控制与决策
Control and Decision

基于Lemoine点的直觉模糊SWEI多属性决策方法及应用

彭新东, 张云林, 俞琳荟

引用本文:
彭新东, 张云林, 俞琳荟. 基于Lemoine点的直觉模糊SWEI多属性决策方法及应用[J]. 控制与决策, 2026, 41(6): 1687-1698.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.1081

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑决策者心理行为的灰色多属性群体决策方法

Grey multi-attribute group decision making method with consideration of psychological behavior of decision makers

控制与决策. 2021, 36(7): 1779-1785 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1621

基于策略权重的模糊多属性决策方法

Strategic weight manipulation in fuzzy multiple attribute decision making

控制与决策. 2021, 36(5): 1259-1267 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0542

乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系

Multiplicative consistent Pythagorean fuzzy preference relation

控制与决策. 2021, 36(4): 1010-1016 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0967

概率犹豫模糊决策理论与方法综述

An overview of probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods

控制与决策. 2021, 36(1): 42-51 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0465

基于TOPSIS方法改进的多属性决策模型:最小化偏好反转

Modified MCDM model based on TOPSIS method: Minimizing preference reversal

控制与决策. 2021, 36(1): 216-225 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0536

基于 Lemoine 点的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法及应用

彭新东†，张云林，俞琳荟

(韶关学院 信息工程学院，广东 韶关 512005)

摘　要: 针对现有直觉模糊多属性决策方法存在反直觉行为及数据取值局限性, 提出一种基于 Lemoine 点的直觉模糊加权指数信息和 (SWEI) 多属性决策方法. 首先, 借鉴三角形 Lemoine 点的几何思想, 设计一种新的直觉模糊相似度, 并完成其公理化证明, 与现有直觉模糊相似度相比, 该相似度不仅能够更合理地表征直觉模糊数之间的相似程度, 而且可以有效克服公理性约束缺失与不可计算的缺陷; 然后, 基于该相似度进一步构造得分函数, 以降低决策过程中的计算复杂度; 接着, 通过直觉模糊得分函数构建模糊得分矩阵, 并以熵权法获得备选方案的权重信息, 进而利用加权指数信息对备选方案进行排序择优; 最后, 通过实例仿真分析验证所提出方法的有效性, 并借助灵敏度分析及对比实验表明该方法具有较强的稳定性与优越性.

关键词: 直觉模糊集；直觉模糊 SWEI 方法；相似度；Lemoine 点；多属性决策；得分函数

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.1081

引用格式: 彭新东, 张云林, 俞琳荟. 基于 Lemoine 点的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法及应用 [J]. 控制与决策, 2026, 41(6): 1687-1698.

Intuitionistic fuzzy SWEI multiple attribute decision-making method based on Lemoine point and its application

PENG Xin-dong†，*ZHANG Yun-lin*，*YU Lin-hui*

(School of Information Engineering，Shaoguan University，Shaoguan 512005，China)

Abstract: To address the issues of counter-intuitive phenomena and data value limitations in existing intuitionistic fuzzy multiple attribute decision-making methods, this paper proposes an intuitionistic fuzzy sum weighted exponential information (SWEI) multiple attribute decision-making method based on the Lemoine point. Firstly, inspired by the geometric concept of the triangular Lemoine point, a new intuitionistic fuzzy similarity measure is designed and its axiomatic properties are rigorously proven. Comparative analysis with existing intuitionistic fuzzy similarity measures demonstrates that this measure not only characterizes the similarity between intuitionistic fuzzy numbers more reasonably, but also effectively overcomes the drawbacks of missing axiomatic properties and computational infeasibility. Then, based on this similarity measure, a score function is constructed to reduce computational complexity in the decision-making process. Next, an intuitionistic fuzzy score matrix is established using the score function, and the weights of alternative are determined via the entropy weight method. The weighted exponential information is then utilized to rank and select the optimal alternative. Finally, the effectiveness of the proposed method is validated through case study and simulation analyses. Sensitivity analysis and comparative experiments further demonstrate the stability and superiority of the proposed method.

Keywords: intuitionistic fuzzy set；intuitionistic fuzzy SWEI method；similarity measure；Lemoine point；multiple attribute decision-making；score function

0 引　言

多属性决策方法是指决策者在多个备选方案中, 依据一系列属性评价指标进行综合评估, 并通过排序选择最优方案的过程[1]. 在实际决策环境中, 由于信息的不完整性和认知的模糊性, 评价信息常以语言变量或模糊数的形式呈现[2]. 直觉模糊集[3] 作为一

收稿日期: 2025-10-16；**录用日期:** 2025-12-31.

基金项目: 广东省基础与应用基础研究基金项目 (2025A1515012440)；广东省重点建设学科科研能力提升项目 (2022ZDJS049).

责任编委: 徐泽水.

†通信作者. E-mail: 952518336@qq.com.

本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

种刻画不确定性的重要工具, 同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个方面, 能够更细致地描述决策者的肯定、否定与犹豫态度, 从而实现对复杂决策信息的充分表达. 近年来, 对直觉模糊集的研究主要集中在信息测度[4-14]、整合算子[15-16]以及多属性决策[17-26]等.

本文主要研究直觉模糊信息测度理论中的相似度问题, 已有诸多学者在该领域取得了显著进展. 例如: Li 等[4]设计了一种类似得分函数差值的直觉模糊相似度; 刘久兵等[5]构建了一种与交运算中隶属度取小相吻合的直觉模糊相似度; Huang 等[6]提出了一种基于知识的直觉模糊相似度, 能够有效量化互补集之间的差异性; Wu 等[7-8]基于 Jensen-Shannon 散度构建了一类新的直觉模糊相似度; Dutta 等[9]通过融合 Jaccard 相似度与 Dice 相似度设计了一种参数化的直觉模糊相似度; Wang等[10]构造了一种基于模糊否定的新型严格直觉模糊相似度; Patel 等[11-12]分别针对无犹豫信息与含犹豫信息的情形, 引入了基于最大最小隶属度与非隶属度差值的直觉模糊相似度; Luo 等[13]通过融合 3 类不同的直觉模糊知识度, 开发了一种综合型直觉模糊相似度; Dutta 等[14]则在考虑隶属信息相似性、非隶属信息相似性、最大与最小交叉信息相似性的基础上, 进一步引入乘积交叉信息相似性, 提出了一种基于五参数基准线的直觉模糊相似度. 然而, 上述方法仍存在一定局限性: 部分相似度难以合理有效刻画直觉模糊数之间的真实相似程度[4-6, 9-14], 另一些则容易出现可行性计算缺失[7], 或存在违反公理性约束问题[4-6, 9, 11, 13]. 具体优势和劣势表现如表 1 所示.

表1 主流直觉模糊相似度归类和优劣势分析

代表性文献	核心贡献与优势	固有局限与劣势
Li等(2002)[4]	开创性工作: 为IFS相似度度量提供了直观的、基于差值函数的计算范式, 计算效率高	公理性违反和区分度不足: 易导致违反自反性公理以及对某些直觉模糊数的区分能力有待提升
刘久兵等(2019)[5]	几何直观性: 借鉴集合交并运算, 提供了一种几何意义明确的相似度模型, 与模糊集传统概念衔接紧密	公理性违反和区分度不足: 对某些IFN结构不敏感, 无法有效区分细微差异, 且出现违反非负性公理
Huang等(2024)[6]	知识融合: 引入了“知识量”概念, 旨在综合量化IFS的确定性与不确定性, 对互补集等特殊情况的处理有独特视角	公理性违反和区分度不足: 可能产生相似度值超出[0, 1]理论范围的情况, 违背了相似度的基本公理, 限制了其应用
Wu等(2024, 2025)[7-8]	理论严谨性: 基于Jensen-Shannon散度, 具有坚实的概率论和信息论基础, 相似度区分度较好	可行性计算缺失: 当隶属度或非隶属度为0时存在计算失效(真数为零)问题, 鲁棒性差
Dutta等(2024)[9]	灵活性与综合性: 通过参数化融合Jaccard和Dice相似度, 实现了模型的可调节性, 兼顾了不同侧重点	公理性违反和区分度不足: 参数设定依赖经验, 部分结构差异不敏感, 且仍存在区分能力弱和违反单调性的问题
Wang等(2024)[10]	公理严格性: 基于模糊否定算子构建, 严格满足直觉模糊相似度的所有公理, 数学性质完备	区分度不足: 对某些直觉模糊数对的相似度区分能力仍有提升空间
Patel等(2025)[11]	简洁与专注: 针对无或低犹豫度信息场景, 采用最大最小运算, 模型简洁, 计算高效	公理性违反和区分度不足: 未充分考虑犹豫度信息, 导致其刻画能力不足, 进而区分度下降以及违反经典互补性公理
Patel等(2024)[12]	模型扩展: 在文献[9]基础上引入犹豫度, 提升了对不确定性信息的包容性, 适用性更广	区分度不足: 改进不彻底, 在处理某些特殊结构时仍可能出现不符合公理预期的结果, 导致区分失效
Luo等(2024)[13]	综合集成: 融合三类不同的知识度, 旨在通过多维度信息集成获得更稳健、全面的相似性评估	公理性违反和区分度不足: 由于是多种度量的线性组合, 公式相对复杂, 且区分度仍有待提高以及违反经典互补性公理
Dutta等(2024)[14]	几何精细建模: 基于五参数基准线, 从多角度(隶属、非隶属、交叉信息)进行精细化的几何度量, 设计颇具创新性	区分度不足: 参数较多, 计算复杂度高, 且其精细度量在某些情况下区分度不高

在实际工程决策中, 复杂环境下的不确定性处理尤为关键[27]. 以精密磨床砂轮架系统的故障诊断为例, 其主轴轴承磨损、动不平衡等故障模式呈现出典型的模糊性与专家判断的犹豫性. 传统诊断方法在处理此类同时包含肯定、否定及犹豫信息的场景时, 往往存在局限性. 例如, 当振动信号与温度特征存在交叉干扰时, 如何量化不同故障模式与症状之间的关联度, 并实现可靠排序, 成为一个亟待解决的问题. 这一实际问题凸显了发展能够有效克服反直觉行为、具备数学鲁棒性的直觉模糊决策方法的迫切性.

此外, 现有的大多数多属性决策方法在属性权重确定方面通常依赖两种途径: 一是由专家根据经验主观赋予, 二是完全由评估数据客观推导得出. 然而, 这两种方式往往相互独立, 缺乏一种有效协同主客观信息的融合机制与合理化处理流程. 这种局限性在一定程度上增加了决策结果的不确定性和不稳定性. 为缓解上述问题, 部分学者提出了主客观权重

协同整合的方法, 如组合赋权模型与优化算法, 以期在保留主观判断价值的同时融入客观数据信息, 从而提升决策的合理性与有效性[23]. 尽管如此, 现有方法在应对特殊数据结构时仍显不足. 例如, 某些模型在处理属性值为零或极端数值时, 由于未内置异常处理机制, 容易出现分母为零[18]、真数为零[17, 24] 等数学定义失效的情况, 导致决策过程无法继续或结果失去意义. 特别值得注意的是, 部分基于整合算子的多属性决策方法[16] 在极端数值情境下易诱发反直觉现象, 即整合结果违背决策常识或实际偏好, 进一步削弱了模型的可信度与实用价值. 因此, 构建具有数学鲁棒性、能妥善处理异常数据并避免反直觉行为的决策模型, 仍是当前研究中亟待深化的重要方向.

基于以上研究和讨论, 本文提出一种融入 Lemoine 点的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法. 首先, 借鉴三角形 Lemoine 点的几何构造思想, 定义新的直觉模糊相似度, 给出公理性证明, 并通过与现有相似度比较分析其有效性; 然后, 通过该相似度进一步构造得分函数, 以降低决策过程中的计算复杂度; 接着, 构建一种融合决策者主观信息和决策信息传递出客观信息的线性组合权重确定方法; 最后, 基于新的直觉模糊相似度、得分函数以及权重确定方法改进传统的 SWEI 方法, 并通过案例分析验证所提出多属性决策方法的有效性和优越性.

1　基本概念

定义 1[3]　设X为给定某论域, 称

$$I=\{\langle x,\mu_I(x),\nu_I(x)\rangle|x\in X\} \tag{1}$$

为X上的一个直觉模糊集 (IFS). 其中: $\mu_I(x),\nu_I(x)\in[0,1]$分别为$I$的隶属度和非隶属度; $\pi_I(x)=1-\mu_I(x)-\nu_I(x)$为犹豫度. 为了方便起见, 记$i=(\mu,\nu)$为一个直觉模糊数 (IFN).

在此基础上, 对于任意直觉模糊集$I_1=\{\langle x,\mu_{I_1}(x),\nu_{I_1}(x)\rangle|x\in X\}$和 $I_2=\{\langle x,\mu_{I_2}(x),\nu_{I_2}(x)\rangle|x\in X\}$, 有[3]:

1) $I_1\subseteq I_2$当且仅当$\forall x\in X,\mu_{I_1}(x)\leqslant\mu_{I_2}(x)$且$\nu_{I_1}(x)\geqslant\nu_{I_2}(x)$;

2) $I_1=I_2$当且仅当$\forall x\in X,\mu_{I_1}(x)=\mu_{I_2}(x)$且$\nu_{I_1}(x)=\nu_{I_2}(x)$;

3) $I_1^c=\{\langle x,\nu_{I_1}(x),\ \mu_{I_1}(x)\rangle|x\in X\}$, 其中$I_1^c$为$I_1$的补集.

定义 2[28]　设I_1,I_2和I_3为X上的直觉模糊集, 则$S(I_1,I_2)$满足如下公理性约束:

1) $0\leqslant S(I_1,I_2)\leqslant 1$;

2) $S(I_1,I_2)=1\Leftrightarrow I_1=I_2$;

3) $S(I_1,I_1^c)=0\Leftrightarrow I_1$为经典集;

4) $S(I_1,I_2)=S(I_2,I_1)$;

5) 若 $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3$,则 $S(I_1,I_3)\leqslant S(I_2,I_3)$且$S(I_1,I_3)\leqslant S(I_1,I_2)$.

2　新的直觉模糊相似度和得分函数

在本节中, 通过将直觉模糊数转换为一般的三角模糊数, 开发一种基于 Lemoine 点的新几何模型. 该方法具有两个优势, 包括更好的可解释性和更高的通用性. 此外, 依托新的直觉模糊相似度, 本文结合理想点思想设计了一种直觉模糊得分函数, 可有效地实现对直觉模糊数据降维为模糊数据的效果, 具体构建如下所示.

2.1　直觉模糊相似度几何构建及证明

设 $I_1=\{\langle x,\mu_{I_1}(x),\ \nu_{I_1}(x)\rangle|x\in X\}$和 $I_2=\{\langle x,\mu_{I_2}(x),\ \nu_{I_2}(x)\rangle|x\in X\}$为$X$上的两个直觉模糊集.

首先, 构造一种直觉模糊数$(\mu_{I_1}(x),\nu_{I_1}(x))$和三角模糊数$T_{I_1}(x)$转换方法, 其中$x\in X$. 设$T_{I_1}(x)$是由直觉模糊数$(\mu_{I_1}(x),\nu_{I_1}(x))$导出的 3 个特殊顶点 A_1坐标 $(\mu_{I_1}(x),\nu_{I_1}(x))$, 顶点 B_1坐标 $(\mu_{I_1}(x)+k\pi_{I_1}(x),\nu_{I_1}(x)+\pi_{I_1}(x))$和顶点 C_1坐标 $(\mu_{I_1}(x)+\pi_{I_1}(x),\nu_{I_1}(x))$, 其中$k$为线段$A_1C_1$的比例系数, 且$k\in[0,1)$. 由两个直觉模糊数转换后的三角模糊数的顶点分别构成三角形$\Delta A_1B_1C_1$和$\Delta A_2B_2C_2$. 以顶点A_1为例, 作对边B_1C_1的中线A_1G_1以及角平分线A_1H_1, 同时以角平分线A_1H_1为对称线作中线A_1G_1的类似中线A_1I_1. 3 条类似中线的交点即为 Lemoine 点O_1, 如图 1 所示.

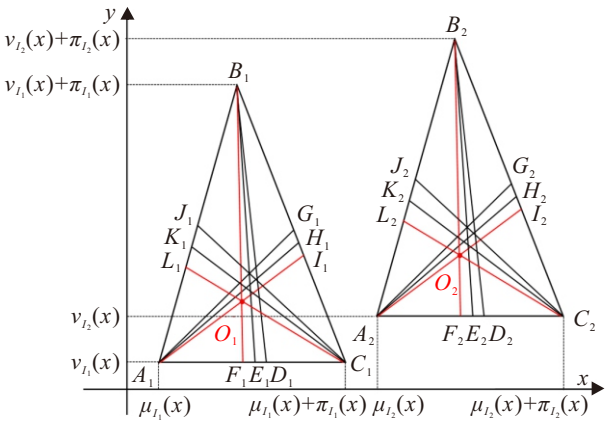

图1　(μ_1,ν_1)和(μ_2,ν_2)的可能取值

根据 Lemoine 点通用计算公式, 可得O_1坐标为

$$\Big(\mu_{I_1}(x)+\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_1}(x),\ \nu_{I_1}(x)+\frac{1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_1}(x)\Big).$$

类似地, 易得O_2坐标为

$$\Big(\mu_{I_2}(x)+\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_2}(x),\ \nu_{I_2}(x)+\frac{1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_2}(x)\Big).$$

然后, 对 Lemoine 点O_1和O_2分别在X和Y轴上的坐标值求绝对差如下:

$$X:\ \Big|\mu_{I_1}(x)+\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_1}(x)-(\mu_{I_2}(x)+\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_2}(x))\Big|=\Big|\frac{k^2-3k+3}{2k^2-2k+4}(\mu_{I_1}(x)-\mu_{I_2}(x))-\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}(\nu_{I_1}(x)-\nu_{I_2}(x))\Big|,$$

$$Y:\ \Big|\nu_{I_1}(x)+\frac{1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_1}(x)-(\nu_{I_2}(x)+\frac{1}{2k^2-2k+4}\pi_{I_2}(x))\Big|=\Big|\frac{2k^2-2k+3}{2k^2-2k+4}(\nu_{I_1}(x)-\nu_{I_2}(x))-\frac{1}{2k^2-2k+4}(\mu_{I_1}(x)-\mu_{I_2}(x))\Big|.$$

进而, 对 Lemoine 点O_1和O_2在X轴和Y轴坐标的相似度分别给定犹豫度的比例如下:

$$S_p(I_1,I_2)=1-\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}\Big[\Big|\frac{k^2-3k+3}{2k^2-2k+4}(\mu_{I_1}(x)-\mu_{I_2}(x))-\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}(\nu_{I_1}(x)-\nu_{I_2}(x))\Big|\cdot\Big(1-\frac{\pi_{I_1}(x)+\pi_{I_2}(x)}{2}\Big)+\Big|\frac{2k^2-2k+3}{2k^2-2k+4}(\nu_{I_1}(x)-\nu_{I_2}(x))-\frac{1}{2k^2-2k+4}(\mu_{I_1}(x)-\mu_{I_2}(x))\Big|\cdot\frac{\pi_{I_1}(x)+\pi_{I_2}(x)}{2}\Big],\ k\in[0,1).$$

最后, 对于所有$x\in X$, 可得直觉模糊相似度如下所示, 其中$|X|$为集合元素个数:

$$S_p(I_1(x),I_2(x))=1-\Big|\frac{k^2-3k+3}{2k^2-2k+4}(\mu_{I_1}(x)-\mu_{I_2}(x))-\frac{k^2+k+1}{2k^2-2k+4}(\nu_{I_1}(x)-\nu_{I_2}(x))\Big|\cdot\Big(1-\frac{\pi_{I_1}(x)+\pi_{I_2}(x)}{2}\Big)-\Big|\frac{2k^2-2k+3}{2k^2-2k+4}(\nu_{I_1}(x)-\nu_{I_2}(x))-\frac{1}{2k^2-2k+4}(\mu_{I_1}(x)-\mu_{I_2}(x))\Big|\frac{\pi_{I_1}(x)+\pi_{I_2}(x)}{2}.\tag{2}$$

定理 1 $S_p(I_1,I_2)$是直觉模糊相似度.

2.2 直觉模糊相似度对比分析

为了验证本文提出的直觉模糊相似度S_p的合理性和有效性, 将其用于 7 类典型的直觉模糊数i_1和

表2 不同直觉模糊相似度计算结果

相似度/案例	案例1	案例2	案例3	案例4	案例5	案例6	案例7
	$i_1=(0.3,0.3)$	$i_1=(0.3,0.4)$	$i_1=(1,0)$	$i_1=(1,0)$	$i_1=(0,1)$	$i_1=(0.4,0.2)$	$i_1=(0.5,0.2)$
	$i_2=(0.4,0.4)$	$i_2=(0.4,0.3)$	$i_2=(0,1)$	$i_2=(0,0)$	$i_2=(0,0)$	$i_2=(0.4,0.3)$	$i_2=(0.4,0.3)$
S_{l3}[4]	**1**	0.9	0	**0.5**	**0.5**	0.95	0.9
S_{l1}[5]	0.8	0.9	0	**0**	**0**	**0.9**	**0.9**
S_h[6]	0.8134	**−1**	**−1**	**0.2887**	**0.2887**	**0.9050**	**0.9714**
S_{w1}[7, 8]	0.9109	0.9109	不可计算	不可计算	不可计算	0.9329	0.9086
S_{d1}[9]	0.7273	0.8919	0	**0**	**0**	**0.8947**	**0.8974**
S_{w2}[10]	0.9945	0.9945	0	**0.5**	**0.5**	0.9966	0.9941
S_{p1}[11]	0.7533	0.8733	**0.3333**	**0.3333**	**0.3333**	**0.8733**	**0.8733**
S_{p2}[12]	0.81	0.81	0	**0.5**	**0.5**	0.9050	0.81
S_{l2}[13]	0.8895	0.9409	**0.3333**	**0.3333**	**0.3333**	0.9423	0.9361
S_{d2}[14]	0.9091	0.7825	0	**0.4545**	**0.4545**	0.8798	0.7825
S_p	0.9871	0.9	0	0.6071	0.3929	0.9425	0.9

注: 文献[6, 9]设置$\lambda=0.5$, 本文S_p设为$k=0.5$.

i_2的相似度值计算, 并与现有的 11 种直觉模糊相似度进行对比分析, 包括: S_{l1}[5]、S_h[6]、S_{w1}[7, 8]、S_{d1}[9]、S_{w2}[10]、S_{p1}[11]、S_{p2}[12]、S_{l2}[13]、S_{d2}[14] 和S_{l3}[4]. 具体计算结果如表 2 所示.

由表 2 可知, 现有直觉模糊相似度存在以下不足.

1) 违反公理性约束.

直觉模糊相似度应满足数学公理性约束, 包括非负有界性、严格自反性、经典互补性、对称性、单调性. 然而, 现有直觉模糊相似度在多个案例中均出现违反基本公理的情形:

① 非负性违反: 相似度S_h[6] 在案例 2 和案例 3 中得出相似度为 -1, 明显违背相似度应在 [0, 1] 范围内的基本约束 (公理性约束 1)), 严重影响其数学合理性与实际适用性;

② 自反性违反: S_{l3}[4] 在案例 1 中, 对$i_1 = (0.3, 0.3)$与$i_2 = (0.4, 0.4)$得出相似度为 1, 而实际上两者并不相等, 严重违背 "当且仅当两个直觉模糊数完全相同时相似度为 1" 的自反性要求 (公理性约束 2));

③ 经典互补性: S_{l1}[5] 和S_{d1}[9] 在案例 4 和案例 5 的均输出相似度为 0, 而这两个直觉模糊数并非经典集合中的互补极端情形, 因此违背了 "仅当两个直觉模糊数为完全互补的经典集合时相似度为 0" 的边界条件; 同样, 在案例 3 中, S_{p1}[11] 和S_{l2}[13] 对两个经典数输出的相似度为 0.333 3, 而非理论上的 0, 进一步反映出其未能正确识别边界情形 (公理性约束 4));

④ 单调性违反: 在案例 6 与案例 7 中, 直觉模糊数满足$(0.4, 0.3) < (0.4, 0.2) < (0.5, 0.2)$, 理论上应有$S((0.4, 0.2), (0.4, 0.3)) > S((0.5, 0.2), (0.4, 0.3))$. 然而, S_h[6] 和S_{d1}[9] 的结果呈现相反趋势, 明显违背相似度应随结构趋同而增大的单调性原则 (公理性约束 5)).

2) 缺失可行性计算.

部分相似度在特定直觉模糊数结构下无法完成有效计算, 暴露出其数学定义上的不完备性. S_{w1}[7-8] 在案例 3 ~ 案例 5 中均出现 "不可计算" 的情况. 究其原因, 是当直觉模糊数中隶属度或非隶属度之一为 0 时, 其计算公式中出现分母为零或真数为零的情形, 导致计算失效. 这种缺陷限制了该类相似度在极端数据或稀疏隶属结构场景下的适用性, 严重影响其作为通用相似度度量的可行性.

3) 缺乏有效性区分.

理想的相似度应对细微的结构差异具有敏感性, 然而现有多种相似度在关键对比案例中未能有效区分不同直觉模糊数:

① 案例 6 与案例 7 的区分失效: S_{l1}[5]、S_{d1}[9] 与 S_{p1}[11] 在这两个案例中输出的相似度值完全相同, 未能反映出 (0.4, 0.3) 与 (0.4, 0.2) 之间细微的结构差异, 表明这些相似度对隶属度/非隶属度的局部变化不敏感;

② 案例 4 与案例 5 的区分失效: 包括 S_h[6]、S_{w2}[10]、S_{p1}[11]、S_{p2}[12]、S_{l2}[13]、S_{d2}[14]、S_{l3}[4] 在内的多种相似度, 对两个不同的直觉模糊数输出相同的相似度值, 进一步揭示其在区分能力上的普遍不足. 这种 "退化现象" 削弱了相似度在模式识别、聚类分析等任务中的判别力与实用性.

本文提出的基于 Lemoine 点的直觉模糊相似度在理论层面上可以有效避免上述 3 类问题的产生.

1) 针对违反公理性约束问题.

本文基于 Lemoine点的相似度, 其核心是计算两个 IFN 在特定几何变换下的标准化相似度. 此外, 从定义出发, 严格证明了该度量满足所有相似度公理. Lemoine 点作为三角形的特殊点, 提供了稳定的 "代表点", 使得相似度计算严格基于两点间相似程度, 进而从数学根源上杜绝了 "公理性违反" 的可能.

2) 针对缺失可行性计算问题.

本文方法的核心运算不涉及对数、除法等可能在边界处无定义的函数. Lemoine 点的坐标由 IFN 的 3 个参数μ, ν, π通过简单的线性组合确定, 后续的相似度计算仅为求绝对值, 从而从数学构造上保证了计算的鲁棒性和普适性.

3) 缺乏有效性区分问题.

Lemoine 点的坐标同时敏感地响应了μ, ν, π的任意微小变化, 这使得由 Lemoine 点确定的两点间相似度能够精细地捕捉 IFN 在三维空间(μ, ν, π)中的全部信息差异. 与那些仅考虑部分参数 (如忽略 π) 或采用粗糙聚合 (如仅取最大值/最小值) 的方法相比, 本相似度在理论上具备更完备的信息利用率和更高的度量分辨率, 从而能有效避免区分度不足.

2.3　直觉模糊得分函数构建方法及证明

直觉模糊得分函数通过将复杂的二维隶属/非隶属度信息映射为简明的一维标量, 不仅能有效比较直觉模糊数的大小, 还显著降低了计算复杂度. 为此, 本节致力于构造一种新的直觉模糊得分函数, 旨在为后续的多属性决策过程完成高效、可靠的数据降维.

定义 3　设$i = (\mu, \nu)$为一个直觉模糊数, 新的

得分函数定义如下:

$$\mathrm{SF}(i)=1-\frac{1}{2k^2-2k+4}\Big((k^2-3k+3)(1-\mu)+(k^2+k+1)\nu-\frac{k^2-3k+2}{2}\pi^2\Big),\tag{3}$$

其中$k\in[0,1)$. 通过测量任意直觉模糊数$i=(\mu_i,\nu_i)$和理想点$i=(1,0)$的相似度S_p来比较直觉模糊数的大小, 得分值越大直觉模糊数越大.

定理 2 设$i_1=(\mu_1,\nu_1)$和$i_2=(\mu_2,\nu_2)$为两个直觉模糊数. 若$\mu_1\geqslant\mu_2$且$\nu_1\leqslant\nu_2$, 则$\mathrm{SF}(i_1)\geqslant\mathrm{SF}(i_2)$.

定理 3 假设$i=(\mu,\nu)$为任意直觉模糊数, 则得分函数$\mathrm{SF}(i)$随k单调递增.

定理 4 假设$i=(\mu,\nu)$为任意直觉模糊数, 则$0\leqslant\mathrm{SF}(i)\leqslant1$.

3 主要模型和方法

3.1 问题描述

考虑直觉模糊环境下的多属性决策问题. 为便于形式化描述, 记$\mathcal{M}=\{1,2,\ldots,m\}$, $\mathcal{N}=\{1,2,\ldots,n\}$. 设属性集为$\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\ldots,\mathcal{C}_n\}$, $\mathcal{C}_j$为第j个属性, $j\in\mathcal{N}$. 备选方案集为$\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_m\}$, $\mathcal{A}_l$为第l个方案, $l\in\mathcal{M}$. 决策矩阵为$R=(r_{lj})_{m\times n}$, r_{lj}为决策者关于方案$\mathcal{A}_l$针对属性$\mathcal{C}_j$的评价结果, r_{lj}为直觉模糊数, 可表示为$r_{lj}=(\mu_{lj},\nu_{lj})$, μ_{lj}表示方案$\mathcal{A}_l$满足属性$\mathcal{C}_j$的程度, ν_{lj}表示方案$\mathcal{A}_l$不满足属性$\mathcal{C}_j$的程度, 且满足$0\leqslant\mu_{lj}+\nu_{lj}\leqslant1$, $\mu_{lj},\nu_{lj}\in[0,1]$. 此外, 专家给定的属性权重向量为$\mathrm{ws}=(\mathrm{ws}_1,\mathrm{ws}_2,\ldots,\mathrm{ws}_n)$, 满足$\mathrm{ws}_j\geqslant0$且$\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{ws}_j=1$.

3.2 基于直觉模糊熵的组合权重确定方法

在多属性决策中, 属性权重的确定是影响决策结果的核心环节, 其合理性直接关系到排序结果的科学性与可靠性. 为兼顾数据分布的客观特征与决策者的主观判断, 本文提出一种基于直觉模糊熵的客观权重确定方法, 并进一步构建主客观组合权重模型.

step 1: 决策矩阵规范化.

为消除效益型属性与成本型属性量纲差异带来的不可公度性, 对决策矩阵$R=(r_{lj})_{m\times n}$进行规范化处理为$\mathcal{R}=(\gamma_{lj})_{m\times n}$, 有

$$\gamma_{lj}=(\mu'_{lj},\nu'_{lj})=\begin{cases}(\mu_{lj},\nu_{lj}),\ C_j\in\mathfrak{B};\\(\nu_{lj},\mu_{lj}),\ C_j\in\mathfrak{C}.\end{cases}\tag{4}$$

其中: $\mathfrak{B}$为效益型属性集, $\mathfrak{C}$为成本型属性集. 该变换确保所有属性值在方向上一致化为效益型特征. 此外, 如果所有属性皆为成本型且最终决策成本越高越优, 则可作为效益型来看待, 不作任何处理.

step 2: 基于熵权的客观权重计算.

利用信息熵理论衡量各属性的变异程度: 熵值越小, 表明该属性包含的信息量越大, 应赋予更高权重. 首先计算每个属性下的平均直觉模糊熵, 有

$$E_j=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}E(\gamma_{lj}),\tag{5}$$

其中$E(\gamma_{lj})$为直觉模糊数γ_{lj}的熵值, 可通过本文提出的相似度S_p与文献 [29] 定义的相似度-熵转换公式$E(\gamma_{lj})=S_p(\gamma_{lj},\gamma^c_{lj})$得到. 则属性$\mathcal{C}_j$的客观权重$\mathrm{wo}_j$为

$$\mathrm{wo}_j=\frac{1-E_j}{n-\sum\limits_{j=1}^{n}E_j},\ j\in\mathcal{N}.\tag{6}$$

该方法能够有效挖掘数据内在结构, 避免主观偏差.

step 3: 主客观组合权重的集成.

为平衡专家知识与数据驱动信息, 采用线性加权方式融合主客观权重, 有

$$\mathrm{wc}_j=\lambda\mathrm{ws}_j+(1-\lambda)\mathrm{wo}_j,\tag{7}$$

其中$\lambda\in[0,1]$为权衡系数, 反映决策者对主观权重的偏好程度. 组合权重满足$\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{wc}_j=1$, 兼具专家经验与客观数据优势.

3.3 基于 Lemoine 点的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法

为提升排序结果的区分度与稳定性, 本节将 Lemoine 点融入得分函数, 并结合传统 SWEI 方法[30], 提出一种改进的直觉模糊 SWEI 决策方法. 具体步骤如下.

step 1: 直觉模糊得分矩阵构建.

通过融入 Lemoine 点得分函数将直觉模糊决策矩阵$R=(r_{lj})_{m\times n}$转化为得分矩阵$\mathrm{SF}=(\mathrm{sf}_{lj})_{m\times n}$, 有

$$\mathrm{sf}_{lj}=1-\frac{1}{2k^2-2k+4}\Big((k^2-3k+3)(1-\mu_{lj})+(k^2+k+1)\nu_{lj}-\frac{k^2-3k+2}{2}\pi^2_{lj}\Big).\tag{8}$$

其中: $\pi_{lj}=1-\mu_{lj}-\nu_{lj}$为犹豫度, k为 Lemoine 点参数. 该得分函数综合考量隶属度、非隶属度与犹豫

度, 增强得分计算的完备性.

step 2: 得分矩阵归一化处理.

为消除量纲影响, 对得分矩阵 $\mathrm{SF}=(\mathrm{sf}_{lj})_{m\times n}$ 进行归一化得 $\mathrm{NSF}=(\mathrm{nsf}_{lj})_{m\times n}$, 有

$$\mathrm{nsf}_{lj}=\begin{cases}\dfrac{\exp(\mathrm{sf}_{lj})}{\sum\limits_{l=1}^{m}\exp(\mathrm{sf}_{lj})}, & C_j\in\mathfrak{B};\\[2ex] \dfrac{\exp(-\mathrm{sf}_{lj})}{\sum\limits_{l=1}^{m}\exp(-\mathrm{sf}_{lj})}, & C_j\in\mathfrak{C}.\end{cases}\tag{9}$$

此步骤确保所有属性值处于同一标度, 便于后续聚合. 此外, 如果所有属性皆为成本型且最终决策成本越高越优, 则可当做效益型来看待, 不作任何处理.

step 3: 加权综合指数计算.

基于归一化得分矩阵, 计算每个方案的总加权指数信息为

$$\mathrm{SWEI}_l=\sum_{j=1}^{n}\left(\log_2\frac{1}{\mathrm{nsf}_{lj}}\right)^{\mathrm{wc}_j}.\tag{10}$$

SWEI_l 值越小, 表明方案 $\mathcal{A}_l$ 整体性能越优. 该方法通过信息熵形式聚合属性信息, 能够有效区分方案优劣.

完整的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法流程如图 2 所示.

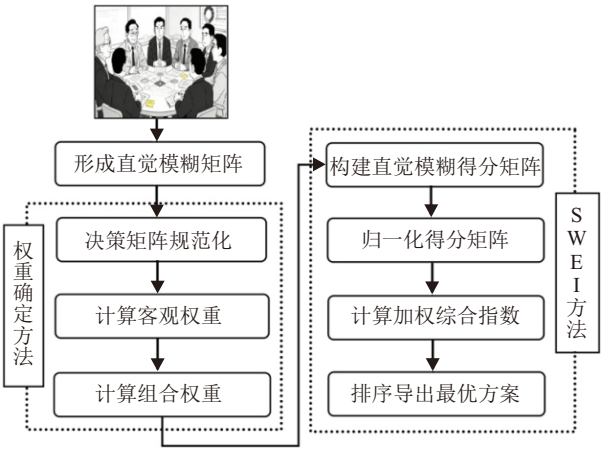

图2　直觉模糊 SWEI 多属性决策方法流程

4　实例分析

砂轮架系统作为精密磨床的“执行机构”, 其动态性能与运行状态直接决定了工件的加工精度、表面质量以及生产效率. 由于其长期处于高速、重载、变工况的恶劣工作环境中, 主轴轴承磨损、动不平衡、主轴热变形等故障频发. 传统的故障诊断方法多依赖于阈值判断或精确数学模型, 难以有效处理故障征兆的模糊性、不确定性以及不同专家判断的犹豫性. 直觉模糊集能够同时描述事物的隶属度、非隶属度和犹豫度, 为处理这种复杂不确定性提供了完美的数学工具.

4.1　决策算例

砂轮架系统故障类型的精准识别对于提升设备维护效率具有重要意义, 能够显著缩短故障排查时间、减少非计划停机, 从而保障生产进度并创造直接经济效益. 基于现场经验与历史运行数据, 本研究选取某型号精密磨床的砂轮架系统作为分析对象, 考虑 4 种典型砂轮架系统故障模式构成备选方案集, 分别为 $\mathcal{A}_1$-主轴轴承严重磨损、$\mathcal{A}_2$-砂轮动不平衡、$\mathcal{A}_3$-主轴轴承润滑不良、$\mathcal{A}_4$-主轴电机轴承故障. 同时, 结合故障机理与可测参数特征, 构建包含 8 个评估属性的属性集, 具体包括: $\mathcal{C}_1$-主轴通过频率幅值 (反映轴承磨损)、$\mathcal{C}_2$-高频振动有效值 (反映局部缺陷)、$\mathcal{C}_3$-转子不平衡频率幅值 (反映动不平衡)、$\mathcal{C}_4$-主轴前轴承温升 (°C)、$\mathcal{C}_5$-主轴电机温升 (°C)、$\mathcal{C}_6$-噪声总声压级 (dB(A))、$\mathcal{C}_7$-主轴驱动电流波动率 (%)、$\mathcal{C}_8$-径向跳动精度 (μm).

为系统化评估各故障模式与诊断属性之间的关联强度, 本研究邀请多位领域专家参与评价. 专家针对 4 个待评估的故障模式 ($\mathcal{A}_l$) 在 8 个诊断指标 ($\mathcal{C}_j$) 上的表现, 分别给出直觉模糊评价信息, 据此构建直觉模糊评价矩阵 $R=(r_{lj})_{4\times 8}$ (如表 3 所示). 该矩阵中, 每个评价单元 $r_{lj}=(\mu_{lj},\nu_{lj})$ 为一个直觉模糊数: μ_{lj} 表示故障模式 $\mathcal{A}_l$ 符合诊断指标 $\mathcal{C}_j$ 特征程度的隶属度, ν_{lj} 表示其不符合程度的非隶属度, 而 $\pi_{lj}=1-\mu_{lj}-\nu_{lj}$ 则表征专家在判断过程中存在的犹豫度, 反映了评价信息的不确定性. 决策专家同时确

表3　直觉模糊决策矩阵 R

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_7$	$\mathcal{C}_8$
$\mathcal{A}_1$	(0.9, 0.05)	(0.85, 0.1)	(0.3, 0.6)	(0.7, 0.2)	(0.2, 0.7)	(0.75, 0.2)	(0.65, 0.25)	(0.6, 0.3)
$\mathcal{A}_2$	(0.1, 0.85)	(0.4, 0.5)	(0.95, 0.05)	(0.2, 0.75)	(0.1, 0.8)	(0.6, 0.3)	(0.3, 0.6)	(0.9, 0.05)
$\mathcal{A}_3$	(0.5, 0.4)	(0.45, 0.45)	(0.1, 0.8)	(0.85, 0.1)	(0.5, 0.4)	(0.5, 0.4)	(0.4, 0.5)	(0.2, 0.7)
$\mathcal{A}_4$	(0.25, 0.65)	(0.75, 0.2)	(0.2, 0.7)	(0.4, 0.5)	(0.8, 0.15)	(0.65, 0.25)	(0.85, 0.1)	(0.25, 0.65)

定了各诊断指标的权重向量为 $\mathrm{ws}=(0.2, 0.15, 0.1, 0.15, 0.1, 0.05, 0.15, 0.1)$. 此评价矩阵 R 与属性权重ws共同为后续基于直觉模糊集的故障模式识别与诊断分析提供了结构化的数据基础.

具体决策过程 ($k=0.5, \lambda=0.6$) 如下.

step 1: 因为均为成本型属性且最终决策成本越高越优, 可当作效益型来看待, 所以不作任何处理.

step 2: 采用式 (6) 计算客观权重向量为 $\mathrm{wo}=(0.1429, 0.0952, 0.1633, 0.1293, 0.1327, 0.0918, 0.1054, 0.1395)$.

step 3: 采用式 (7) 计算组合权重向量为 $\mathrm{wc}=(0.1771, 0.1281, 0.1253, 0.1417, 0.1131, 0.0667, 0.1322, 0.1158)$.

step 4: 根据式 (8) 计算得分函数矩阵为

$$\mathrm{SF}=\begin{bmatrix} 0.9253 & 0.8753 & 0.3511 & 0.7511 \\ 0.1253 & 0.4511 & 0.9500 & 0.2253 \\ 0.5511 & 0.5011 & 0.1511 & 0.8753 \\ 0.3011 & 0.7753 & 0.2511 & 0.4511 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{matrix} 0.2511 & 0.7753 & 0.7011 & 0.6511 \\ 0.1511 & 0.6511 & 0.3511 & 0.9253 \\ 0.5511 & 0.5511 & 0.4511 & 0.2511 \\ 0.8253 & 0.7011 & 0.8753 & 0.3011 \end{matrix}\Bigg].$$

step 5: 因为均为成本型属性且最终决策成本越高越优, 可当作效益型来看待, 所以根据式 (9) 得到规范化得分矩阵

$$\mathrm{NSF}=\begin{bmatrix} 0.3741 & 0.3080 & 0.2201 & 0.2887 \\ 0.1681 & 0.2015 & 0.4006 & 0.1706 \\ 0.2573 & 0.2118 & 0.1802 & 0.3268 \\ 0.2004 & 0.2787 & 0.1991 & 0.2139 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{matrix} 0.1988 & 0.2769 & 0.2722 & 0.2710 \\ 0.1799 & 0.2446 & 0.1918 & 0.3565 \\ 0.2683 & 0.2213 & 0.2120 & 0.1816 \\ 0.3530 & 0.2571 & 0.3240 & 0.1909 \end{matrix}\Bigg].$$

step 6: 采用式 (10) 计算决策者对方案 $\mathcal{A}_l$ 的最优加权综合指数信息 $\mathrm{SWEI}_l(l=1,2,3,4)$ 如下: $\mathrm{SWEI}_1=8.62845$, $\mathrm{SWEI}_2=8.79779$, $\mathrm{SWEI}_3=8.77604$, $\mathrm{SWEI}_4=8.73932$. 因此, 4 种砂轮架系统故障模式的排序结果为 $\mathcal{A}_1>\mathcal{A}_4>\mathcal{A}_3>\mathcal{A}_2$. 当前系统状态与 $\mathcal{A}_1$ 主轴轴承严重磨损的匹配度最高.

该结果与矩阵数据和实际故障所反映的故障特征完全一致, 验证了该直觉模糊指标体系及多属性决策模型的有效性, 具体如下.

1) 故障模式的核心特征表征.

① $\mathcal{A}_1$(主轴轴承严重磨损): 该模式在表征轴承直接损伤的指标上呈现高度敏感, 在 $\mathcal{C}_1$(主轴通过频率幅值, $\mu_{11}=0.9$) 和 $\mathcal{C}_2$(高频振动有效值, $\mu_{12}=0.85$)上具有极强隶属度, 准确捕捉了轴承磨损的典型振动特征- 滚动体通过损伤点产生的周期性冲击及随之激发的高频共振响应; 在 $\mathcal{C}_4$(主轴前轴承温升, $\mu_{14}=0.7$) 上的中等隶属度则反映了磨损后期摩擦温升的伴随现象, 符合故障演化规律.

② $\mathcal{A}_2$(砂轮动不平衡): 此模式表现出鲜明的频谱特征, 在 $\mathcal{C}_3$(转子不平衡频率幅值, $\mu_{23}=0.95$) 上的极强隶属度直接对应质量偏心引起的工频振动放大; 在 $\mathcal{C}_8$(径向跳动精度, $\mu_{28}=0.9$) 上的高隶属度则体现了旋转精度恶化的几何表现. 值得注意的是, 该模式在温度指标 $(\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5)$ 上的低隶属度 (均 $\leqslant 0.2$) 准确反映了动不平衡故障的机械动力学本质, 其能量转化主要表现为振动而非热能.

③ $\mathcal{A}_3$(主轴轴承润滑不良): 该模式特征集中体现在温升指标上, 在 $\mathcal{C}_4$(主轴前轴承温升, $\mu_{34}=0.85$) 上的高隶属度直接对应润滑失效导致的摩擦热累积效应, 此为润滑不良的确定性特征; 在其他指标上的相对均匀分布 ($0.4\sim0.5$) 则反映了润滑状态对系统性能的广泛影响.

④ $\mathcal{A}_4$(主轴电机轴承故障): 此模式表现出独特的电-热耦合特征, 在 $\mathcal{C}_5$(主轴电机温升, $\mu_{45}=0.8$) 和 $\mathcal{C}_7$(主轴驱动电流波动率, $\mu_{47}=0.85$) 上的高隶属度共同指向电机轴承故障引起的热-电异常, 准确捕捉了故障能量在热效应和电气参数上的双重体现.

2) 故障模式的可区分性分析.

① 核心指标分离度: 每个故障模式均存在至少一个特征指标, 其隶属度显著高于其他模式. 如 $\mathcal{A}_1$ 中的 $\mathcal{C}_1(0.9)$、$\mathcal{A}_2$ 中的 $\mathcal{C}_3(0.95)$、$\mathcal{A}_3$ 中的 $\mathcal{C}_4(0.85)$ 和 $\mathcal{A}_4$ 中的 $\mathcal{C}_7(0.85)$, 这些核心指标为模式识别提供了关键判别依据.

② 交叉干扰抑制: 在非核心指标上, 各故障模式均保持相对较低的隶属度, 如故障模式 $\mathcal{A}_1$ 在 $\mathcal{C}_5(0.2)$、$\mathcal{A}_2$ 在 $\mathcal{C}_1(0.1)$ 和 $\mathcal{C}_4(0.2)$、$\mathcal{A}_3$ 在 $\mathcal{C}_3(0.1)$ 和 $\mathcal{C}_8(0.2)$、$\mathcal{A}_4$ 在 $\mathcal{C}_1(0.25)$ 和 $\mathcal{C}_3(0.2)$ 上的低隶属度, 有效避免了故障模式间的误判风险.

③ 物理机理一致性: 所有隶属度分布均严格遵循故障物理机理. 如温度指标的分布精确对应故障部位-主轴前轴承温升 ($\mathcal{C}_4$) 对 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_3$ 敏感, 而主轴电机温升 ($\mathcal{C}_5$) 专门针对 $\mathcal{A}_4$; 振动频率特征也明确区分了通过主轴通过频率幅值 ($\mathcal{C}_1$)、高频振动有效值 ($\mathcal{C}_2$) 和转子不平衡频率幅值 ($\mathcal{C}_3$) 的不同故障来源.

3) 犹豫度设置的工程合理性.

矩阵中所有直觉模糊数的犹豫度 ($\pi=1-\mu-\nu$) 均控制在合理范围内: 核心诊断指标的犹豫度接近零 (如 $\mathcal{A}_2$ 在 $\mathcal{C}_3$ 的 $\pi=0$), 体现了对这些确定性特征的充分认知; 而在部分关联指标上的适度犹豫 (如

$\mathcal{A}_1$在$\mathcal{C}_4$的$\pi = 0.1$) 则客观反映了实际工程中故障耦合现象带来的判断不确定性.

此直觉模糊决策矩阵通过严谨的物理机理映射和优化的模式区分设计, 为砂轮架系统故障的精准诊断提供了可靠的数据基础, 其结构一致性和工程实用性得到了充分保证.

4.2　有效性分析

针对同一问题的多种求解方法若产生不一致的结论, 则揭示了部分方法在可靠性方面的不足, 进而引发对其适用性的质疑. 在此背景下, 如何确立有效的评估标准以判定算法可靠性, 成为亟待解决的关键问题. 为此, 有必要构建系统化的算法验证机制. 为检验本文提出的基于 Lemoine 点的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法的有效性, 采用 Wang 等[31]建立的 3 个有效性验证准则.

1) 检验准则 1 (非最优方案稳定性). 在决策属性相对重要性保持不变的前提下, 若非最优方案被降级处理, 则有效的多属性决策方法应能保持原最优方案排序不变;

2) 检验准则 2 (传递性). 有效的多属性决策方法需满足传递性要求. 具体而言, 若方案$\mathcal{A}_1$优于$\mathcal{A}_2$, 且$\mathcal{A}_2$优于$\mathcal{A}_3$, 则方法应确保$\mathcal{A}_1$优于$\mathcal{A}_3$的排序关系成立;

3) 检验准则 3 (子问题一致性). 本准则与准则 2 密切关联, 要求将同一决策方法应用于原问题的各个子集时, 所得的子问题排序结果经聚合后应与原问题的整体排序保持一致.

下面基于上述 3 条检验准则, 对所提出的基于 Lemoine 点的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法 ($k = 0.5, \lambda = 0.6$) 进行有效性评估.

1) 针对准则 1 的有效性检验. 沿用第 4.1 节中的决策算例, 其排序结果为$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$. 现对非最优方案$\mathcal{A}_4$的评估值进行调整, 将其隶属度与非隶属度互换 (即采用补形式). 调整后, 决策排序结果为$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_2$. 尽管对非最优方案进行了修改, 但最优方案仍为$\mathcal{A}_1$, 表明所提出的多属性决策方法满足检验准则 1, 具备有效性.

2) 针对准则 2 与准则 3 的有效性检验. 将包含 4 个方案的多属性决策问题划分为以下 4 个子集: $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$、$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4\}$、$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\}$、$\{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\}$. 应用本文提出的多属性决策方法, 得到各子集内的排序结果依次为$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$、$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_2$、$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3$、$\mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$. 这些子问题的排序结果在整合后与原问题的整体排序$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$一致, 表明该方法同时满足传递性 (检验准则 2) 与子问题一致性 (检验准则 3) 的要求.

4.3　灵敏度分析

设定权衡系数λ从 0 开始, 以步长 0.1 递增至 1, 分析各组合权重及各故障模式的加权综合指数变化情况, 计算结果如图 3 和图 4 所示.

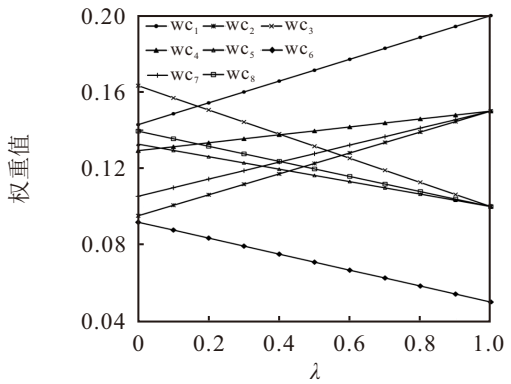

图3　组合权重随权衡系数λ的变化

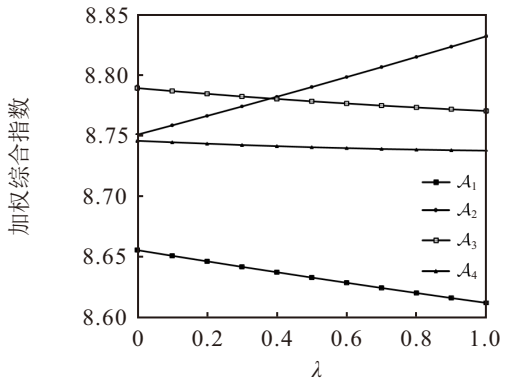

图4　加权综合指数随权衡系数λ的变化 ($k = 0.5$)

由图 3 可见, 随着权衡系数λ逐渐增大, 各组合权重呈现出一定的变化规律. 具体而言, 权重wc_1、wc_2、wc_4与wc_7均表现出上升趋势, 其中wc_1与wc_2的增长幅度较为显著, 而wc_4的增长则相对平缓. 相反, wc_3、wc_5、wc_6与wc_8则呈现下降趋势, 且wc_3和wc_6的降幅尤为明显. 此外, 随着λ增大, 各属性之间的权重区分度逐渐增强, 反映出组合权重对权衡系数具有较强的敏感性.

尽管从图 4 可以看出, 权重变化并未改变最优方案的选择, 但部分非最优方案的排序结果受到一定影响. 具体排序变化如下: 当$\lambda = 0$处于$0 \sim 0.3$区间时, 排序结果为$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_2 > \mathcal{A}_3$; 当$\lambda$处于$0.4 \sim 1$区间时, 排序进一步调整为$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$.

上述排序变化表明, 权衡系数λ的设定对方案排序具有一定影响. 因此, 在实际应用中, 需结合具体背景与决策需求, 合理选择λ的取值.

此外, 设定比例系数k从 0 开始, 以步长 0.1 递增至 0.9, 分析各比例系数及各故障模式的加权综合指数变化情况, 计算结果如图 5 所示. 从图 5 可以看出, 随着k的变化, 并未改变最优方案的选择以及排序结果, 进一步表明比例系数k在当前环境下的取值对决策结果稳定性影响有限. 与此同时, 参数k本质上是决策者对于隶属度与非隶属度相对重要性的偏好系数, $k = 0.5$仅代表一种"无偏好"的基准情况.

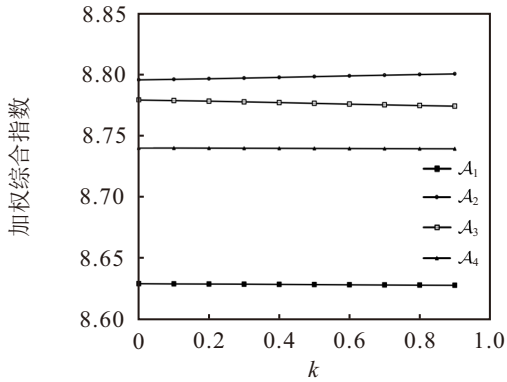

图5 加权综合指数随权衡系数k的变化 ($\lambda = 0.6$)

4.4 对比分析

为验证所提出多属性决策方法的有效性, 本文首先采用第 4.1 节的案例进行对比分析. 在比较过程中, 对现有多属性决策方法中的关键参数设定如下: TODIM 方法[7] 设定 $\alpha = \beta = 0.88$, $\theta = 2.25$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$; IFMEWA 方法[19] 设定 $\lambda = 2$; AROMAN 方法[25] 设定 $\lambda = 0.6, \beta = 0.5$; CIFDWA 方法[18] 设定 $\widetilde{\mathrm{cl}}_1 = \widetilde{\mathrm{cl}}_2 = \widetilde{\mathrm{cl}}_3 = \widetilde{\mathrm{cl}}_4 = \widetilde{\mathrm{cl}}_5 = \widetilde{cl}_6 = \widetilde{\mathrm{cl}}_7 = \widetilde{\mathrm{cl}}_8 = 1$, $\xi = 2$; CoCoSo 方法[23] 设定 $\vartheta = 0.5$. 此外, 对于需额外附加相关条件信息获得权重的, 本文均采用给定主观权重 (如 HEART 方法[26] 权重是直觉模糊数, 后续涉及相关运算以给定权重为新执行标准) 以及原文献采用的权重类型则保留到对应的决策过程中.

表 4 列出了不同多属性决策方法下的排序结果与最优方案. 可以看出, 所提出 SWEI 方法得到的排序结果为 $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$, 与 TODIM[24]、CoCoSo[23]、AROMAN[25]、HEART[26] 及 EDAS[21] 等方法的排序结果一致. 此外, 所提出方法的最优方案 $\mathcal{A}_1$ 与 TOPSIS[12]、IFWA[16] 和 TOPSIS[17] 等方法所得结果相同, 尽管在整体排序上存在细微差异. 分析认为, 权重设定的不同是导致排序结果产生分歧的重要原因.

值得注意的是, CIFDWA 方法[18] 的排序最优方案结果为$\mathcal{A}_2$, 与本文其余 11 种方法的结果存在显著差异. 然而, 当参数ξ调整为 1 时, 其最优方案转为 $\mathcal{A}_1$, 表明该参数对排序结果及方案选择具有较强敏感性, 进而影响决策的稳定性. 另一方面, COPRAS 方法[22] 由于缺乏对纯效益型与纯成本型属性的区分机制, 导致无法完成有效排序, 突显其在本类案例中的局限性.

表4 不同多属性决策方法的排序结果和最优方案

方法	权重类型	排序结果	最优方案
TOPSIS[12]	客观权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_2 > \mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_1$
IFWA[16]	主观权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_2 > \mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_1$
TOPSIS[17]	客观权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_2 > \mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_1$
CIFDWA[18]	主观权重	$\mathcal{A}_2 > \mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_2$
IFMEWA[19]	主观权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
EDAS[21]	*	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
COPRAS[22]	*	∞	∞
CoCoSo[23]	组合权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
TODIM[24]	主观权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
AROMAN[25]	主观权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
HEART[26]	*	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
SWEI	组合权重	$\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_4 > \mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$

注: *表示需要额外的条件获取权重或权重信息不是实数形式; ∞表示无排序结果和方案.

此外, 部分现有多属性决策方法, 如 CIFDWA[18]、TODIM[24]、IFWA[16] 与 TOPSIS[17], 在处理特定评估值时存在计算失效问题以及反直觉现象, 具体表现如下:

1) 分母为 0 问题: CIFDWA 方法[18] 所采用的集成算子在处理如 (1, 0) 这类特殊直觉模糊数时, 因分母为零而无法运算.

2) 真数为 0 问题: TODIM 方法[24] 嵌入的直觉模糊 Jensen-Shannon 散度在隶属度或非隶属度为零时导致对数真数为零, 进而引发计算无效. 类似地, TOPSIS 方法[17] 在基于直觉模糊熵确定属性权重时也会因真数为零而出错, 但若采用本文所设定的主观权重或组合权重, 则可避免该问题.

3) 反直觉现象: 在 IFWA 方法[16] 的决策过程中, 若出现取值为 (1, 0) 的特殊评估数据, 则将导致最终整合结果始终为 (1, 0). 此时, 无论其他评估值多小, 其对应的方案仍会被判定为最优, 这显然影响了决策结果的合理性与公平性.

5 结 论

本文针对现有直觉模糊多属性决策方法中存在的反直觉行为及数据取值局限性等问题, 通过引入三角形 Lemoine 点的几何思想, 设计了一种新的直觉模糊相似度测度, 并完成了其严格的公理化证明. 与现有相似度相比, 该测度不仅更合理地刻画了直觉模糊数之间的相似程度, 而且有效克服了计算可

行性不足与公理违反等缺陷. 在此基础上, 进一步构建了基于该相似度的得分函数, 显著降低了决策过程的计算复杂度; 同时, 结合熵权法与主观权重信息, 提出改进的直觉模糊 SWEI 多属性决策方法, 实现了对备选方案的高效排序择优. 通过实例仿真分析验证了所提出方法在砂轮架系统故障诊断等实际应用中的有效性. 灵敏度分析表明, 该方法在不同权衡系数下均能保持最优方案的稳定性, 体现了较强的鲁棒性. 对比实验进一步表明, 所提出方法在避免分母为零、真数为零等计算失效问题的同时, 其排序结果与多数主流方法 (如 TODIM、CoCoSo、AROMAN 等) 一致, 且优于部分存在局限性的方法 (如 CIFDWA、COPRAS), 凸显了其学术价值与实用优势. 未来研究将结合深度学习、强化学习[32] 等智能技术, 开发自适应权重调整机制, 以应对大数据场景下的动态决策需求.

参考文献 (References)

[1] 王磊, 苑博荣. 基于后悔理论的图模糊 LINMAP 多属性决策方法及应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(8): 2810-2816.
(Wang L, Yuan B R. Picture fuzzy LINMAP multiple attribute decision making method based on regret theory and its application[J]. Control and Decision, 2024, 39(8): 2810-2816.)

[2] 王磊, 李文杰, 王海. 基于累积前景理论的多粒度概率语言双边匹配决策方法[J]. 控制与决策, 2025, 40(1): 300-307.
(Wang L, Li W J, Wang H. Two-sided matching decision making method with multi-granular probabilistic linguistic set based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2025, 40(1): 300-307.)

[3] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[4] Li D F, Cheng C T. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions[J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(1/2/3): 221-225.

[5] 刘久兵, 周献中, 李华雄, 等. 基于直觉模糊相似度的直觉模糊三支决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(6): 1550-1564.
(Liu J B, Zhou X Z, Li H X, et al. An intuitionistic fuzzy three-way decision method based on intuitionistic fuzzy similarity degrees[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(6): 1550-1564.)

[6] Huang W W, Zhang F W, Wang S H, et al. A novel knowledge-based similarity measure on intuitionistic fuzzy sets and its applications in pattern recognition[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 249: 123835.

[7] Wu X X, Zhu Z Y, Chen S M. Strict intuitionistic fuzzy distance/similarity measures based on Jensen-Shannon divergence[J]. Information Sciences, 2024, 661: 120144.

[8] Wu X X, Liu Q, Liu L T, et al. New Jensen-Shannon divergence measures for intuitionistic fuzzy sets with the construction of a parametric intuitionistic fuzzy TOPSIS[J]. Complex & Intelligent Systems, 2025, 11(2): 134.

[9] Dutta P, Banik A K. A novel generalized similarity measure under intuitionistic fuzzy environment and its applications to criminal investigation[J]. Artificial Intelligence Review, 2024, 57(3): 69.

[10] Wang T, Wu X X, Garg H, et al. Novel strict intuitionistic fuzzy similarity measures-based on fuzzy negation and their applications[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 252: 124192.

[11] Patel A, Gupta D, Gopalakrishnan E A, et al. Similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its applications in pattern recognition and multimodal medical image fusion[J]. Scientific Reports, 2025, 15(1): 23548.

[12] Patel A, Jana S, Mahanta J. Construction of similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in face recognition and software quality evaluation[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 237: 121491.

[13] Luo M X, Wang L X. A novel similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its application to pattern recognition[J]. Soft Computing, 2024, 28(7): 6207-6217.

[14] Dutta D, Dutta P, Gohain B. Similarity measure on intuitionistic fuzzy sets based on Benchmark Line and it's diverse applications[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2024, 133: 108522.

[15] Hussain A, Ullah K, Pamucar D, et al. Intuitionistic fuzzy Sugeno-Weber decision framework for sustainable digital security assessment[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2024, 137: 109085.

[16] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.

[17] Sun Y X, Li Y B, Li H X, et al. Intuitionistic fuzzy MADM in wargame leveraging with deep reinforcement learning[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2024, 32(9): 5033-5045.

[18] Seikh M R, Chatterjee P. Evaluation and selection of E-learning websites using intuitionistic fuzzy confidence level based Dombi aggregation operators with unknown weight information[J]. Applied Soft Computing, 2024, 163: 111850.

[19] Yang Y, Luo Y, Chen L B, et al. Intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making method based on a parametric piecewise score function[J]. Journal of Control and Decision, 2025, 12(2): 306-320.

[20] 贺元骅, 黄一览, 熊升华. 基于熵权直觉模糊拓展 MULTIMOORA 的机场消防站选址评价模型[J]. 控制与决策, 2023, 38(1): 265-273.
(He Y H, Huang Y L, Xiong S H. An evaluation model of airport fire station site selection based on entropy weight intuitionistic fuzzy extended MULTIMOORA[J]. Control and Decision, 2023, 38(1): 265-273.)

[21] Yildirim B, Ayyildiz E, Aydin N. A novel intuitionistic

fuzzy decision-making framework for sustainable site selection of solar panel waste recycling facilities[J]. Journal of Cleaner Production, 2025, 521: 146195.

[22] Görçün Ö F, Saha A, Ecer F. Evaluation of crawler cranes for large-scale construction and infrastructure projects: An intuitionistic fuzzy consensus-based approach[J]. Journal of Industrial Information Integration, 2025, 44: 100784.

[23] Kumar R, Kumar S. An extended combined compromise solution framework based on novel intuitionistic fuzzy distance measure and score function with applications in sustainable biomass crop selection[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 239: 122345.

[24] Wu X X, Zhu Z Y, Chen G R, et al. Generalized TODIM method based on symmetric intuitionistic fuzzy Jensen–Shannon divergence[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 237: 121554.

[25] Yalçın G C, Kara K, Toygar A, et al. An intuitionistic fuzzy-based model for performance evaluation of EcoPorts[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023, 126: 107192.

[26] Deveci K, Güler Ö. Ranking intuitionistic fuzzy sets with hypervolume-based approach: An application for multi-criteria assessment of energy alternatives[J]. Applied Soft Computing, 2024, 150: 111038.

[27] 徐泽水, 程晓婷, 缑迅杰. 公众参与应急管理中的大群体决策理论、方法及应用综述[J]. 控制与决策, 2025, 40(10): 2913-2932.
(Xu Z S, Cheng X T, Gou X J. A review of theories, methods and applications of large-scale group decision-making with public participation in emergency management[J]. Control and Decision, 2025, 40(10): 2913-2932.)

[28] 王毅, 刘三阳, 程月蒙, 等. 基于倾向性的直觉模糊相似度量方法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(4): 863-867.
(Wang Y, Liu S Y, Cheng Y M, et al. Intuitionistic fuzzy similarity measure approach based on orientation[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(4): 863-867.)

[29] Zeng W Y, Yu X C, Yu F S, et al. Entropy of intuitionistic fuzzy set based on similarity measure[C]. The 3rd International Conference on Innovative Computing Information and Control. Dalian, 2008: 398.

[30] Dwivedi P P, Sharma D K. Quantitative assessment of photovoltaic thermal collectors to enhance energy efficiency in the power system by SWEI MCDM method[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2025, 217: 115791.

[31] Wang X T, Triantaphyllou E. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods[J]. Omega, 2008, 36(1): 45-63.

[32] 李佩璋, 费庆, 陈振, 等. 具备可解释性的决策依据自编码多智能体强化学习方法[J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2748-2758.
(Li P Z, Fei Q, Chen Z, et al. Interpretable decision-basis autoencoder for multi-agent reinforcement learning[J]. Control and Decision, 2025, 40(9): 2748-2758.)

作者简介

彭新东 (1990−), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为不确定性决策理论与方法、故障诊断, E-mail: 952518336@qq.com;

张云林 (2001−), 男, 硕士生, 主要研究方向为智能数学理论与应用, E-mail: 2571800683@qq.com;

俞琳荟 (1996−), 女, 硕士, 主要研究方向为智能数学理论与应用, E-mail: 1277099443@qq.com.