

灰色关联分析的泛函拓展及其在火炮身管性能评估中的应用

韦保磊¹, 刘宁^{2†}, 马义中¹

(1. 南京理工大学 经济管理学院, 南京 210094; 2. 南京理工大学 机械工程学院, 南京 210094)

摘要: 灰色关联分析是多因素系统分析的重要方法, 其基于序列折线的几何形状量化因素间的关联性. 现有方法多假设序列等间隔分布而后在欧氏空间构建关联度的代数表达式, 其理论完备性尚待论证; 且忽略了序列的分布间隔、观测误差以及折线的高阶几何特征, 导致精度低和适用性受限. 为此, 本文揭示关联度代数表示的泛函分析基础, 在函数空间中探索其泛函表示及高阶多变量拓展. 首先, 引入样条光滑法构建本征函数空间; 其次, 推导关联度的有界非线性泛函表示; 最后, 设计关联度的高阶泛函拓展, 并以多变量序列为例给出关联分析算法. 以某型号坦克炮身管烧蚀磨损数据为基础, 运用所提方法聚类评估身管剩余性能, 结果表明该方法在适用范围、可解释性和准确性等方面均优于对比模型, 为武器装备健康管理提供支持.

关键词: 灰色关联分析; 灰色关联度; 泛函; 火炮身管; 轴向烧蚀磨损率

中图分类号: N94 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.1061

引用格式: 韦保磊, 刘宁, 马义中. 灰色关联分析的泛函拓展及其在火炮身管性能评估中的应用 [J]. 控制与决策, xxxx, x(x): xxxx-xxxx.

Functional extensions of grey relational analysis with applications to the performance evaluation of gun barrels

WEI Bao-lei¹, LIU Ning^{2†}, MA Yi-zhong¹

(1. School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Grey relational analysis is an important method for multi-factor systematic analysis, which measures the relationships among system factors based on the geometric shapes of zigzagged lines. Existing methods typically assume that sequences are evenly spaced and focus on algebraic expressions of grey relational degrees in Euclidean space. However, these methods neglect the effects of sequence spacing, observational errors, and higher-order features of the zigzagged lines. To this end, this paper reveals the functional foundation of the algebraic representation of relational degree and explores its functional form and multiple extensions in more general function spaces. First, the spline smoothing method is introduced to construct an intrinsic function space. Second, a bounded nonlinear functional representation of the relational degree is derived. Finally, a higher-order functional extension of the relational degree is developed, and a relational analysis algorithm is presented using multivariate sequences as an example. The proposed method is used to analyze the erosion and wear of barrels from a specific tank gun. The results show outstanding performance in terms of applicability, interpretability, and accuracy, providing theoretical support for the health management of weaponry and equipment.

Keywords: grey relational analysis; grey relational degrees; functional; gun barrels; axial rate of erosion and wear

0 引言

灰色关联分析是一种适用于多因素系统的分析方法, 该方法通过关联度量化因素间的关系, 从而实现系统主导因素与次要因素的辨识^[1]. 自邓聚龙教授首次提出灰色关联度以来, 该方法已在经济管理、工

程技术、社会科学等多个领域获得广泛应用, 并在实证研究中展现出显著的适用性与实践价值^[2-5]. 该方法通过考察因素序列的整体发展趋势而非个别数据点的巧合来衡量关联性, 这与系统论的整体性思维不谋而合. 系统论强调事物并非孤立存在, 而是相互

收稿日期: xxxx-xx-xx; 录用日期: 2026-02-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (72301140, 72471119).

†通信作者. E-mail: ln101@163.com.

联系、相互作用的有机整体^[6],灰色关联分析正是试图量化这种普遍存在的联系.灰色关联分析由关联算子、关联公理与关联度三部分组成.

关联算子是数据分析的先导环节,其作用是对原始序列进行合适的预处理与转换,旨在消除量纲、数值尺度、初始水平差异等对关联性的潜在干扰,更加清晰地揭示序列内在的发展趋势与动态特性,为后续关联度的计算奠定基础.针对不同特征的数据序列和特定的分析目标,需选用适宜的关联算子.例如,初值化算子以数据序列的首个元素为基准,将序列转化为起始值为单位一的相对比率序列,揭示序列的变化速率.为适应多样化的分析需求,Liu等^[7]系统阐述了初值化、始点零化、初值-始点零化以及均值化等多种关联算子的数学表达式.韦和谢^[8]深入剖析了这些算子的理论性质与物理内涵,为算子的合理选用提供了依据.在此基础上,Sun等^[9]将这些单变量序列算子拓展至多变量面板数据中,为复杂数据的关联分析提供了工具.

关联公理是灰色关联分析的理论内核,其通过数学约束界定关联度作为相似性指标应满足的基本性质,确保关联度的合理性与有效性,为灰色关联分析的应用提供理论支撑与评价标准.经典的关联公理体系包含规范性、接近性、整体性、偶对对称性^[1].魏等^[10,11]解析了四条公理的内涵,论证了整体性和偶对对称性的非必要性,借助极限工具探索了接近性的数学表征.在有限维欧氏空间中,韦和谢^[8]运用向量范数表征规范性和接近性,给出了更简约、易验证的表征方式,并论证了规范性公理应包含正定约束的必要性.

关联度是灰色关联分析的核心输出,其以量化数值表示算子序列几何形状间的相似程度,其数值大小直接反映了关联强弱程度,为复杂实践问题提供决策依据.关联度计算所面临的首要挑战是如何从离散的观测数据中提取算子序列的几何特征.已有方法可归纳为两类:全局函数法与局部动态法.全局函数法将算子序列的离散观测数据转化为连续函数(经典灰色关联分析称连续函数为折线函数^[7],第3节将揭示其含义并给出更一般的名称本征函数),从整体上近似描述算子序列的几何轮廓.这类方法从全局视角描述算子序列的形态,如分段线性插值法^[7,12,13]和样条插值法^[14-16].局部动态法着眼于提取算子序列相邻观测值之间的动态变化,通过局部动态信息的累积近似还原算子序列的几何轮廓.这类方法关注算子序列在微观层面的动态变化,如斜率^[17-19]、曲率^[20,21]、凸度^[22,23]、向量夹角^[24-26]等几何性

质.借鉴数学上距离的概念,以所提取几何特征之间的距离作为算子序列几何形状的相异性度量,借助归一化函数即可生成关联度^[16,27].其中,全局函数法以连续函数之间的面积为距离^[28],而局部动态法以欧氏空间中的向量范数为距离.此外,这两种方法的融合也正引起关注^[29-31].

此外,在基本框架下,学者们开展了一系列的理论分析与拓展应用研究.如优化全局函数法中函数曲线之间面积的计算方式,提高关联度的精度^[28,32];将单变量序列拓展为面板数据,设计面向多变量面板数据的关联算子和灰色关联度^[33-35];将序列元素由实数拓展为灰数,设计灰数序列的关联度^[36];以及从理论上分析关联算子与数据变换对关联度的影响^[37,38].

上述研究成果极大地推动了灰色关联分析的理论发展与实践应用.然而,这些方法具有一个共同点,即关联度的设计局限在有限维欧氏空间,旨在满足既定的关联公理.这种设计范式虽然在一定程度上简化了计算,却也极大地限制了对复杂动态序列(如序列非等间隔分布、含有观测误差或缺失值)、高阶复杂函数(如物理意义明确的导函数)关系分析的能力.为解决这一问题,本文从灰色关联分析在欧氏空间的代数表示出发,挖掘其蕴含的分析学基础;引入样条光滑法构建本征函数空间,在函数空间推导关联度的泛函表示与多变量高阶拓展;将所提方法应用于某型号火炮身管内膛的烧蚀磨损分析实践,验证模型的准确性和实用性,为武器装备健康管理提供理论与技术支撑.

1 欧氏空间中的灰色关联分析

1.1 代数表示

对序列

$$\boldsymbol{x} = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$$

和

$$\boldsymbol{y} = \{y(1), y(2), \dots, y(n)\},$$

设 \mathcal{D} 为关联算子, $\boldsymbol{u} = \mathcal{D}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v} = \mathcal{D}\boldsymbol{y}$ 为算子序列,则广义灰色关联度为

$$\rho = \frac{1}{1 + \gamma d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}, \quad (1)$$

其中: $\gamma > 0$ 为分辨系数, $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0$ 为 \boldsymbol{u} 和 \boldsymbol{v} 之间的相异性度量.

通过设置关联算子、分辨系数取值和相异性度量,式(1)可退化为多种灰色关联度.具体地,若

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left| \frac{1}{2}[u(1) - v(1)] + \sum_{k=2}^{n-1} [u(k) - v(k)] + \frac{1}{2}[u(n) - v(n)] \right|, \quad (2)$$

则 ρ 为广义灰色关联度^[13], 向下兼容灰色绝对、相对、接近、相似关联度; 若

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{I}(\text{cnd}) \frac{|u(k) - v(k) + u(k+1) - v(k+1)|}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [1 - \mathbb{I}(\text{cnd})] \frac{[u(k) - v(k)]^2 + [u(k+1) - v(k+1)]^2}{2|u(k) - v(k) + v(k+1) - u(k+1)|}, \quad (3)$$

其中: cnd 为条件 $[u(k) - v(k)][u(k+1) - v(k+1)] \geq 0$, $\mathbb{I}(\cdot)$ 为指示函数, 则 ρ 为改进的广义灰色关联度^[8], 向下兼容灰色绝对、相对、接近、相似关联度的改进形式.

分析式(1)知, ρ 是关于 γ 和 $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 的单调递减函数. 由二者均非负知, 关联度取值范围为 $(0, 1]$. 特别地, 若分辨系数 γ 独立于 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} , 则关联度 ρ 可由相异性度量 $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 唯一确定.

1.2 代数表示的分析基础

虽然式(1)中的关联度由代数表达式给出, 但它们具有分析学意义. 设算子序列 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的折线函数分别为 $u(t)$ 和 $v(t)$, 运用分段线性插值法可求得

$$\begin{cases} u(t) = (k+1-t)u(k) + (t-k)u(k+1), \\ v(t) = (k+1-t)v(k) + (t-k)v(k+1), \end{cases} \quad (4)$$

其中: $t \in [k, k+1]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

对任意的 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} , 若存在 $\kappa = 2, \dots, n-2$, 使得 $u(\kappa) - u(\kappa-1) \neq u(\kappa+1) - u(\kappa)$ 且 $v(\kappa) - v(\kappa-1) \neq v(\kappa+1) - v(\kappa)$, 则插值函数不是直线, 是连续不可导的折线函数. 在实际问题中, $u(t)$ 和 $v(t)$ 为直线的情况几乎存在, 不作为本文的研究内容. 这里为了理论的完备性做出说明. 由式(4)易知, $u(t)$ 和 $v(t)$ 均属于连续不可导函数空间 $\mathcal{C}^0[1, n]$. 式(2)和(3)可分别表示为

$$d(u(t), v(t)) = \left| \int_1^n [u(t) - v(t)] dt \right|, \quad (5)$$

和

$$d^*(u(t), v(t)) = \int_1^n |u(t) - v(t)| dt. \quad (6)$$

可以证明, 前者不满足正定性 ($d=0 \nRightarrow u(t) = v(t)$), 后者满足正定性 ($d^*=0 \Leftrightarrow u(t) = v(t)$), 故 $\mathcal{C}^0[1, n]$ 和 d^* 组成了度量空间, 而式(1)中的关联度 ρ 可解释为距离函数 d^* 的倒数变换^[16], 这也在理论上揭示了改进关联度 (以 d^* 为相异性度量) 较经典关联度 (以 d 为相异性度量) 的优势.

此外, 由 $u(t) \in \mathcal{C}^0([1, n])$ 和 $v(t) \in \mathcal{C}^0([1, n])$, 且 $\rho \in (0, 1]$ 可知, 关联度的本质是 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的笛卡尔积到实数域 $(0, 1]$ 的有界非线性泛函 $\mathcal{F}: \mathcal{C}^0([1, n]) \times \mathcal{C}^0([1, n]) \rightarrow (0, 1]$, 即

$$\rho = \mathcal{F}(u(t), v(t)), \quad t \in [1, n]. \quad (7)$$

分析上述内容可知现有方法存在以下局限: 首先, 假定原始序列 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 是等间隔分布、不含缺失值和观测误差, 这极大的限制了其适用范围; 其次, 分段线性插值方法不具备处理序列观测误差的能力, 必然导致所生成的折线函数精度低, 使得关联分析结果不准确; 最后, 运用线性插值方法仅能生成连续不可导的折线函数, 不能反映序列的高阶动态特征, 如变化率、曲率等. 受式(7)和函数空间学习^[39]的启发, 下文在连续函数空间探索灰色关联分析, 进一步完善理论基础、拓宽适用范围.

2 函数空间中的泛函扩展

设原始序列为

$$\mathbf{x} = \{x(t_1^x), x(t_2^x), \dots, x(t_{n_x}^x)\}$$

和

$$\mathbf{y} = \{y(t_1^y), y(t_2^y), \dots, y(t_{n_y}^y)\},$$

它们的算子序列分别为

$$\mathbf{u} = \{u(t_1^u), u(t_2^u), \dots, u(t_{n_u}^u)\}$$

和

$$\mathbf{v} = \{v(t_1^v), v(t_2^v), \dots, v(t_{n_v}^v)\}.$$

这里不要求两序列的观测时间对齐或等长度.

从数据获取视角, 算子序列可看作是按时间顺序抽样于折线函数的有序集合, 这表明关联度的内涵是以观测数据为载体, 测度折线函数的相似性. 由于折线函数表征的是离散观测数据的内在本征结构, 故下文将折线函数称为本征函数.

2.1 本征函数空间

从算子序列出发, 可分别通过插值和光滑方法求解得到本征函数. 二者的区别在于对序列观测误差的处理. 为表述方便, 以算子序列 \mathbf{u} 为例, 说明两种方法求解所得本征函数的区别.

插值方法假设插值函数曲线过数据点, 其数学表征为

$$u(t_k^u) = \phi(t_k^u; \mathbf{a}), \quad k = 1, 2, \dots, n_u \quad (8)$$

其中: $\phi(t; \mathbf{a})$ 为 t 的显式函数, \mathbf{a} 为表达式中所有参数的集合.

通常地, 函数 $\phi(t; \mathbf{a})$ 关于参数 \mathbf{a} 线性可分, 即 $\phi(t; \mathbf{a}) = \boldsymbol{\omega}(t)\mathbf{a}$, 其中: $\boldsymbol{\omega}(t)$ 为已知基函数, 式(8)

是线性方程组. 若式 (8) 为适定方程组 (\mathbf{a} 的分量数等于线性方程数), 易得参数 \mathbf{a} 的取值及其确定的本征函数 $\phi(t; \mathbf{a})$, 如式 (4) 中的分段线性插值函数. 若式 (8) 为欠定方程组 (\mathbf{a} 的分量数大于线性方程数), 此时通过限制插值函数满足连续条件、边界条件, 可将欠定方程转换为适定方程, 亦得参数 \mathbf{a} 的取值及其确定的本征函数 $\phi(t; \mathbf{a})$, 如灰色样条关联度^[14-16] 中的三次样条插值函数.

光滑方法考虑序列的观测误差, 将式 (8) 修正为

$$u(t_k^u) = \varphi(t_k^u; \mathbf{b}) + \epsilon(k), \quad k = 1, 2, \dots, n_u \quad (9)$$

其中: $\varphi(t; \mathbf{b})$ 为 t 的显式函数, \mathbf{b} 为表达式中所有参数的集合, $\epsilon(k)$ 为观测误差.

依然假设函数 $\varphi(t; \mathbf{b})$ 关于参数 \mathbf{b} 线性可分, 即 $\varphi(t; \mathbf{b}) = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\pi}(t)$ 为已知基函数. 基于惩罚最小二乘准则可解得参数估计值为

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_u} [u(t_k^u) - \boldsymbol{\pi}(t_k^u)\mathbf{b}]^2 + \lambda \int_{t_1^u}^{t_{n_u}^u} [\boldsymbol{\pi}^{(\tau)}(t)\mathbf{b}]^2 dt \right\} \quad (10)$$

其中: 超参数 $\lambda \geq 0$ 用于平衡函数的拟合优度和光滑

程度, $\boldsymbol{\pi}^{(\tau)}(t)$ 为 $\boldsymbol{\pi}(t)$ 的 τ 阶导函数, τ 为 2 或所求导数阶数加 2.

在式 (10) 求解时, 为减小计算复杂度、提高计算性能, 选择具有局部支撑、数值稳定、多分辨率性质的 p 次 B 样条作为基函数, 并基于交叉验证准则寻优超参数^[40], 最终获得本征函数 $\varphi(t; \hat{\mathbf{b}})$, 如函数型关联分析^[41] 中的三次 B 样条光滑方法.

总的来讲, 插值和光滑均是从算子序列的观测数据出发, 假定本征函数可由基函数线性表示, 而后通过求解系数, 实现本征函数的重构. 二者的差异主要在于对观测误差的处理上, 如表 1 所示.

表1 本征函数求解方法的比较

方法	基函数	本征函数	超参数	函数空间	误差处理	适用情境
插值	p 次多项式	$\phi(t; \mathbf{a}) = \boldsymbol{\varpi}(t)\mathbf{a}$	无	$C^{p-1}(T_u)$	无	序列无观测误差
光滑	p 次 B 样条	$\varphi(t; \hat{\mathbf{b}}) = \boldsymbol{\pi}(t)\hat{\mathbf{b}}$	有	$C^{p-1}(T_u)$	有	序列含观测误差

例 1 设函数为 $u(t) = \sin(2\pi t)$, 在区间 $[0, 2]$ 内做不规则采样并加入观测误差, 生成离散序列 \mathbf{u} , 其中观测误差为 $0.3\epsilon(t)$, $\epsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 如图 1 所示.

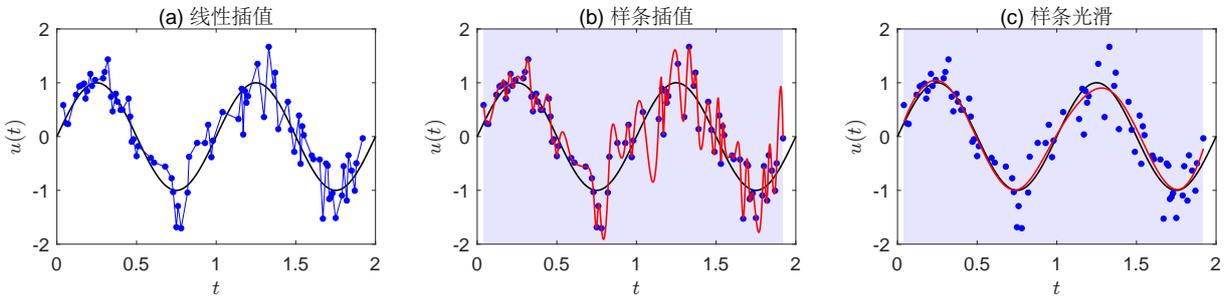


图1 离散序列的本征函数

图 1 表明, 从非等间隔序列 \mathbf{u} 出发, 线性插值本征函数 (图 1(a)) 和样条插值本征函数 (图 1(b)) 与真实函数之间的差距大. 究其原因二者均错误地将观测误差作为本征函数的固有成分, 造成本征函数波动大. 与此相反, 样条光滑本征函数 (图 1(c)) 能够有效地处理序列的观测误差、高精度逼近真实函数, 明显优于插值方法, 也是实践中推荐使用的本征函数求解方法.

2.2 关联度的泛函表示

对算子序列 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} , 运用上节的方法可求解得到它们的本征函数, 分别记为 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$. 由表 1 可知, 它们对应的本征函数空间为

$$C^{p-1}(T_u), \quad T_u = [t_1^u, t_{n_u}^u] \quad (11)$$

和

$$C^{p-1}(T_v), \quad T_v = [t_1^v, t_{n_v}^v]. \quad (12)$$

受式 (7) 启发, 在函数空间 $C^{p-1}(T_u)$ 和 $C^{p-1}(T_v)$ 上构造有界泛函来统一表征关联度. 首先, 对齐两函数空间的标量域, 有

$$T = T_u \cap T_v = [\max\{t_1^u, t_1^v\}, \min\{t_{n_u}^u, t_{n_v}^v\}], \quad (13)$$

并据此构造关联度的有界泛函表示为

$$\rho = \mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)), \quad t \in T \quad (14)$$

其中: 泛函 \mathcal{F} 满足规范性、正定性、连续性、接近性约束.

规范性的内涵是"关联度的值域是 $(0, 1]$ ". 数值范围符合认知直觉, 提升了关联度的直观性. 数学表述为

$$\mathcal{F}: C^{p-1}(T) \times C^{p-1}(T) \rightarrow (0, 1]. \quad (15)$$

正定性的内涵是"若关联度为 1, 则本征函数相

等". 极限取值 $\rho = 1$ 蕴含本征函数之间的确定性关系, 这也有助于理解观测误差对关联度的影响. 数学表述为

$$\mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)) = 1 \Leftrightarrow \mu(t) = \nu(t), \forall t \in T. \quad (16)$$

连续性的内涵是" $\mu(t)$ 或 $\nu(t)$ 发生微小变化时, ρ 值不会剧烈变化". 这保证了关联度的稳定性. 数学表述为: 对任意的 $\mu_n(t) \rightarrow \mu(t)$ 和 $\nu_n(t) \rightarrow \nu(t)$, 有

$$\mathcal{F}(\mu_n(t), \nu_n(t)) \rightarrow \mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)). \quad (17)$$

接近性的内涵是"本征函数越接近, 关联度越大". 这保证了关联推断结论的准确性. 设本征函数的远离测度为 $m(\cdot, \cdot)$, 则接近性的数学表述为: 对任意的 $\mu_1(t), \mu_2(t), \nu_1(t), \nu_2(t) \in \mathcal{C}^{p-1}(T)$, 有

$$m(\mu_1(t), \nu_1(t)) < m(\mu_2(t), \nu_2(t)) \Rightarrow \mathcal{F}(\mu_1(t), \nu_1(t)) > \mathcal{F}(\mu_2(t), \nu_2(t)). \quad (18)$$

式(14)–(18)描述了关联度泛函表示的基本准则. 这些准则不仅能够覆盖已有关联度, 而且可以据此构造不同形式的新型关联度. 例如, 对应于第2节的关联度式(1), 有

$$\mu(t) = u(t), \nu(t) = v(t), \mathcal{C}^{p-1}(T) = \mathcal{C}^0([1, n]),$$

和

$$m(\mu(t), \nu(t)) = \int_1^n |\mu(t) - \nu(t)| dt, \\ \rho = \mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)) = 1/[1 + \gamma m(\mu(t), \nu(t))].$$

性质 1 \mathcal{F} 是非线性泛函.

证明 反证法. 假设 \mathcal{F} 为线性泛函, 则应有

$$\mathcal{F}(-\mu(t), \nu(t)) = -\mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)), \\ \nu(t) = \mathcal{F}(\mu(t), -\nu(t)),$$

这与规范性 $\mathcal{F}(-\mu(t), \nu(t)) \in (0, 1]$, $\mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)) \in (0, 1]$, $\mathcal{F}(\mu(t), -\nu(t)) \in (0, 1]$ 矛盾. 证毕.

性质 1 表明, 泛函 \mathcal{F} 对 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 都不满足线性性质. 结合正定性质知, 存在 $\psi, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 使得 $\mathcal{F}(\psi\mu(t) + \xi, \nu(t)) \neq \mathcal{F}(\mu(t), \nu(t))$, 即算子序列的仿射变换 (包括伸缩或平移变换, 对应数据预处理) 会改变关联度大小, 这也再次验证了选择合适关联算子的重要性.

2.3 关联度的泛函拓展

远离测度最直接的选择是距离. 由 $\mathcal{C}^{p-1}(T)$ 为可积函数空间、距离可由范数诱导知, 借助范数定义距离、用性质更好的指数函数替代倒数函数^[16], 可定义关联度的指数泛函为

$$\mathcal{F}(\mu(t), \nu(t)) = \exp(-\gamma \int_T |\mu(t) - \nu(t)|^q dt) \quad (19)$$

其中: $q > 0$ 为幂指数, $\gamma > 0$ 为分辨系数.

基于式(19), 将算子序列所表征的对象从单变

量拓展为多变量、改变本征函数导函数的阶数, 可以得到关联度在不同维度的拓展.

高阶拓展. 由于本征函数仅提取了曲线几何形状的静态特征, 而其高阶导函数蕴含了本征函数曲线不同维度的几何动态特征, 如一阶和二阶导函数分别蕴含本征函数的斜率和曲率特征. 因此, 可设计 ι 阶动态关联度为

$$\rho^{(\iota)} = \mathcal{F}(\mu^{(\iota)}(t), \nu^{(\iota)}(t)) = \exp(-\gamma_\iota \int_T |\mu^{(\iota)}(t) - \nu^{(\iota)}(t)|^q dt) \quad (20)$$

其中: $\gamma_\iota > 0$, $\iota = 0, \dots, p-1$, 为分辨系数.

多变量拓展. 若原始序列包含 r 个变量 ($r \geq 2$), 运用光滑方法分别求解每个分量的本征函数及导函数, 分别记为 $\mu_i^{(\iota)}(t)$ 和 $\nu_i^{(\iota)}(t)$, $i = 1, \dots, r$. 基于式(20)可计算每对分量之间的动态关联度, 从而得到多变量序列的 ι 阶动态关联度为

$$\rho^{(\iota)} = \sum_{i=1}^r \omega_i \mathcal{F}(\mu_i^{(\iota)}(t), \nu_i^{(\iota)}(t)) = \sum_{i=1}^r \omega_i \exp(-\gamma_{i,\iota} \int_{T_i} |\mu_i^{(\iota)}(t) - \nu_i^{(\iota)}(t)|^q dt) \quad (21)$$

其中: $\gamma_{i,\iota} > 0$, $\iota = 0, \dots, p-1$, 为分辨系数, $\omega_i \geq 0$ 为满足约束 $\sum \omega_i = 1$ 的分量权重系数.

在实践中, 如何选择合适的阶数 ι 是使用者所面临的首要问题. 值得注意, 导函数对应具有特定含义的物理量, 如一阶导函数对应"瞬时速度"、二阶导函数对应"瞬时加速度", 这为阶数的选择提供了指导. 此外, 对于单变量和多变量序列, 均可加权集成为合成关联度

$$\rho = \sum_{\iota=0}^{p-1} w_\iota \rho^{(\iota)} \quad (22)$$

其中: $w_\iota \geq 0$ 为满足约束 $\sum w_\iota = 1$ 的动态权重系数.

需要指出的是, 式(21)中的多变量拓展也适用于面板数据, 如文献[9]中的矩阵关联度为式(21)的特例. 需要申明, 式(22)中的合成关联度不再具有明确的物理意义, 而是一个纯粹的数值指标.

结合灰色关联算子的理论性质、物理意义^[8]以及使用灰色关联分析的经验准则^[41], 以含 r 个分量的多变量序列 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^r$ 和 $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^r$ 为例, 给出泛函关联度算法如下:

算法1 多变量序列的泛函关联度

输入: 序列 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^r$ 和 $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^r$, 分量权重 ω_i , 动态权重 w_ι , B 样条基函数的次数 p

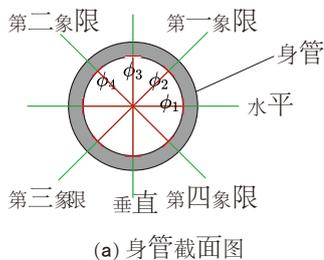
```

for  $i = 1, \dots, r$  do
     $\mathbf{u}_i \leftarrow D\mathbf{x}_i;$            % 算子序列
     $\mathbf{v}_i \leftarrow D\mathbf{y}_i;$ 
     $\hat{\mathbf{b}}_{u_i} \leftarrow$  将  $\mathbf{u}_i$  代入式(10); % 样条光滑
     $\hat{\mathbf{b}}_{v_i} \leftarrow$  将  $\mathbf{v}_i$  代入式(10);
     $T_i \leftarrow$  式(13);           % 标量域对齐
end
for  $\ell = 0, \dots, p-1$  do
     $\mu_i^{(\ell)}(t) \leftarrow \pi_{u_i}^{(\ell)}(t)\hat{\mathbf{b}}_{u_i};$  % 本征函数
     $\nu_i^{(\ell)}(t) \leftarrow \pi_{v_i}^{(\ell)}(t)\hat{\mathbf{b}}_{v_i};$ 
     $\rho^{(\ell)} \leftarrow$  将  $\omega_i$  代入式(21); % 动态关联度
end
     $\rho \leftarrow$  将  $w_i$  代入式(22);           % 合成关联度
输出: 关联度  $\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(p-1)}, \rho$ 

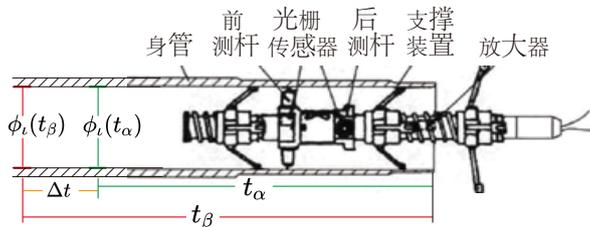
```

3 应用案例

身管是火炮武器的关键部件,其性能直接影响弹道性能和射击精度.作战过程中,高温、高压、高速的燃气流以及弹丸导引部会反复地对身管内壁施加复杂的物理化学作用.高温燃气会导致身管内壁发生软化、氧化等变化,高压燃气则产生强烈的冲击应力,高速燃气与弹丸导引部的摩擦进一步加剧了作用效果,这些因素综合起来引发内膛的烧蚀与磨损



(a) 身管截面图



(b) 光栅测径仪测量内膛直径剖面图

图2 身管内膛直径测量示意图

为综合反映身管的内膛直径变化与内膛表面粗糙度,设计身管内膛在各方向的烧蚀磨损指标,即轴向烧蚀磨损率为

$$\lim_{t_\alpha \rightarrow t_\beta} \frac{x_i(t_\beta) - x_i(t_\alpha)}{t_\beta - t_\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t_\beta) - x_i(t_\alpha)}{\Delta t} = x_i^{(1)}(t_\beta).$$

需要注意的是,若内膛直径与炮口距采用相同的物理单位,则轴向烧蚀磨损率为无量纲指标.这为身管烧蚀磨损之间的比较提供了极大的便利.下文二者物理单位均为毫米(mm).

3.1 数据描述

在某型号坦克炮的实弹射击试验中,记录了

现象.烧蚀与磨损改变内膛的内径尺寸、表面粗糙度等关键参数,使得弹丸在膛内运动时所受的阻力分布和大小发生变化,无法获得标定的前进速度和旋转速度,并进一步影响其飞行稳定性、射击精度等战术技术指标,最终因不能满足战术技术要求而使身管报废.

随着火炮武器打击能力的快速提升,发射药的火药力与装填密度不断增加,发射过程高温高压高速特征更为显著,造成身管内膛烧蚀磨损加剧.从经济角度来看,身管的购置费用约占全炮价格的30%至40%,迫切需求加强火炮身管的健康管理、提高火炮使用的经济效益^[42].因此,从内膛烧蚀磨损量评估身管性能,在理论与实践上都是必要的.

身管内膛烧蚀磨损量的测定采用结构简单、精度高、经济性与技术应用度高的光栅测径仪(测量误差小于0.01毫米,示值误差±0.0001毫米).由于身管内膛在同一截面处各方向径向的烧蚀磨损量呈现非均匀、无规律特征,故在四个方向径向测量内膛的直径($\phi_i, i = 1, \dots, 4$),如图2(a)所示.将光栅测径仪从炮口位置送入到特定截面位置(炮口距, t),可得四个径向的内膛直径($\phi_i(t)$),如图2(b)所示.结合身管在各方向径向的初始内膛直径($\phi_i'(t)$),易知各方向身管内膛的烧蚀磨损量,记为 $x_i(t) = \phi_i(t) - \phi_i'(t)$.

6组身管的内膛烧蚀磨损量^[43].由于测量环境和工作条件的限制,测量截面位置的分布有所差异.对于1号身管,记录了41处截面的烧蚀磨损量;对于2-6号身管,记录了48处截面的烧蚀磨损量,如图3所示.在每个子图中,从左至右分别为水平方向、垂直方向、一三象限、二四象限的四个轴向的磨损状况.

分析测量截面位置知,6组炮口距序列均是非等间隔分布的,如100 mm与200 mm的间隔为100 mm,700 mm与900 mm的间隔为200 mm,4000 mm与4050 mm的间隔为50 mm,且1号身管的炮口距序列与2-6号身管的炮口距序列是非对齐的.执行算法1计算非等间隔、非对齐、多变量时间序列之间的

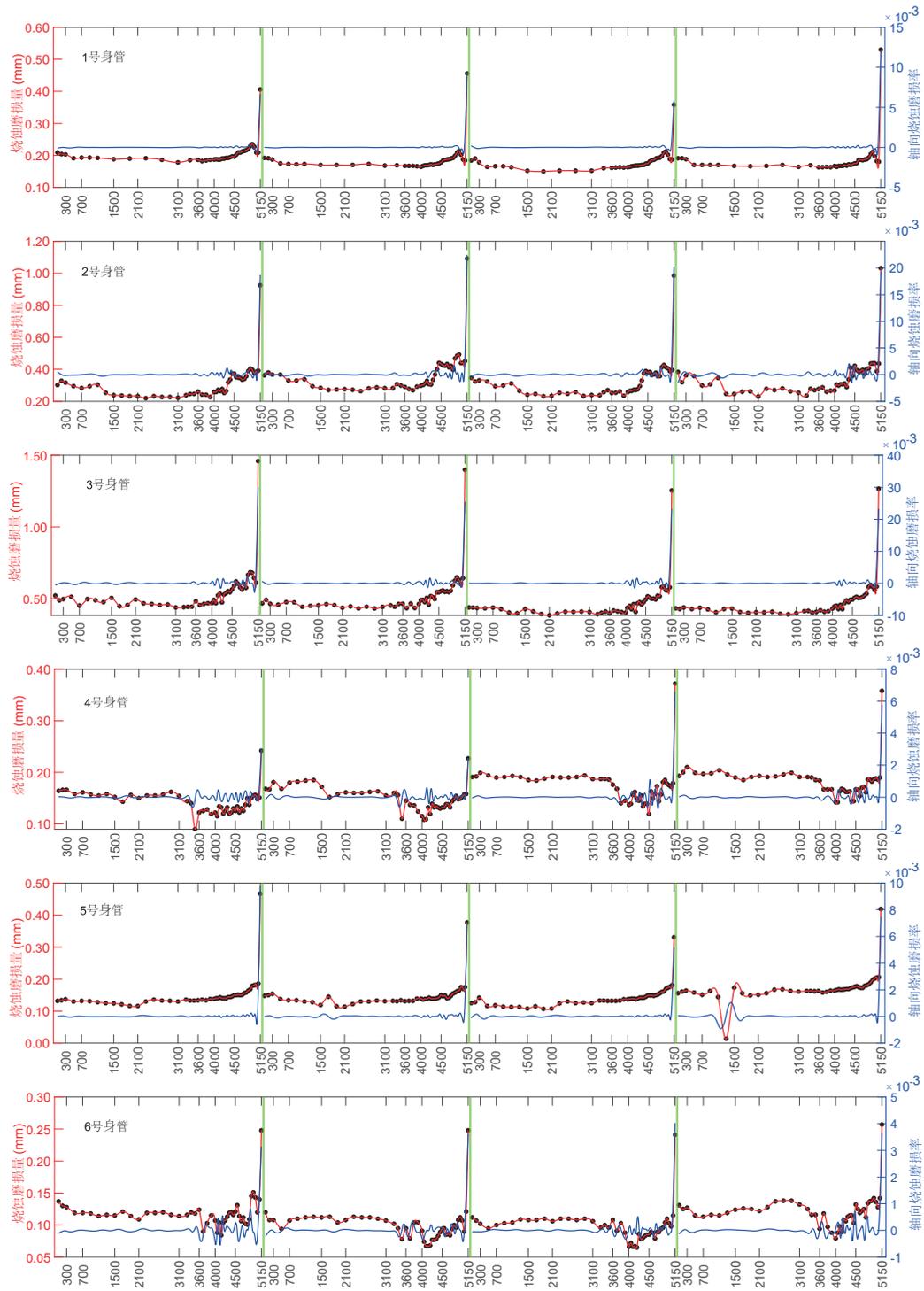


图3 身管内膛沿炮膛轴线的烧蚀磨损量与轴向烧蚀磨损率

泛函关联度. 随后, 以泛函关联度为相似性度量, 运用自底向上的层次聚类方法^[44], 对身管进行聚类分析以评估剩余性能.

3.2 参数设置与计算结果

分析实践问题的基本特征可设置算法 1 的参数如下: 由于烧蚀磨损量的物理单位相同, 为保持物理可解释性将关联算子设为恒等算子; 每次测量 4 个方向径向的烧蚀磨损量且每个方向同等重要, 故分量数为 $r = 4$ 且分量权重为 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{4}$;

轴向烧蚀磨损率为 一阶导函数, 依据经验准则将 B 样条基函数的次数设置为 $p = 3$.

以身管 4 个方向径向的轴向烧蚀磨损率为唯一变量 (即 $\iota = 1, w_1 = 1$), 执行算法 1 可求解得到身管的泛函关联度 (ρ) 矩阵, 随后以 $1 - \rho$ 为个体间相异性度量、平均链接为类簇间相异性度量, 输入层次聚类方法, 得到身管的层次聚类结果, 如图 4 所示.

由图 4 易知, 身管聚类的层次结构清晰明确, 聚类簇数为 3 或 4. 若将身管划分为 3 类, 则聚类结果为 $\{1, 4, 5, 6\}, \{2\}, \{3\}$, 且结合烧蚀磨损量的数值

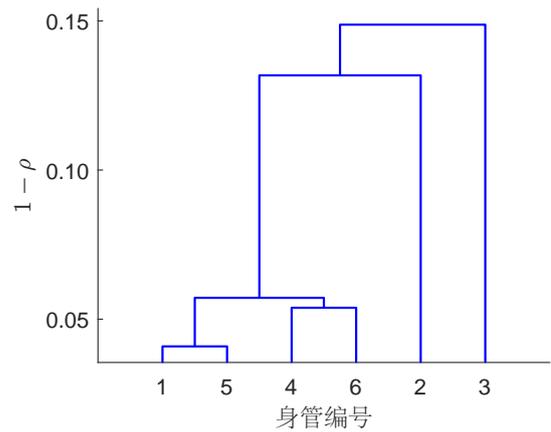
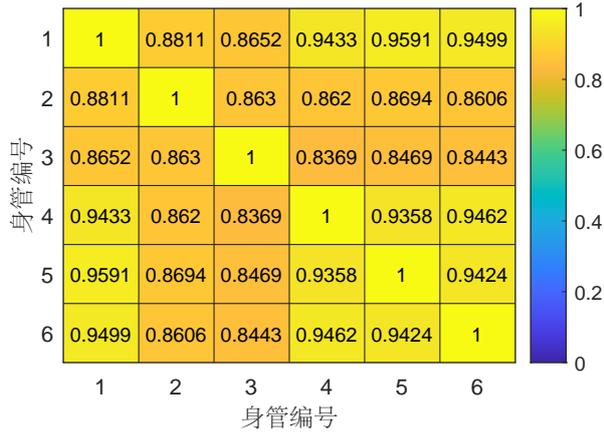


图4 基于身管轴向磨损率的泛函关联度矩阵与层次聚类谱系图

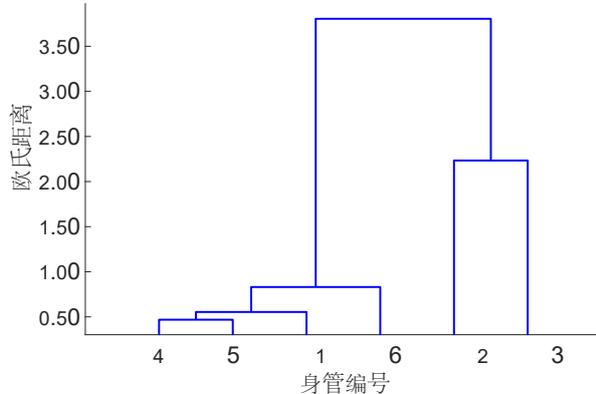
大小容易判定,烧蚀磨损类簇间序关系为 $\{3\} \succ \{2\} \succ \{1, 4, 5, 6\}$. 若将身管划分为4类,则基于烧蚀磨损率的聚类结果为 $\{1, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, 且烧蚀磨损类簇间序关系为 $\{3\} \succ \{2\} \succ \{1, 5\} \succ \{4, 6\}$.

结合图3知,4号与6号身管在四个轴向的烧蚀磨损率呈现相同的特征:在100 mm–3000 mm之间,烧蚀磨损率基本维持在固定水平,在3000 mm–5150 mm之间,烧蚀磨损率大幅度震荡.二者具有相似的几何特征,故划分在同一聚类簇.类似地,1号

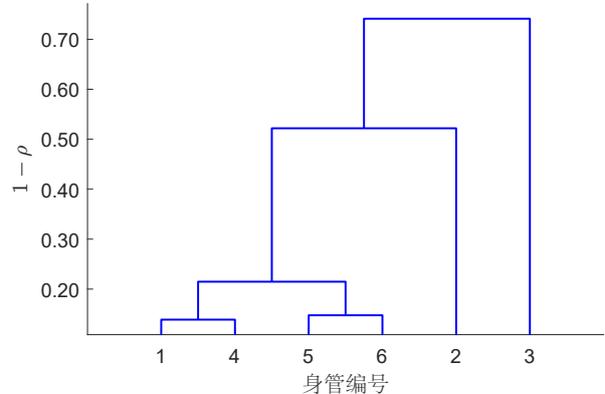
与5号身管在四个轴向的烧蚀磨损率具有相似的几何特征,即在100 mm–4800 mm之间基本维持在固定水平,在4800 mm–5150 mm之间先小幅度震荡后在5150处达到最大值,故二者划分为同一聚类簇.

3.3 对比模型与结果分析

基于烧蚀磨损序列的特征,删除有缺失的测量截面对应的数据,即仅选取测量位置对齐的烧蚀磨损量,可得身管在四个轴向的烧蚀磨损量对齐序列.以欧氏距离为相异性度量,对含有4个分量的多变量序列,执行层次聚类算法,结果如图5(a)所示.



(a) 烧蚀磨损量离散测量



(b) 烧蚀磨损量连续函数

图5 基于身管烧蚀磨损量离散测量与连续函数的层次聚类谱系图

此外,类似于3.2节,以身管在四个轴向的烧蚀磨损量函数为唯一变量 ($\iota = 0, w_0 = 1$),执行算法1得到身管的泛函关联度矩阵,随后执行层次聚类算法,结果如图5(b)所示.

由图5知,若将身管划分为3类,两种对比模型的聚类结果相同,均为 $\{1, 4, 5, 6\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, 且类簇间的烧蚀磨损序关系为 $\{3\} \succ \{2\} \succ \{1, 4, 5, 6\}$. 若将身管划分为4类,则基于离散测量的聚类簇及序关系为 $\{3\} \succ \{2\} \succ \{1, 4, 5\} \succ \{6\}$; 基于烧蚀磨损量函数的聚类簇及序关系为 $\{3\} \succ \{2\} \succ \{1, 4\} \succ \{5, 6\}$.

两对比模型均是基于烧蚀磨损量的方法,所操作的变量有相同的物理意义.二者的聚类结果基本相同,与3.2节基于烧蚀磨损率的聚类结果的区别在4号身管和5号身管的类别划分上.结合图3知,烧蚀磨损量函数和烧蚀磨损率函数在数值分布与波动特征上,均支撑基于烧蚀磨损率的聚类结果,验证了所提方法的优越性.

综上所述,基于轴向烧蚀磨损率的身管聚类结果准确性高、可解释性强,表明烧蚀磨损率能够捕捉烧蚀磨损量的微小变化,具有高分辨特征.这不仅证实了关联度泛函拓展的理论优势,也在实践上验证

了该方法在复杂问题中的适用性与鲁棒性。

4 总结

本文解析了灰色关联度代数表达式的分析学基础,将灰色关联分析从有限维欧氏空间扩展到连续函数空间,揭示了灰色关联度的本质为连续函数空间中双变量有界非线性泛函,并设计了面向多变量序列的高阶泛函拓展,完备了灰色关联分析的数理基础和方法框架体系。

相较于经典灰色关联度,关联度泛函突破了要求“序列等间隔分布、不含噪声和缺失值”的限制,可用于分析非对齐含噪序列间的关联性,这极大地拓宽了该方法的适用性和稳健性。相较于经典相似性度量,如线性 Pearson 相关系数、Spearman 秩相关系数等,该方法的目标是测度序列本征函数曲线几何形状之间的关联性,且容易拓展到本征函数高阶导函数的情景,具有动态性、可物理解释和易拓展的优点。但是,本征函数是关联度泛函的基础,在运用插值或光滑方法求解本征函数时,会不可避免地涉及基函数系数的求解(即矩阵求逆运算),这将增加该方法的计算复杂度、降低其计算效率。

坦克炮身管性能评估结果表明,所提方法能够准确识别身管烧蚀磨损特征,在适用范围、准确性、可解释性等方面均优于对比模型,为身管武器的智能健康管理提供了定量分析工具。需要指出的是,本文案例中的样本个数是相对较少的,这是受限于经济成本、试验条件、传感技术、测量设备以及作战任务不可中断等因素^[43]。未来将借鉴纵向数据分析思想,对不同型号火炮的多根身管(每根身管被多次测量)进行聚类评估,以增加身管样本数量,进一步增强结果的信度。

本研究仅在单变量和多变量序列两个维度展开,并未涉及更为复杂的数据结构,如空间数据与时空数据。未来的研究面向空间或时空数据,采用高斯过程回归近似高维度本征函数,在所生成的希尔伯特空间中探索灰色关联度的表征、性质、拓展及其在复杂问题中的实践应用。

参考文献 (References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 63-170.
(Deng J L. Basis of grey theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 63-170.)
- [2] Zhu G Y, He L J, Ju X W, et al. A fitness assignment strategy based on the grey and entropy parallel analysis and its application to MOEA[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 265(3): 813-828.
- [3] Zhai C H, Wang J J, Tu Y L, et al. Robust optimization of 3D printing process parameters considering process stability and production efficiency[J]. *Additive Manufacturing*, 2023, 71: 103588.
- [4] 吴鸿华, 胡阿芹, 韩雪, 等. 基于奇异值分解的灰色交互作用关联分析模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(8): 2450-2458.
(Wu H H, Hu A Q, Han X, et al. A grey interactional relational analysis model based on singular value decomposition and its applications[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(8): 2450-2458.)
- [5] 曾骏驰, 张欣, 钱鹏江, 等. 基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 153-164.
(Zeng J C, Zhang X, Qian P J, et al. Grey relation-based evolutionary algorithm with self-adaptive reference vectors for many-objective optimization[J]. *Control and Decision*, 2026, 41(1): 153-164.)
- [6] Skittner L. *General systems theory: Problems, perspectives, practice*[M]. New Jersey: World scientific, 2005.
- [7] Liu S F, Yang Y J, Forrest J Y. *Grey systems analysis: Methods, models and applications*[M]. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022.
- [8] 韦保磊, 谢乃明. 广义灰色关联分析模型的统一表述及性质[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(1): 226-235.
(Wei B L, Xie N M. Unified representation and properties of generalized grey relational analysis models[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2019, 39(1): 226-235.)
- [9] Sun D C, Luo D, Zhang H H. Modelling principles of grey matrix incidence analysis for panel data[J]. *Journal of Grey System*, 2021, 33(3): 16-30.
- [10] 魏勇, 高彦琴, 曾柯方. 邓氏关联度的局限与关联公理的演变[J]. *应用泛函分析学报*, 2015, 17(4): 391-399.
(Wei Y, Gao Y Q, Zeng K F. Limitations of Deng's incidence degree and evolution of relational axioms[J]. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2015, 17(4): 391-399.)
- [11] 魏勇, 曾柯方. 关联度公理的简化与特殊关联度的公理化定义[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(6): 1528-1534.
(Wei Y, Zeng K F. The simplified relational axioms and the axiomatic definition of special incidence degrees[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2015, 35(6): 1528-1534.)
- [12] 刘思峰, 谢乃明, FORREST Jeffery. 基于相似性和接近性视角的新型灰色关联分析模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(5): 881-887.
(Liu S F, Xie N M, Jeffery F. On new models of grey incidence analysis based on visual angle of similarity and nearness[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(5): 881-887.)
- [13] 刘思峰, 蔡华, 杨英杰, 等. 灰色关联分析模型研究进展[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(8): 2041-2046.
(Liu S F, Cai H, Yang Y J, et al. Advance in grey

- incidence analysis modelling[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2013, 33(8): 2041-2046.)
- [14] 陈勇明, 张明. 灰色样条绝对关联度模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(5): 1304-1310.
(Chen Y M, Zhang M. Cubic spline based grey absolute relational grade model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2015, 35(5): 1304-1310.)
- [15] 张明, 陈勇明. 基于相似性和接近性视角的 B 样条灰色关联分析模型[J]. *统计与决策*, 2016, 32(4): 12-15.
(Zhang M, Chen Y M. B-spline grey relational analysis model based on similarity and proximity[J]. *Statistics & Decision*, 2016, 32(4): 12-15.)
- [16] Wei B L, Li Y W. Grey relational analysis in the metric space of continuous functions: Foundations, extensions, and applications[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, 142: 115978.
- [17] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 灰色斜率关联度的改进[J]. *中国工程科学*, 2004, 6(3): 41-44.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Improvement on degree of grey slope incidence[J]. *Engineering Science*, 2004, 6(3): 41-44.)
- [18] 崔立志, 刘思峰, 李致平, 等. 灰色斜率相似关联度研究及其应用[J]. *统计与信息论坛*, 2010, 25(3): 56-59.
(Cui L Z, Liu S F, Li Z P, et al. Study on grey slope similarity incidence and its applications[J]. *Statistics & Information Forum*, 2010, 25(3): 56-59.)
- [19] 杜宏云, 施红星, 刘思峰, 等. 基于斜率判断的灰色周期关联度研究[J]. *中国管理科学*, 2010, 18(1): 128-132.
(Du H Y, Shi H X, Liu S F, et al. Study on the model of grey periodic incidence judged on slope[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2010, 18(1): 128-132.)
- [20] 吴鸿华, 屈忠锋. 基于面板数据的灰色曲率关联模型[J]. *控制与决策*, 2020, 35(5): 1072-1076.
(Wu H H, Qu Z F. The grey curvature incidence model based on panel data[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(5): 1072-1076.)
- [21] Wu H, Qu Z F. A grey incidence model for panel data based on the curvature of discrete surface[J]. *Journal of Grey System*, 2022, 34(2): 75-87.
- [22] 吴利丰, 刘思峰. 基于灰色凸关联度的面板数据聚类方法及应用[J]. *控制与决策*, 2013, 28(7): 1033-1036.
(Wu L F, Liu S F. Panel data clustering method based on grey convex relation and its application[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(7): 1033-1036.)
- [23] 裴卉宁, 温志强, 黄雪芹, 等. 基于贝叶斯 BWM 与 CRITIC 权重组合的灰色 H-凸关联模型[J]. *计算机集成制造系统*, 2024, 30(10): 3479-3491.
(Pei H N, Wen Z Q, Huang X Q, et al. Grey H-convex correlation model based on combination of Bayes BWM and CRITIC weight[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2024, 30(10): 3479-3491.)
- [24] Wang J J, Hipel K W, Dang Y G. An improved grey dynamic trend incidence model with application to factors causing smog weather[J]. *Expert Systems with Applications*, 2017, 87: 240-251.
- [25] Feng Y, Dang Y G, Wang J J, et al. A novel grey projection incidence model for assessing the relationships between cardiovascular diseases and air pollutants[J]. *ISA Transactions*, 2023, 135: 398-409.
- [26] An Y M, Dang Y G, Wang J J, et al. Identification of heavily polluted areas based on a novel grey integrated incidence model: A case study of the Yangtze River Delta, China[J]. *Sustainable Cities and Society*, 2023, 92: 104466.
- [27] 刘震, 党耀国, 周伟杰, 等. 新型灰色接近关联模型及其拓展[J]. *控制与决策*, 2014, 29(6): 1071-1075.
(Liu Z, Dang Y G, Zhou W J, et al. New grey nearness incidence model and its extension[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(6): 1071-1075.)
- [28] Luo D, Wei B L, Lin P Y. The optimization of several grey incidence analysis models[J]. *Journal of Grey System*, 2015, 27(4): 1-11.
- [29] 叶璟, 李艳. 双向灰色 A-S 型综合关联模型及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(11): 3336-3352.
(Ye J, Li Y. Bidirectional grey A-S comprehensive relational model and its applications[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2023, 43(11): 3336-3352.)
- [30] Lu N N, Liu S F, Du J L, et al. Grey relational analysis model with cross-sequences and its application in evaluating air quality index[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 233: 120910.
- [31] Wu H H, Han X, Yang Y J, et al. A contribution-driven weighted grey relational analysis model and its application in identifying the drivers of carbon emissions[J]. *Expert Systems with Applications*, 2025, 287: 128039.
- [32] 王靖程, 诸文智, 张彦斌. 基于面积的改进灰关联度算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(4): 777-779.
(Wang J C, Zhu W Z, Zhang Y B. Improved algorithm of grey incidence degree based on area[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(4): 777-779.)
- [33] 张可, 刘思峰. 灰色关联聚类在面板数据中的扩展及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(7): 1253-1259.
(Zhang K, Liu S F. Extended clusters of grey incidences for panel data and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(7): 1253-1259.)
- [34] 崔立志, 刘思峰. 面板数据的灰色矩阵相似关联模型及其应用[J]. *中国管理科学*, 2015, 23(11): 171-176.
(Cui L Z, Liu S F. Grey matrix similar incidence model for panel data and its application[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2015, 23(11): 171-176.)
- [35] 罗党, 张曼曼. 基于面板数据的灰色 B 型关联模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2020, 35(6): 1476-1482.
(Luo D, Zhang M M. Grey incidence model of B-mode based on panel data and its application[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(6): 1476-1482.)
- [36] Xie N M, Liu S F. A novel grey relational model based on grey number sequences[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2011, 1(2): 117-128.
- [37] 肖新平. 关于灰色关联度量模型的理论研究和评论

- [J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(8): 76-81.
(Xiao X P. Theoretical study and reviews on the computation method of grey interconnect degree[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1997, 17(8): 76-81.)
- [38] 谢乃明, 刘思峰. 几类关联度模型的平行性和一致性[J]. *系统工程*, 2007, 25(8): 98-103.
(Xie N M, Liu S F. The parallel and uniform properties of several relational models[J]. *Systems Engineering*, 2007, 25(8): 98-103.)
- [39] 徐宗本. 人工智能的10个重大数理基础问题[J]. *中国科学: 信息科学*, 2021, 51(12): 1967-1978.
(Xu Z B. Ten fundamental problems for artificial intelligence: Mathematical and physical aspects[J]. *Scientia Sinica: Informationis*, 2021, 51(12): 1967-1978.)
- [40] Wahba G. Spline models for observational data[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.
- [41] 刘宁, 韦保磊. 函数型灰色关联分析及应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(8): 2459-2466.
(Liu N, Wei B L. Functional grey relational analysis with applications[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(8): 2459-2466.)
- [42] 毛保全, 赵其进, 白向华, 等. 火炮身管延寿技术研究现状与展望[J]. *兵工学报*, 2023, 44(3): 638-655.
(Mao B Q, Zhao Q J, Bai X H, et al. Review and prospect of life extension technology for Gun barrels[J]. *Acta Armamentarii*, 2023, 44(3): 638-655.)
- [43] 金文奇, 冯三任, 徐达. 火炮身管寿命推断技术与工程实践[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
(Jin W Q, Feng S R, Xu D. Extrapolation technology and engineering practice for Gun barrel life in the approval test[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2014.)
- [44] Zhou S B, Xu Z Y, Liu F. Method for determining the optimal number of clusters based on agglomerative hierarchical clustering[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(12): 3007-3017.

作者简介

韦保磊 (1989-), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 研究方向为灰色系统与数据挖掘, E-mail: weiblei@yeah.net;

刘宁 (1980-), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 研究方向为身管寿命退化机理及试验技术, E-mail: ln101@163.com;

马义中 (1964-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向为质量工程与质量管理, E-mail: yzma@njust.edu.cn.