hoy Z X, Woon K S, Chin W C, et al. Forecasting heterogeneous municipal solid waste generation via Bayesian-optimised neural network with ensemble learning for improved generalisation[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2022, 166: 107946.
- [13] Wang G M, Jia Q S, Qiao J F, et al. A sparse deep belief network with efficient fuzzy learning framework[J]. *Neural Networks*, 2020, 121: 430-440.
- [14] Wang G M, Chen H, Jiang S L, et al. Neurodynamics-driven prediction model for state evolution of coastal water quality[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024, 73: 2519409.
- [15] Han H G, Wu X L, Liu H X, et al. An efficient optimization method for improving generalization performance of fuzzy neural networks[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(7): 1347-1361.
- [16] 张祎那, 刘峥, 韩红桂. 基于自适应鲁棒模糊神经网络的 MBR 膜透水率软测量[J]. *控制与决策*, 2025, 40(2): 665-674.  
(Zhang Y X, Liu Z, Han H G. Soft-sensor method for permeability of membrane bio-reactor based on adaptive robust fuzzy neural network[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(2): 665-674.)
- [17] 郭方洪, 易新伟, 徐博文, 等. 基于深度信念网络和迁移学习的隐匿 FDI 攻击入侵检测[J]. *控制与决策*, 2022, 37(4): 913-921.  
(Guo F H, Yi X W, Xu B W, et al. Stealthy FDI attack detection based on deep belief network and transfer learning[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(4): 913-921.)
- [18] Peng X Y, Wang F Y, Li L. Towards better generalization of deep neural networks *via* non-typicality sampling scheme[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, 34(10): 7910-7920.
- [19] Imaizumi M, Schmidt-Hieber J. On generalization bounds for deep networks based on loss surface implicit regularization[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2023, 69(2): 1203-1223.
- [20] Ballas A, Diou C. Multiscale and multilayer contrastive learning for domain generalization[J]. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*, 2024, 5(12): 6253-6266.
- [21] He H Y, Goldfeld Z. Information-theoretic generalization bounds for deep neural networks[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2025, 71(8): 6227-6247.
- [22] 王功明, 李文静, 乔俊飞. 基于 PLSR 自适应深度信念网络的出水总磷预测[J]. *化工学报*, 2017, 68(5): 1987-1997.  
(Wang G M, Li W J, Qiao J F. Prediction of effluent total phosphorus using PLSR-based adaptive deep belief network[J]. *CIESC Journal*, 2017, 68(5): 1987-1997.)
- [23] Cui J H, Chai T Y, Liu X J. Deep-neural-network-based economic model predictive control for ultrasupercritical power plant[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, 16(9): 5905-5913.
- [24] Wang G M, Li X Y, Gu K, et al. Neurodynamics-driven model predictive control with soft-measurement for desulfurization system[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, 22: 19546-19554.
- [25] Shukla A K, Muhuri P K. A novel deep belief network architecture with interval type-2 fuzzy set based uncertain parameters towards enhanced learning[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2024, 477: 108744.
- [26] Himeur Y, Al-Maadeed S, Kheddar H, et al. Video surveillance using deep transfer learning and deep domain adaptation: Towards better generalization[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2023, 119: 105698.
- [27] Javaid A, Achar R, Tripathi J N. A hybrid deep-belief and knowledge-based neural network for efficient prediction of jitter in the presence of multiple PDN noise sources[J]. *IEEE Transactions on Signal and Power Integrity*, 2025, 4: 33-45.
- [28] Mathias R. The spectral norm of a nonnegative matrix[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1990, 139: 269-284.
- [29] Adiga S, Xiao X, Tandon R, et al. Generalization bounds for neural belief propagation decoders[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2024, 70(6): 4280-4296.

## 作者简介

王功明 (1987-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为模式识别与智能系统、神经动力学驱动的智能特征建模与优化控制, E-mail: wanggm@bjut.edu.cn;

赵赫楠 (2001-), 女, 硕士生, 主要研究方向为神经动力学驱动的智能特征建模与优化控制、水环境系统水质预测, E-mail: zhaomumu@emails.bjut.edu.cn;

韩红桂 (1983-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为复杂系统智能优化运行控制理论方法、智能特征检测、智能自组织控制及全流程协同优化, E-mail: rechardhan@bjut.edu.cn;

乔俊飞 (1968-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为计算智能与智能优化控制、智慧环保新技术、智能特征建模、自组织控制、多目标动态优化, E-mail: junfeiq@bjut.edu.cn.