

# 嵌入自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制的多目标狼群算法

赵嘉<sup>1,2†</sup>, 钟劲文<sup>1,2</sup>, 肖人彬<sup>3</sup>, 李院民<sup>1</sup>, 吴莉娟<sup>1,2</sup>, 刘东晓<sup>1</sup>, 翁佳桥<sup>4</sup>

- 江西水利电力大学 信息工程学院, 南昌 330099;
- 江西省水利大数据智能处理与预警技术产业技术工程化中心, 南昌 330099;
- 华中科技大学 人工智能与自动化学院, 武汉 430074;
- 江西省水生生物保护救助中心, 南昌 330096)

**摘要:** 针对求解约束多目标优化无法平衡目标优化和约束满足的同时兼顾种群多样性和收敛性的问题, 提出嵌入自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制的多目标狼群算法. 首先, 通过自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制将种群进化过程划分为学习阶段和探索阶段, 学习阶段利用少量可行解和信息优良的不可行解引导种群快速收敛, 探索阶段对收敛种群施加强约束, 并利用非支配可行解扩散检索约束帕累托前沿, 以平衡收敛性、多样性和约束满足. 其次, 设计精英引导策略, 促进解在搜索空间中的均匀分布, 提高全局搜索能力. 最后, 引入差分进化更新机制, 通过二元锦标赛法筛选优势个体并实施差分变异, 在保持多样性的同时加速进化. 在 20 个约束多目标测试函数及焊接梁工程问题上的对比实验表明, MOWPA-AE 不仅在约束满足与目标优化的综合性能上表现优异, 也具备在实际工程优化问题中应用的可行性与推广价值.

**关键词:** 约束多目标优化; 多目标狼群算法; 自适应 $\varepsilon$ 约束处理; 精英引导; 差分进化更新机制; 二元锦标赛法  
**中图分类号:** TP301.6 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2025.1110

**引用格式:** 赵嘉, 钟劲文, 肖人彬, 等. 嵌入自适应  $\varepsilon$  约束处理机制的多目标狼群算法 [J]. 控制与决策.

## Multi-objective wolf pack algorithm embedded with adaptive epsilon constraint handling mechanism

ZHAO Jia<sup>1,2†</sup>, ZHONG Jin-wen<sup>1,2</sup>, XIAO Ren-bin<sup>3</sup>, LI Yuan-min<sup>1</sup>, WU Li-juan<sup>1,2</sup>, LIU Dong-xiao<sup>1</sup>, WENG Jia-qiao<sup>4</sup>

(1. School of Information Engineering, Jiangxi University of Water Resources and Electric Power, Nanchang 330099, China; 2. Jiangxi Province Water Conservancy Big Data Engineering Center for Intelligent Processing and Early Warning Technology, Nanchang 330099, China; 3. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 4. Aquatic Conservation and Rescue Center of Jiangxi Province, Nanchang 330096, China)

**Abstract:** To address the problem that constrained multi-objective optimization cannot balance objective optimization and constraint satisfaction while maintaining population diversity and convergence, this study proposes a constrained multi-objective wolf pack algorithm embedded with an adaptive epsilon constraint handling mechanism (MOWPA-AE). Firstly, the adaptive constraint-handling mechanism divides the population evolution process into a learning stage and an exploration stage. In the learning stage, a small number of feasible solutions and high-quality infeasible solutions are used to guide the population toward rapid convergence. In the exploration stage, stronger constraints are imposed on the converged population, and non-dominated feasible solutions are used to diffuse and search for the constrained Pareto front, thereby balancing convergence, diversity, and constraint satisfaction. Secondly, an elite-guided strategy is designed to promote a uniform distribution of solutions in the search space and enhance global search capability. Finally, a differential evolution update mechanism is introduced, which selects superior individuals through a binary tournament and performs differential mutation, accelerating evolution while maintaining diversity. Comparative experiments on 20 constrained multi-objective test functions and the welded beam engineering problem

收稿日期: 2025-10-24; 录用日期: 2026-02-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62466037); 抚州市“揭榜挂帅”项目 (2025JDA04, 2024JCB15).

责任编委: 徐泽水.

†通信作者. E-mail: zhaojia@juwp.edu.cn.

demonstrate that MOWPA-AE not only exhibits excellent overall performance in constraint satisfaction and objective optimization but also shows feasibility and potential for application in practical engineering optimization problems.

**Keywords:** constrained multi-objective optimization; multi-objective wolf pack algorithm; adaptive epsilon constraint handling; elite guidance; differential evolution update mechanism; binary tournament

## 0 引言

现实生活中的优化问题常涉及多个相互矛盾的目标函数,这类问题被定义为多目标优化问题(multi-objective optimization problem, MOP)<sup>[1]</sup>,如污水处理<sup>[2]</sup>过程需在处理效率与运行成本之间权衡,物流调度<sup>[3]</sup>需同时优化运输时间与资源利用率,能源优化<sup>[4]</sup>则需兼顾能源效率与环境影响等.但在实际应用中,这些问题还受到各种等式或不等式约束的限制,从而演化为约束多目标优化问题(constrained multi-objective optimization problem, CMOP),如污水处理需满足排放标准,物流调度受配送时限和车辆容量限制,能源优化需保证供需平衡和设备安全.在求解 CMOP 时,需要同时兼顾解的收敛性、多样性和可行性,但约束条件显著增加了搜索难度,成为跨学科研究的热点.

进化算法(Constrained Multi-Objective Evolutionary Algorithm, CMOEA)<sup>[5]</sup>受生物进化启发,通过选择、交叉和变异等机制进行搜索,因其强大的全局寻优能力<sup>[6]</sup>,成为求解 CMOP 的有效方法.相比传统优化方法,进化算法不依赖目标函数的连续性、可导性或凸性,能在非凸、高维、多峰及不确定搜索空间中保持良好适应性.然而,在求解 CMOP 时,进化算法需同时兼顾种群多样性<sup>[7]</sup>和收敛性<sup>[8]</sup>的同时满足约束,为此学者提出了多种约束处理技术,以实现高效搜索.

常见的约束处理技术包括惩罚函数法<sup>[9]</sup>、约束处理法<sup>[10]</sup>、约束支配法<sup>[11]</sup>和随机排序法<sup>[12]</sup>.惩罚函数法通过在目标函数中加入约束惩罚将问题转为无约束问题,实现简单且通用,但惩罚参数难以设定.约束处理法引入动态阈值,初期允许次可行解参与搜索,后期逐步收紧,引导收敛,但阈值设置不当可能偏离优化目标.约束支配法将约束违反视为额外目标,可行解优先,有助于加快收敛并减少无效搜索,但在可行域小或不连通时可能限制探索.随机排序法通过概率比较目标或约束值维持种群多样性,但随机性可能减缓收敛.

当前的约束多目标进化算法主要通过结合多目标进化框架与约束处理机制解决约束多目标优化问题.基于此,学者们提出了多种有效算法,主要包括多种群技术和多阶段技术.多种群技术中, Li 等<sup>[13]</sup>

提出 C-TAEA,通过收敛性档案与多样性档案协同优化,实现目标与约束的平衡,有效逼近约束帕累托前沿. Tian 等<sup>[14]</sup>在此基础上提出 CCMO,通过两个种群分别进行约束检索和无约束检索.多阶段技术中, Fan 等<sup>[15]</sup>提出 PPS,将进化分为无约束推进阶段和约束牵引阶段. Liu 等<sup>[16]</sup>提出 ToP,通过初始可行解简化 CMOP 并采用定制约束策略优化目标.

鉴于进化算法<sup>[17]</sup>在求解 CMOP 的良好表现,本文引入狼群算法,为约束多目标优化问题提供新的求解方案.狼群算法(Wolf Pack Algorithm, WPA)<sup>[18]</sup>由吴胜虎等在 2013 年提出,其通过模拟狼群在捕猎过程中协作搜索行为实现高效寻优,根据游走、召唤和围攻行为在全局范围内动态调整个体位置,实现对目标区域的高效探索,因其快速收敛和强适应性,已被广泛应用于无线传感网络<sup>[19]</sup>、图像处理<sup>[20]</sup>、神经网络<sup>[21]</sup>、电力系统<sup>[22]</sup>等各个邻域.

鉴于狼群算法在单目标优化中的良好表现,研究者开始将其扩展到多目标优化.荀洪凯等<sup>[23]</sup>提出多目标自适应并行狼群算法,通过混合单链编码处理离散与连续变量,并利用自适应邻域搜索调节局部与全局探索,实现多目标解集并行优化.陶翼飞等<sup>[24]</sup>提出多目标启发式狼群算法,将方向学习与加工效率启发式规则结合,构建双驱动的初始化策略.上述方法采用编码解码模式,因此仅适用于离散多目标优化.

为解决连续优化问题,根据狼群多种群共存的生物习性,赵嘉等<sup>[25]</sup>提出一种用于求解连续多目标优化问题的多目标狼群算法——自适应分组和拥挤距离更新的多目标狼群算法(Multi-objective Wolf Pack Algorithm based on Adaptive Grouping Strategy and Crowding Distance, MOWPA-AG).该算法根据支配关系将种群划分为子群,各子群在头狼引导下执行游走、召唤和围攻行为,实现全局探索与局部开发协同;同时结合非支配等级和拥挤度筛选个体,保留潜力解,引导种群向更优解集演化.

虽然 MOWPA-AG 在多目标优化中具有实现简单、全局搜索能力强的优势,但在约束多目标优化中存在不足:首先,算法无法处理约束,初始可行解较少,使约束帕累托前沿难以被有效搜索;其次,基于拥挤距离的更新机制易在前期淘汰支配等级高但较

拥挤的个体, 导致收敛缓慢, 后期又可能删除相邻拥挤个体, 使种群多样性下降; 最后, 召唤和围攻行为采用单一直线搜索, 进一步限制了种群多样性。

针对上述问题, 本文提出嵌入自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制的多目标狼群算法 (Multi-Objective Wolf Pack Algorithm embedded with Adaptive Epsilon Constraint Handling Mechanism, MOWPA-AE)。首先, 引入自适应约束处理机制, 将进化过程划分为两个阶段: 第一阶段侧重目标优化以加速收敛, 第二阶段侧重约束满足以在可行域内搜索约束帕累托前沿, 从而平衡目标优化与约束满足。其次, 设计精英引导策略, 通过双头狼引导种群均匀探索搜索空间, 提高搜索效率。最后, 引入差分进化更新机制, 利用非支配排序筛选个体并进行差分进化, 确保优良个体得以保留并加速进化。多种策略协同作用, 使算法在兼顾约束满足和目标优化的同时保持良好的多样性与收敛性。

## 1 基础知识

### 1.1 约束多目标优化问题

以最小化问题为例, 约束多目标优化问题数学模型定义如下:

$$\begin{cases} \min F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)]^T \\ \text{s.t. } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \\ h_j(x) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x$  表示  $n$  维的决策向量,  $g(x)$  和  $h(x)$  表示  $p$  个不等式约束条件和  $q$  个等式约束条件, 对于任意两个决策向量  $x_A, x_B \in X_n$ , 当且仅当  $\begin{cases} \forall_i = 1, 2, 3, \dots, m: f_i(A) \leq f_i(B) \\ \exists_j = 1, 2, 3, \dots, m: f_j(A) < f_j(B) \end{cases}$  成立时, 称  $x_A$  支配  $x_B$ , 记作  $x_A \prec x_B$ 。若  $\neg \exists x \in X_n$ , 使得  $x \prec x^*$  成立, 则称  $x^*$  为非支配解。

在约束优化中, 采用约束违背度 (CV) 来反映一个解是否违反约束或违反约束的程度, 对于任意一个解  $x$  的约束违背度可表示为:

$$CV(x) = \sum_{i=1}^p \max(0, g_i(x)) + \sum_{j=1}^q \max(0, |h_j(x)|). \quad (2)$$

当且仅当  $CV(x) = 0$  时, 决策向量  $x$  为可行解, 否则为不可行解。

### 1.2 多目标狼群算法

多目标狼群优化算法<sup>[25]</sup> 借鉴狼群社会分工机制, 将狩猎过程建模为游走、召唤、围攻三个阶段。该算法采用自适应分群策略体现狼群多族群共生的生物特性, 通过快速非支配排序将解集划分为若干子群, 选取首层非支配解作为领导个体 (头狼) 指导种

群迭代优化。为保持种群的精英保留原则, 算法引入基于拥挤密度的更新策略, 该机制通过计算解的分布密度实施优胜劣汰选择, 从而加速算法收敛进程。

多目标狼群算法的规则和行为描述如下:

(1) 游走行为: 探狼通过气味浓度判断猎物方位: 若探狼浓度高于头狼则取代其位置; 否则向  $h$  个方向移动一步记录浓度值。向第  $p$  ( $p = 1, 2, \dots, h$ ) 个方向移动后探狼  $i$  的位置为:

$$x_{id}^p = x_{id} + step_a^d \times \sin(2\pi \times p/h). \quad (3)$$

其中,  $step_a^d$  为第  $d$  维空间的游走步长,  $x_{id}$  表示人工狼  $i$  在第  $d$  ( $d = 1, 2, \dots, D$ ) 维空间的位置。将上述步骤重复操作, 择优更新位置直至满足取代条件或  $T > T_{\max}$ 。

(2) 召唤行为: 头狼召唤猛狼进行奔袭, 猛狼  $i$  的位置更新为:

$$x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + step_b^d \cdot (g_d^k - x_{id}^k) / |g_d^k - x_{id}^k|. \quad (4)$$

其中,  $g_d^k$  为头狼第  $k$  次迭代在第  $d$  维空间中的位置,  $x_{id}^k$  表示在第  $k$  次迭代后人工狼  $i$  在第  $d$  ( $d = 1, 2, \dots, D$ ) 维空间的位置,  $step_b^d$  为第  $d$  维空间的奔袭步长, 前半部分表示当前猛狼的位置, 后半部分表示猛狼向头狼靠近的一种趋势。

若猛狼  $i$  感知到的猎物气味浓度  $Y_i < Y_{lead}$ , 继续奔袭直到其与头狼  $s$  之间的距离  $d_{is} < d_{near}$  时转入围攻行为, 其中  $d_{near}$  的公式为:

$$d_{near} = \frac{1}{D \cdot \omega} \cdot \sum_{d=1}^D |\max_d - \min_d|. \quad (5)$$

其中,  $D$  为待寻优的变量数,  $\omega$  为距离判定因子。

(3) 围攻行为: 当狼群转入围攻时, 头狼的位置视为猎物的移动位置, 对于第  $k+1$  代狼群, 狼群的围攻行为可用方程表示:

$$x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + \lambda \cdot step_c^d \cdot |G_d^k - x_{id}^k|. \quad (6)$$

其中,  $G_d^k$  表示猎物在第  $d$  维空间中的位置,  $\lambda$  为  $[-1, 1]$  之间的随机数,  $step_c^d$  为第  $d$  维空间中的攻击步长。

## 2 嵌入自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制的多目标狼群算法

为提升多目标狼群算法求解约束多目标优化问题时的种群多样性和收敛性, 提出了嵌入自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制的多目标狼群算法 (MOWPA-AE)。MOWPA 早期以游走和召唤行为为主, 具有较强探索性, 但过早施加严格约束会限制种群扩展。为此, 引入自适应约束机制, 在学习阶段使用较宽松阈值, 让轻度违约但信息优良的个体参与进化, 加强早期

探索. 随着算法进入围攻主导的收敛阶段, 再逐步收紧约束, 引导种群向可行帕累托前沿聚集, 实现约束满足与收敛的协同. 此外, 传统 MOWPA 由单一头狼引导, 易导致搜索方向集中. 本文提出精英引导策略, 由当前代与上一代头狼共同引导, 融入历史最优信息, 一方面稳定围攻阶段方向, 另一方面避免单代头狼波动引起的偏移, 实现收敛性与多样性的平衡. 最后, 引入差分进化算子作为局部扰动与结构保持兼具的操作. 差分进化算子在精英邻域产生方向性增量, 与围攻阶段局部开发契合; 通过交叉概率控制触发频率, 在不破坏狼群结构的前提下增强演化动力, 缓解 MOWPA 在复杂约束边界易停滞的问题.

### 2.1 自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制

多目标狼群算法在处理约束多目标优化时缺乏有效的约束处理机制, 导致种群在约束前沿的多样性和收敛性较差. 同时, 由于可行解比例低, 初始阶段通过非支配排序选出的可行头狼较少, 影响头狼引导进化的效果. 针对上述问题, 提出自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制, 将种群进化过程分为学习阶段和探索阶段. 学习阶段通过自适应调节对约束与目标的偏好, 适当放宽可行性要求, 使携带有效信息的不可行解与少量可行解共同参与进化, 引导种群快速向可行域附近收敛, 侧重目标优化. 探索阶段对接近可行域的种群施加强约束, 并利用学习阶段产生的可行解作为核心, 引导种群向可行域内部扩散, 从而获得分布性与收敛性更优的约束帕累托前沿, 侧重约束满足. 通过双阶段模式引导种群进化以平衡目标优化和约束满足. 自适应 $\varepsilon$ 的定义如下:

$$\begin{cases} \varepsilon(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N CV(i) \times (1 - k/T_c)^2 & 0 \leq k \leq T_c \\ \varepsilon(k) = 0 & k > T_c \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $N$ 为种群大小,  $CV(i)$ 为第 $i$ 匹人工狼的约束违背度,  $T_c$ 为控制参数, 决定种群进入强约束的迭代次数. 初始种群中可行解数量较少, 通过 $\varepsilon$ 约束并结合可行性准则选取小于平均约束违背度的人工狼, 引导种群跨越不可行域, 加快种群收敛至可行域的速度. 随着种群不断迭代, 可行解数量不断增加,  $\varepsilon$ 的值逐渐减小, 种群从侧重收敛的学习阶段逐渐转变为侧重约束满足的探索阶段, 当 $k = T_c$ 时, 种群中多数个体都为可行解, 此时, 通过非支配可行解引导种群在可行域中检索约束帕累托前沿, 维持种群的多样性.

为验证 $T_c$ 在不同取值下算法的性能变化, 表1对其进行了敏感性分析. 由表中不同 $T_c$ 取值下

MW1–MW5 问题的 IGD 结果可知, 当 $T_c$ 取值过小(如 $0.01k_{\max}$ )时, 惩罚项快速衰减, 算法在早期即弱化对不可行解的引导, 容易导致搜索不足, 从而在部分问题上表现出较大的 IGD 均值与波动; 而当 $T_c$ 取值较大(如 $0.2k_{\max}$ 和 $0.3k_{\max}$ )时, 惩罚作用持续时间过长, 算法在较长阶段内受限于约束驱动, 削弱了对帕累托前沿的精细搜索能力, 整体性能亦有所下降. 相比之下,  $T_c = 0.1k_{\max}$ 在 MW1–MW5 测试问题上取得了最小的 IGD 均值, 同时标准差较小, 表现出较好的稳定性与鲁棒性. 这表明该取值能够在进化过程中有效平衡约束引导与目标优化, 既保证初期的可行性收敛, 又有利于后期解集向帕累托前沿的逼近. 因此, 本文选取 $T_c = 0.1k_{\max}$ 作为默认参数设置, 可以实现更优的寻优结果.

表1 不同取值下 MOWPA-AE 在 MW 测试问题的 IGD 值

问题	指标	$0.01k_{\max}$	$0.1k_{\max}$	$0.2k_{\max}$	$0.3k_{\max}$
MW1	mean	1.41e-02	<b>1.95e-03</b>	1.09e-01	5.91e-03
	std	7.13e-03	<b>2.37e-04</b>	3.11e-01	4.19e-03
MW2	mean	2.91e-02	<b>4.17e-03</b>	3.51e-02	2.50e-02
	std	1.36e-03	<b>3.61e-05</b>	3.45e-03	1.39e-03
MW3	mean	8.41e-03	<b>6.61e-03</b>	8.52e-03	8.44e-03
	std	4.56e-04	<b>4.53e-04</b>	8.44e-04	1.64e-03
MW4	mean	5.29e-02	<b>4.70e-02</b>	5.64e-02	4.83e-02
	std	9.48e-03	<b>1.70e-03</b>	8.35e-03	2.22e-03
MW5	mean	5.23e-03	<b>1.66e-03</b>	8.12e-03	6.85e-03
	std	8.79e-04	<b>6.06e-04</b>	2.48e-04	1.46e-03

### 2.2 精英引导策略

多目标狼群算法通过自适应分组将种群划分为多个子种群, 但各子种群中的人工狼在围攻和召唤时均以单一路径逼近当前头狼, 使得种群过快收敛, 容易陷入局部最优. 为解决这一问题, 本文提出精英引导策略. 由于上一代头狼相较其他个体具有更优信息且易于记录, 因此采用上一代头狼与当前头狼共同引导人工狼搜索, 使其在更均匀地探索整个空间的同时避免陷入局部最优, 从而提升算法的全局搜索能力. 引入精英引导策略后, 召唤行为的位置更新公式如下:

$$\begin{aligned} x_{id}^{k+1} &= x_{id}^k + \omega_1 \cdot step_b^d \cdot \frac{x_{lead}^k - x_{id}^k}{|x_{lead}^k - x_{id}^k|} + \omega_2 \cdot \\ &step_b^d \cdot \frac{x_{lead}^{k-1} - x_{id}^k}{|x_{lead}^{k-1} - x_{id}^k|}. \end{aligned} \quad (8)$$

围攻行为的位置更新公式如下:

$$\begin{aligned} x_{id}^{k+1} &= x_{id}^k + \omega_3 \cdot \lambda \cdot step_c^d \cdot |x_{lead}^k - x_{id}^k| + \omega_4 \cdot \\ &\lambda \cdot step_c^d \cdot |x_{lead}^{k-1} - x_{id}^k|. \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $x_{lead}^k$  为当前种群的头狼,  $x_{id}^{k-1}$  为上一代种群的头狼,  $w_1 = 0.5\|x_{lead}^k - x_{id}^k\|$ ,  $w_2 = 0.5\|x_{elite}^k - x_{id}^k\|$ ,  $w_3 = 0.5r\|x_{lead}^k - x_{id}^k\|$ ,  $w_4 = 0.5r\|x_{elite}^k - x_{id}^k\|$ ,  $r = -2 * rand + 2$ , 其余变量含义与式 (3)(5) 一致, 当前种群头狼的位置相较上一代头狼的位置大概率较优, 以当前种群头狼的位置为主要引导方向.

$w_1$  和  $w_2$  用于动态调节奔袭阶段个体的步长, 依赖个体与当前头狼或精英解的欧氏距离自适应调整. 当个体距离指导解较远时步长增大, 有利于快速靠近优质解; 当个体接近指导解时步长减小, 有利于局部精细搜索, 在保证快速收敛的同时提高搜索效率.  $w_3$  和  $w_4$  用于动态调节围攻阶段个体的移动步长, 在自适应基础上引入随机变量  $r \sim U(0, 2)$ , 在每次迭代中具有随机性, 这不仅增加了个体移动方向和步长的多样性, 还增强了全局搜索能力和种群多样性, 降低陷入局部最优的风险.

### 2.3 差分进化更新机制

多目标狼群算法采用个体拥挤度对种群进行更新, 算法前期, 非支配解的数量远小于种群规模, 种群整体趋向于收敛, 通过拥挤距离更新种群导致支配等级较优但拥挤度较差的优势个体被删除, 种群收敛速度变慢. 算法后期, 种群大部分个体进化停滞且接近真实前沿, 种群整体趋向于维护多样性, 通过拥挤度淘汰个体导致相对拥挤的非支配解被成片删除, 导致所求前沿出现空缺, 种群多样性较差. 如图 1 所示, 展示非支配解小于种群规模的更新方式, 以二维空间中的三个子种群为例, 图 1(a) 为待更新种群, 其中圆代表头狼, 三角形代表支配等级为 2 的个体, 五角星代表支配等级为 3 的个体, 非支配解数量小于种群规模时, 头狼不参与更新, 其中三角形所代表的支配等级为 2 的个体相对于五角星所代表的支配等级为 3 的个体较为拥挤, 因此通过拥挤距离更新种群导致支配等级为 2 的优良个体被删除, 但实际需要删除的个体为支配等级为 3 的个体, 图 1(b) 为更新后的种群, 虽然种群分布性较好, 但种群收敛速

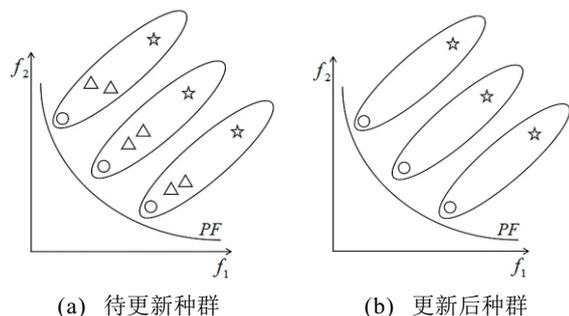


图1 非支配解小于种群规模的更新模式

度变慢.

如图 2 所示, 展示非支配解等于种群规模的更新模式, 图 2(a) 表示待更新种群, 虚线中的个体相对种群中其他个体较为拥挤, 通过拥挤距离更新之后的种群如图 2(b) 所示, 未淘汰的相邻个体之间分布较为均匀, 但整体所求前沿出现大面积空缺, 种群整体多样性较差.

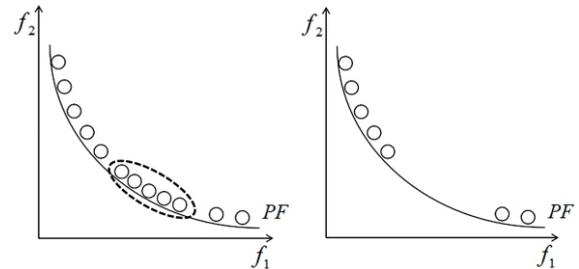


图2 非支配解等于种群规模的更新模式

针对上述问题, 设计一种差分进化更新机制, 将待更新种群中的个体通过二元锦标赛法进行两两对比, 将两个个体中的非支配个体保留, 通过二元锦标赛法筛选一个与种群规模大小相等的种群  $P$ , 将种群  $P$  中的个体进行差分变异, 将变异后的个体与种群  $P$  中的原个体进行对比, 保留较优的个体作为子代进入下一次迭代, 保留种群优良信息. 其流程如下:

首先, 对待更新种群中的个体通过二元锦标赛法进行两两对比, 将非支配个体保留, 生成与原种群规模相同的新种群  $P$ , 以保证优良信息的保留并增强多样性. 相比标准差分进化机制直接从原种群随机选择父代的做法, 本方法通过筛选非支配个体, 提高了优良解在变异中的参与概率.

然后对种群  $P$  中的个体进行差分变异, 即使在交叉操作中随机数不满足条件而导致个体保持原位置, 该策略并不会完全阻断种群演化, 而是通过控制交叉发生的频率, 在搜索初期保留较多父代结构以维持种群稳定性. 在随后的迭代过程中, 结合狼群算法中的游走、召唤与围攻行为, 种群仍能获得充分扰动与搜索动力, 从而有效避免陷入搜索停滞. 其种群更新公式如下:

$$x_{id}^{k+1} = \begin{cases} x_{id}^k + F \cdot (x_{rd}^k - x_{sd}^k) & rand < CR \\ x_{id}^k & rand \geq CR \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $x_{rd}^k$  和  $x_{sd}^k$  为第  $k$  次迭代中的任意两匹人工狼, 其中  $s, r \in [1, N]$ ,  $CR = 1 - \frac{k}{k_{max}}$ , 为交叉概率, 取值为  $[0, 1]$ ,  $F$  为缩放因子, 取值为  $[0, 2]$ , 其定义如下:

$$F = F_{min} + rand(F_{max} - F_{min}). \quad (11)$$

其中,  $F_{\min}$  为  $F$  的最小值,  $F_{\max}$  为  $F$  的最大值,  $\text{rand}$  为  $(0, 1)$  的随机数.

最后, 将变异向量与原个体进行比较, 保留较优个体进入下一代, 实现自然选择.

## 2.4 算法流程

将上述策略与多目标狼群算法进行结合, 形成 MOWPA-AE, 给出 MOWPA-AE 的算法流程.

**输入:** 种群规模  $N_{pop}$ , 最大迭代次数  $k_{\max}$ , 最大游走次数  $T_{\max}$ , 距离判定因子  $\omega$ .

**输出:** 约束帕累托最优解集.

**步骤 1:** 初始化种群. 随机生成  $N$  匹人工狼  $x_i$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, N$ , 对初始种群进行快速非支配排序, 将非支配个体设为头狼引导种群寻优.

**步骤 2:** 约束处理. 通过式 (7) 自适应调整约束程度, 并据此将种群由学习阶段切换至探索阶段.

**步骤 3:** 游走行为. 按式 (3) 更新种群位置, 若发现更优解则更新头狼, 探索结束后进入召唤行为.

**步骤 4:** 召唤行为. 头狼按式 (8) 引导种群以较大步长向头狼迁移, 直到人工狼和头狼之间的距离  $d < d_{near}$  转入围攻.

**步骤 5:** 围攻行为. 以当前头狼为猎物目标, 全部个体根据式 (9) 向头狼逼近.

**步骤 6:** 群体更新机制. 结束三种智能行为之后, 通过式 (10) 更新种群.

**步骤 7:** 判断是否达到最大迭代次数, 达到则输出约束  $PF$ , 未达到则重复步骤 2~步骤 6.

## 2.5 时间复杂度分析

本节分析 MOWPA-AE 算法的时间复杂度, 设种群大小为  $N$ , 目标数为  $M$ , 多目标狼群算法通过非支配排序筛选头狼, 其时间复杂度为  $O(MN^2)$ , 非支配排序过程中对种群中的不可行解进行约束处理, 时间复杂度为  $O(N)$ ; 在召唤和围攻行为中加入精英引导策略, 通过头狼和上一代头狼共同引导人工狼进行位置更新, 时间复杂度为  $O(N)$ ; 差分进化更新机制, 通过二元锦标赛法两两对比选出种群规模为  $N$  的种群, 其时间复杂度为  $O(MN \log N)$ , 将筛选出的种群进行差分变异得到更新后的种群, 其时间复杂度为  $O(N)$ . 因此, MOWPA-AE 与 MOWPA 的时间复杂度处在同一量级, 都近似为  $O(MN^2)$ .

## 3 实验与结果分析

### 3.1 与经典约束多目标优化算法进行对比

为测试 MOWPA-AE 的性能, 本文选取 20 个 MW<sup>[26]</sup> 函数和 6 个 DTLZ<sup>[27]</sup> 函数, 其中 MW8、MW14 和 DTLZ 测试集优化问题目标数为 3, 其余

优化问题的目标数均为 2, MW 函数的决策空间维度均为 15, DTLZ1 决策空间维度为 7, DTLZ3 决策空间维度为 12. 为评估 MOWPA-AE 算法的性能, 将其与经典约束多目标优化算法 CMOEADDE<sup>[28]</sup>、CMOEAD<sup>[27]</sup>、ToP<sup>[16]</sup>、PPS<sup>[15]</sup> 的 IGD(Inverted Generation Distance)<sup>[29]</sup> 值和 Hv(Hypervolume)<sup>[30]</sup> 值进行比较, 如表 2 和表 3 所示, 各算法的参数设置按照原文或相应文献给出. 为分析算法的综合性能, 采用 IGD、Hv 指标同步量化解的收敛精度与分布特性. 在所有测试问题上, 统一设置种群规模为 100, 执行  $10^5$  次适应度评估, 以确保不同方法在相同测试环境下进行对比分析. 所有算法均独立运行 30 次, 以保证实验结果的可靠性.

表2 MOWPA-AE 与 4 种经典 CMOEAs 在 IGD 上的实验结果

问题	指标	CMOEADDE	CMOEAD	ToP	PPS	MOWPA-AE
MW1	mean	2.65e-02	6.40e-03	1.99e-01	3.18e-03	<b>1.95e-03</b>
	std	7.48e-02	8.48e-03	0.00e+00	3.83e-04	<b>2.37e-04</b>
MW2	mean	1.58e-01	2.24e-02	1.76e-01	1.58e-01	<b>4.17e-03</b>
	std	9.03e-02	1.02e-02	1.23e-01	1.05e-01	<b>3.61e-05</b>
MW3	mean	5.16e-02	<b>5.68e-03</b>	5.34e-01	6.29e-03	6.61e-03
	std	4.82e-04	<b>7.46e-04</b>	3.78e-01	5.76e-04	4.53e-04
MW4	mean	1.50e-01	<b>4.17e-02</b>	8.26e-01	5.82e-02	4.70e-02
	std	1.39e-01	<b>6.96e-04</b>	0.00e+00	2.08e-03	1.70e-03
MW5	mean	5.29e-01	2.64e-02	9.45e-01	3.81e-01	<b>1.66e-03</b>
	std	6.53e-02	1.36e-01	0.00e+00	3.66e-01	<b>6.06e-04</b>
MW6	mean	5.40e-01	1.86e-02	7.63e-01	5.94e-01	<b>2.76e-03</b>
	std	3.60e-01	1.92e-02	3.73e-01	3.05e-01	<b>3.21e-05</b>
MW7	mean	2.05e-01	<b>4.72e-03</b>	7.39e-02	5.55e-03	5.34e-03
	std	2.16e-03	<b>8.63e-05</b>	1.59e-01	3.96e-04	2.87e-04
MW8	mean	1.98e-01	5.11e-02	7.83e-01	1.77e-01	<b>4.32e-02</b>
	std	8.16e-02	3.17e-03	3.12e-01	1.06e-01	<b>2.60e-03</b>
MW9	mean	7.00e-01	<b>9.06e-03</b>	1.03e-01	1.64e-01	1.37e-02
	std	3.46e-02	<b>2.86e-03</b>	0.00e+00	2.66e-01	6.04e-03
MW10	mean	3.32e-01	8.92e-02	NaN	4.71e-01	<b>6.68e-03</b>
	std	2.31e-01	1.72e-01	NaN	2.66e-01	<b>1.37e-03</b>
MW11	mean	NaN	1.49e-01	6.98e-01	7.25e-03	<b>6.30e-03</b>
	std	NaN	2.78e-01	1.10e-01	2.52e-04	<b>1.16e-04</b>
MW12	mean	6.91e-01	<b>4.82e-03</b>	8.26e-01	7.06e-02	6.62e-03
	std	9.09e-02	<b>1.41e-04</b>	2.09e-02	1.87e-01	9.03e-04
MW13	mean	6.45e-01	1.34e-01	7.63e-01	4.63e-01	<b>1.19e-02</b>
	std	3.20e-01	2.48e-01	4.99e-01	3.19e-01	<b>4.98e-04</b>
MW14	mean	4.90e-01	2.12e-01	4.46e-01	1.47e-01	<b>1.09e-01</b>
	std	8.94e-02	1.30e-03	4.04e-01	2.93e-02	<b>1.01e-03</b>
总排名		0	5	0	0	<b>9</b>
秩均值		4.1071	1.8571	4.6429	2.9643	<b>1.4286</b>
最终排名		4	2	5	3	<b>1</b>

从表 2 的 IGD 结果可见, MOWPA-AE 在 MW 系列测试函数上整体表现最佳, 最终排名第 1, 并在多数问题中同时获得较小的均值和标准差, 显示出

**表3 MOWPA-AE 与 4 种经典 CMOEAs 在 Hv 上的实验结果**

问题	指标	CMOEADE	CMOEA	ToP	PPS	MOWPA-AE
MW1	mean	4.63e-01	4.83e-01	2.79e-01	4.87e-01	<b>4.89e-01</b>
	std	6.59e-02	1.02e-02	0.00e+00	1.22e-03	<b>2.34e-04</b>
MW2	mean	3.79e-01	5.50e-01	3.68e-01	3.86e-01	<b>5.80e-01</b>
	std	9.67e-02	1.61e-02	1.26e-01	1.14e-01	<b>4.36e-03</b>
MW3	mean	5.35e-01	<b>5.44e-01</b>	2.02e-01	5.43e-01	5.41e-01
	std	1.14e-03	<b>5.13e-04</b>	2.02e-01	8.26e-04	5.14e-04
MW4	mean	6.63e-01	<b>8.41e-01</b>	9.99e-02	8.11e-01	8.38e-01
	std	1.54e-01	<b>6.17e-04</b>	0.00e+00	5.12e-03	4.51e-03
MW5	mean	1.67e-01	3.16e-01	0.00e+00	2.01e-01	<b>3.23e-01</b>
	std	2.30e-02	4.25e-02	0.00e+00	1.12e-01	<b>1.52e-03</b>
MW6	mean	1.06e-01	3.06e-01	7.90e-02	8.58e-02	<b>3.28e-01</b>
	std	8.79e-02	2.11e-02	7.56e-02	7.89e-02	<b>9.71e-05</b>
MW7	mean	3.41e-01	4.11e-01	3.64e-01	<b>4.12e-01</b>	4.10e-01
	std	1.30e-03	1.36e-04	6.04e-02	<b>1.33e-04</b>	5.71e-04
MW8	mean	2.53e-01	<b>5.32e-01</b>	9.67e-02	3.02e-01	5.29e-01
	std	1.07e-01	<b>1.36e-04</b>	1.20e-01	9.78e-02	8.60e-04
MW9	mean	0.00e+00	<b>3.87e-01</b>	3.02e-01	2.90e-01	3.82e-01
	std	0.00e+00	<b>1.50e-03</b>	0.00e+00	1.52e-01	2.00e-03
MW10	mean	2.54e-01	3.93e-01	NaN	1.93e-01	<b>4.51e-01</b>
	std	1.07e-01	8.66e-02	NaN	1.23e-01	<b>5.62e-03</b>
MW11	mean	NaN	4.11e-01	2.70e-01	4.47e-01	<b>4.48e-01</b>
	std	NaN	7.04e-02	1.65e-02	1.53e-04	<b>2.62e-04</b>
MW12	mean	2.94e-02	<b>6.05e-01</b>	0.00e+00	5.43e-01	6.02e-01
	std	3.77e-02	<b>2.90e-04</b>	0.00e+00	1.66e-01	8.10e-04
MW13	mean	2.22e-01	4.29e-01	2.21e-01	2.54e-01	<b>4.75e-01</b>
	std	9.94e-02	4.49e-02	1.23e-01	1.02e-01	<b>3.57e-04</b>
MW14	mean	3.63e-01	4.43e-01	3.22e-01	4.45e-01	<b>4.57e-01</b>
	std	2.13e-02	1.78e-03	1.65e-01	7.05e-03	<b>1.61e-03</b>
总排名		0	5	0	1	<b>8</b>
秩均值		4.0769	1.9231	4.6923	2.8462	<b>1.4615</b>
最终排名		4	2	5	3	<b>1</b>

更好的收敛精度与稳定性. 在 MW1–MW4 等可行域狭窄的问题中, MOWPA-AE 依然取得显著更低的 IGD, 这得益于其在进化早期适度放松约束, 使具有潜在价值的不可行解参与搜索, 避免种群过早陷入局部可行区域. 对于 MW5–MW9 这类约束与目标耦合较强、前沿形态复杂的问题, MOWPA-AE 在 IGD 均值与稳定性上优势更加明显, 说明精英引导策略通过结合当前与上一代头狼, 有效降低了单一精英导致的搜索偏置, 使解集在帕累托前沿附近分布更均匀. 在 MW10–MW14 等难度较高的问题中, 部分对比算法出现 NaN 或较大波动, 而 MOWPA-AE 仍保持稳定且较小的 IGD, 说明差分进化机制提升了种群的扰动能力, 有助于在复杂约束和多峰前沿附近获得更精细的逼近效果.

从表 3 的 HV 结果可见, MOWPA-AE 在 MW 系列测试函数上整体表现最佳, 最终排名第 1, 秩均值最低, 表明其在解集覆盖范围和分布质量上具有

整体优势. 尽管在个别问题上未取得最大 HV 值, 但在大多数 MW 测试函数中表现稳定, 标准差较小, 说明算法在不同运行中解集分布一致性较好. 在 MW1–MW4 等前沿形状复杂、可行域受限的问题中, MOWPA-AE 维持较高且稳定的 HV 值, 显示其在约束边界附近能够持续扩展解集覆盖范围. 对于 MW5–MW9 这类目标与约束强耦合、前沿跨度变化大的问题, 算法仍保持良好 HV 水平, 表明精英引导策略有助于沿帕累托前沿均衡扩展解集, 避免局部集中. 在 MW10–MW14 等高难度问题中, 部分对比算法出现 NaN 或 HV 波动较大, 而 MOWPA-AE 仍获得稳定结果, 说明差分进化机制增强了种群扰动和多样性维持能力, 使算法在复杂约束和多峰前沿下生成覆盖范围广的非支配解集.

### 3.2 与新近约束多目标优化算法进行对比

为评估 MOWPA-AE 算法的性能, 将 MOWPA-AE 与 BiCo<sup>[31]</sup>、CMOEA\_MS<sup>[32]</sup>、TSTI<sup>[33]</sup>、TriP<sup>[34]</sup>、C3M<sup>[35]</sup>、CMEGL<sup>[36]</sup>、MOWPA-AG<sup>[25]</sup>、MOEADCMT<sup>[37]</sup> 8 种新近约束多目标优化算法进行比较, 对比算法参数设置取自相应文献, MOWPA-AE 中  $T_{\max} = 10$ ,  $\omega = 5$ ,  $T_C = 0.1k_{\max}$ . 为分析算法的综合性能, 采用 IGD、Hv 指标同步量化的收敛精度与分布特性. 对所有测试问题, 统一设置种群为 100, 执行  $10^5$  次适应度评估, 确保不同方法在同等测试环境下进行对比分析, 所有算法均独立运行 30 次.

表 4 展示了 MOWPA-AE 与 8 种新近约束进化算法在 20 个 CMOP 所取得的 IGD 均值 (Mean), 方差 (Std), 其中包含占优次数 (total)、Friedman 检验秩均值 (rank)、综合性能排名 (final rank).

由表 4 可见, MOWPA-AE 在 20 个测试函数上的 IGD 值优于其他算法 7 次, CMOEA\_MS 为 3 次, TSTI、C3M、CMEGL、MOWPA-AG 各 2 次, BiCo、MOEADCMT 各 1 次, TriP 为 0 次. MOWPA-AE 在处理 MW 类多离散可行域问题上表现突出, 能有效找到分布在不同可行域的帕累托最优解, 搜索能力强. 相比之下, BiCo、TriP 和 MOEADCMT 在 MW 测试问题上表现不佳. BiCo 若主、存档种群进化不平衡可能影响收敛, TriP 若某个种群滞后或信息贡献不足, 会降低整体优化效果, MOEADCMT 若子任务关联性不足, 协同优化可能导致种群陷入局部最优. 综合来看, MOWPA-AE 优势明显. 对 9 种算法 IGD 值的 Friedman 检验显示, MOWPA-AE 秩平均值最小, 其次为 CMEGL, 最差为 MOWPA-AG, 进一步验证了 MOWPA-AE 在求解问题上的综合性能最优.

表4 MOWPA-AE与8种新近CMOEAs在IGD上的实验结果

Problem	指标	BiCo	CMOEA_MS	TSTI	TriP	C3M	CMEGL	MOWPA-AG	MOEADCMT	MOWPA-AE
MW1	mean	2.04e-03	2.21e-03	<b>1.64e-03</b>	4.96e-03	1.86e-03	1.96e-03	6.63e-03	5.14e-02	1.95e-03
	std	3.37e-04	1.45e-02	<b>1.65e-04</b>	3.44e-03	2.03e-03	2.10e-04	1.15e-03	1.44e-01	2.37e-04
MW2	mean	1.64e-02	2.09e-02	1.63e-02	1.68e-02	7.38e-02	1.81e-02	7.86e-03	7.93e-02	<b>4.17e-03</b>
	std	6.30e-03	1.41e-02	9.29e-04	7.38e-03	1.08e-03	7.22e-03	9.98e-04	6.98e-02	<b>3.61e-05</b>
MW3	mean	8.02e-03	6.49e-03	6.62e-03	6.31e-03	<b>5.60e-03</b>	6.86e-03	3.93e-02	5.68e-03	6.61e-03
	std	8.86e-03	1.67e-01	4.30e-02	3.98e-03	<b>1.23e-04</b>	5.07e-04	1.87e-03	4.85e-04	4.53e-04
MW4	mean	4.58e-02	<b>4.19e-02</b>	4.09e-02	5.20e-02	5.41e-02	4.33e-02	5.55e-02	4.31e-02	4.70e-02
	std	2.33e-03	<b>7.54e-04</b>	2.70e-04	8.39e-04	1.86e-02	5.27e-04	3.23e-03	4.95e-04	1.70e-03
MW5	mean	1.08e-02	3.32e-02	2.84e-02	9.56e-03	1.37e-02	7.61e-03	1.53e-02	3.41e-02	<b>1.66e-03</b>
	std	6.42e-03	9.42e-02	8.58e-02	3.57e-03	3.48e-03	2.67e-03	2.81e-03	1.67e-01	<b>6.06e-04</b>
MW6	mean	2.29e-02	2.29e-02	8.02e-03	2.98e-02	1.06e-01	1.82e-02	2.43e-02	2.41e-01	<b>2.76e-03</b>
	std	1.82e-03	2.67e-02	1.79e-03	1.05e-02	2.21e-03	2.03e-03	4.52e-03	3.04e-01	<b>3.21e-05</b>
MW7	mean	8.19e-03	5.53e-02	6.12e-03	7.76e-03	6.09e-03	<b>4.85e-03</b>	8.90e-02	5.60e-03	5.34e-03
	std	1.80e-03	2.25e-02	2.02e-02	1.44e-03	9.13e-04	<b>5.29e-04</b>	5.83e-03	5.15e-04	2.87e-04
MW8	mean	4.42e-02	6.25e-02	4.54e-02	4.66e-02	<b>2.04e-02</b>	4.42e-02	8.10e-02	7.13e-02	4.32e-02
	std	1.43e-03	6.15e-03	1.43e-02	2.35e-03	<b>4.00e-02</b>	1.80e-03	7.43e-03	3.56e-02	2.60e-03
MW9	mean	<b>9.19e-03</b>	2.45e-02	1.12e-02	1.14e-02	7.06e-01	7.54e-02	3.71e-01	1.88e-01	1.37e-02
	std	<b>2.64e-03</b>	2.18e-01	7.80e-02	4.35e-03	3.35e-02	2.15e-01	1.46e-01	3.08e-01	6.04e-03
MW10	mean	7.91e-02	1.04e-02	3.61e-02	2.10e-02	1.09e-01	2.97e-02	2.81e-02	2.96e-01	<b>6.68e-03</b>
	std	5.80e-03	2.22e-03	2.86e-03	3.08e-02	2.37e-03	2.82e-02	4.56e-03	2.46e-01	<b>1.37e-03</b>
MW11	mean	6.35e-03	<b>6.14e-03</b>	7.13e-03	6.56e-03	6.88e-03	6.20e-03	2.88e-01	9.04e-03	6.30e-03
	std	2.97e-02	<b>1.96e-02</b>	1.44e-04	1.54e-04	6.94e-04	1.52e-04	1.19e-02	1.12e-03	1.16e-04
MW12	mean	5.14e-03	5.44e-03	5.38e-03	7.25e-03	5.68e-03	<b>4.93e-03</b>	1.50e-01	9.90e-02	6.62e-03
	std	1.52e-02	7.38e-02	2.67e-02	2.29e-03	3.68e-02	<b>1.28e-04</b>	6.68e-04	2.31e-01	9.03e-04
MW13	mean	7.99e-02	2.30e-01	5.73e-01	8.07e-02	1.80e-01	5.61e-02	6.09e-02	2.40e-01	<b>1.19e-02</b>
	std	1.06e-02	7.57e-02	7.54e-02	2.68e-02	1.42e-02	4.18e-03	4.35e-03	2.37e-01	<b>4.98e-04</b>
MW14	mean	9.94e-02	2.57e-01	<b>9.57e-02</b>	1.18e-01	1.18e-01	1.06e-01	2.26e-01	1.11e-01	1.09e-01
	std	1.02e-02	1.84e-02	<b>1.21e-03</b>	3.45e-03	6.93e-02	1.69e-03	1.04e-02	4.70e-02	1.01e-03
C1_DTLZ1	mean	2.03e-02	2.06e-02	2.31e-02	2.37e-02	2.14e-02	2.05e-02	2.22e-02	2.10e-02	<b>1.99e-02</b>
	std	1.87e-04	2.12e-04	1.57e-02	4.88e-03	3.08e-04	1.42e-03	6.21e-03	1.41e-04	<b>3.55e-04</b>
C1_DTLZ3	mean	5.86e-01	<b>5.30e-02</b>	6.79e+00	1.58e-01	2.49e-01	9.97e-02	7.75e+00	6.05e-02	5.41e-02
	std	2.02e+00	<b>4.81e-04</b>	4.05e+00	9.89e-02	3.78e-01	6.26e-02	1.44e+00	1.45e-02	7.28e-04
C2_DTLZ2	mean	4.27e-02	4.25e-02	4.25e-02	4.63e-02	4.92e-02	4.26e-02	<b>4.24e-02</b>	4.44e-02	4.46e-02
	std	5.94e-04	5.36e-04	5.07e-04	7.34e-04	1.08e-03	5.39e-04	<b>4.95e-04</b>	5.66e-04	1.20e-03
C3_DTLZ4	mean	9.78e-02	6.81e-01	9.87e-02	1.12e-01	1.13e-01	9.76e-02	<b>9.65e-02</b>	1.76e-01	1.04e-01
	std	1.44e-03	7.19e-02	1.66e-03	3.41e-03	3.23e-03	1.57e-03	<b>1.41e-03</b>	1.31e-02	1.60e-03
DC1_DTLZ1	mean	1.16e-02	1.87e-02	2.26e-02	2.11e-02	2.49e-02	1.23e-02	1.22e-02	<b>1.14e-02</b>	1.17e-02
	std	1.08e-04	6.12e-03	9.93e-05	4.04e-02	7.42e-03	7.19e-04	8.84e-04	<b>1.12e-04</b>	2.02e-04
DC1_DTLZ3	mean	3.45e-02	7.64e-02	2.78e-01	1.01e-01	4.98e-01	6.79e-02	5.51e-02	3.83e-02	<b>3.34e-02</b>
	std	5.24e-04	1.11e-01	1.67e-01	7.59e-02	4.55e-01	4.72e-02	8.13e-02	9.70e-03	<b>6.62e-04</b>
Total		1	3	2	0	2	2	2	1	7
Rank		4.1000	5.1500	4.8250	5.7750	6.1750	3.6250	6.2500	6.1500	<b>2.9500</b>
Final rank		3	5	4	6	8	2	9	7	<b>1</b>

这一优势主要得益于 MOWPA 与三种关键机制的协同优化. 游走行为在搜索初期探索 MW 问题中分布于多个离散可行域的潜在帕累托解, 召唤行为强化优良搜索方向加快可行解积累, 围攻行为在后期引导种群向帕累托前沿集中, 保证整体收敛精度. 自适应约束机制通过早期放宽、后期收紧约束, 使优良不可行解参与搜索, 有效缓解 MW 与约束 DTLZ 问题中可行解稀缺对性能的限制. 精英引导

策略通过当前与上一代头狼协同, 改善解集分布均衡性; 差分进化机制增强个体间差异利用和局部扰动能力, 提高跳出局部最优的概率. 上述机制协同作用, 使 MOWPA-AE 在 MW1-MW14 及 C1\_DTLZ3、DC1\_DTLZ3 等复杂问题上获得更低、更稳定的 IGD 值.

表 5 展示了 MOWPA-AE 和 8 种新近约束进化算法在 20 个 CMOP 所取得的 Hv 均值 (Mean), 方

差 (Std), 其中包含占优次数 (total)、Friedman 检验秩均值 (rank)、综合性能排名 (final rank). 由表 5 可以看出, MOWPA-AE 在 20 个 CMOP 的 Hv 值占优 9 次, AGEMOEA 占优次数 7 次, ARMOEA 占优 2 次, PPS 和 Trip 各占优 1 次, 其余算法均占优 0 次. 通过表 5 中的 rank 可看出, MOWPA-AE 的 Friedman 秩均值最大, 其次是 Trip, 最差的是 ToP, 此排序结果表明, MOWPA-AE 算法与其他 8 种新近多目标算法对比,

求解问题的综合性能是最佳的. 表明 MOWPA-AE 的自适应约束处理机制能动态平衡算法约束满足与目标优化, 保证了 MOWPA-AE 具有较好的寻优效果.

### 3.3 策略有效性分析

为分析各个策略对算法性能的影响, 将 MOWPA 与各个策略分别结合进行测试. 表 6 展示了添加不同策略的算法在 MW 系列测试函数的

表5 MOWPA-AE 与各个对比算法在 Hv 上的实验结果

Problem	指标	BiCo	CMOEA_MS	TSTI	TriP	C3M	CMEGL	MOWPA-AG	MOEADCMT	MOWPA-AE
MW1	mean	4.88e-01	4.73e-01	4.45e-01	4.74e-01	3.35e-01	4.88e-01	4.86e-01	4.50e-01	<b>4.89e-01</b>
	std	4.54e-03	3.65e-02	8.32e-02	7.56e-02	2.07e-01	2.69e-04	2.12e-02	9.63e-02	<b>2.34e-04</b>
MW2	mean	5.65e-01	5.50e-01	5.49e-01	5.60e-01	4.55e-01	5.65e-01	5.29e-01	4.76e-01	<b>5.80e-01</b>
	std	1.22e-02	1.54e-02	1.25e-02	1.14e-02	7.02e-02	9.72e-03	5.64e-02	7.98e-02	<b>4.36e-03</b>
MW3	mean	5.41e-01	5.43e-01	5.41e-01	5.43e-01	5.40e-01	5.43e-01	5.43e-01	<b>5.44e-01</b>	5.41e-01
	std	1.50e-03	7.07e-04	1.28e-02	6.35e-04	1.18e-03	8.20e-04	4.67e-04	<b>3.29e-04</b>	5.14e-04
MW4	mean	8.39e-01	8.39e-01	8.41e-01	8.35e-01	5.72e-01	8.40e-01	<b>8.42e-01</b>	8.40e-01	8.38e-01
	std	9.21e-04	8.19e-04	5.04e-04	1.26e-03	2.39e-01	7.36e-04	<b>3.56e-04</b>	5.19e-04	4.51e-03
MW5	mean	3.06e-01	3.06e-01	2.46e-01	3.17e-01	1.60e-01	3.22e-01	2.66e-01	3.12e-01	<b>3.23e-01</b>
	std	4.97e-02	2.25e-02	9.27e-02	2.47e-02	1.11e-01	2.45e-03	4.26e-02	5.90e-02	<b>1.52e-03</b>
MW6	mean	3.17e-01	2.93e-01	2.71e-01	3.13e-01	1.21e-01	<b>3.56e-01</b>	2.14e-01	2.10e-01	3.28e-01
	std	7.38e-02	2.47e-02	4.64e-02	1.15e-02	6.53e-02	<b>1.75e-05</b>	3.16e-02	8.88e-02	9.71e-05
MW7	mean	4.09e-01	4.06e-01	4.09e-01	<b>4.12e-01</b>	4.10e-01	4.11e-01	4.10e-01	4.11e-01	4.10e-01
	std	1.36e-03	5.62e-03	3.70e-03	<b>4.54e-04</b>	9.57e-04	6.95e-04	1.60e-02	4.96e-04	5.71e-04
MW8	mean	<b>5.45e-01</b>	5.23e-01	5.23e-01	5.36e-01	3.28e-01	4.76e-01	4.93e-01	4.76e-01	5.29e-01
	std	<b>8.20e-04</b>	2.11e-02	2.04e-02	9.61e-03	8.33e-02	6.76e-02	5.29e-02	6.76e-02	8.60e-04
MW9	mean	3.67e-01	1.88e-01	3.19e-01	<b>3.90e-01</b>	1.44e-01	3.52e-01	3.66e-01	2.90e-01	3.82e-01
	std	7.01e-02	1.26e-01	1.46e-01	<b>1.15e-03</b>	1.73e-01	7.22e-02	1.01e-02	1.78e-01	2.00e-03
MW10	mean	4.21e-01	4.17e-01	3.91e-01	4.37e-01	2.10e-01	4.38e-01	3.37e-01	2.79e-01	<b>4.51e-01</b>
	std	2.55e-02	2.66e-02	6.41e-02	1.37e-02	1.07e-01	2.35e-02	7.88e-02	1.18e-01	<b>5.62e-03</b>
MW11	mean	4.43e-01	4.44e-01	4.47e-01	4.47e-01	4.39e-01	4.47e-01	4.47e-01	4.42e-01	<b>4.48e-01</b>
	std	2.10e-02	3.65e-03	6.52e-04	2.44e-04	3.30e-02	2.61e-04	3.17e-04	1.10e-02	<b>2.62e-04</b>
MW12	mean	6.04e-01	5.64e-01	5.24e-01	6.01e-01	1.83e-01	5.44e-01	<b>6.05e-01</b>	5.21e-01	6.02e-01
	std	3.70e-02	1.09e-01	2.07e-01	9.15e-04	2.57e-01	1.84e-01	<b>1.09e-04</b>	1.98e-01	8.10e-04
MW13	mean	4.60e-01	4.06e-01	3.98e-01	4.58e-01	3.25e-01	4.59e-01	3.07e-01	3.57e-01	<b>4.75e-01</b>
	std	1.32e-02	4.73e-02	4.65e-02	1.44e-02	6.81e-02	9.97e-03	1.11e-01	9.37e-02	<b>3.57e-04</b>
MW14	mean	4.63e-01	4.58e-01	4.70e-01	4.53e-01	3.37e-01	4.71e-01	4.17e-01	<b>4.72e-01</b>	4.57e-01
	std	1.06e-02	1.11e-02	4.81e-03	2.85e-02	4.23e-02	9.44e-03	6.36e-02	<b>8.44e-03</b>	1.61e-03
C1_DTLZ1	mean	8.32e-01	8.30e-01	8.38e-01	8.13e-01	7.26e-01	<b>8.41e-01</b>	8.12e-01	8.40e-01	8.36e-01
	std	5.77e-02	6.67e-03	5.77e-02	2.58e-02	1.80e-01	<b>2.38e-04</b>	2.64e-02	2.58e-04	4.51e-03
C1_DTLZ3	mean	2.70e-01	3.55e-01	2.63e-01	3.71e-01	8.56e-02	5.49e-01	1.32e-02	5.49e-01	<b>5.57e-01</b>
	std	2.08e-01	2.51e-01	1.05e-01	1.49e-01	1.69e-01	3.07e-02	7.22e-02	3.07e-02	<b>5.36e-04</b>
C2_DTLZ2	mean	5.16e-01	<b>5.17e-01</b>	5.16e-01	5.11e-01	4.88e-01	5.12e-01	5.16e-01	5.12e-01	5.05e-01
	std	1.39e-02	<b>1.24e-04</b>	1.94e-03	1.92e-03	3.29e-03	1.99e-03	1.24e-03	1.99e-03	6.64e-04
C3_DTLZ4	mean	7.87e-01	4.93e-01	7.88e-01	7.82e-01	7.77e-01	7.60e-01	<b>7.89e-01</b>	7.82e-01	7.82e-01
	std	1.14e-01	5.38e-02	1.33e-02	1.69e-03	2.14e-03	5.39e-03	<b>2.85e-04</b>	3.19e-03	3.80e-04
DC1_DTLZ1	mean	6.27e-01	<b>6.28e-01</b>	6.26e-01	6.04e-01	9.12e-02	6.25e-01	6.27e-01	6.25e-01	6.26e-01
	std	3.17e-02	<b>7.85e-03</b>	6.19e-03	9.58e-02	1.84e-01	1.65e-03	4.74e-03	1.65e-03	7.53e-05
DC1_DTLZ3	mean	4.54e-01	3.99e-01	3.14e-01	3.47e-01	4.34e-02	4.66e-01	6.28e-02	4.66e-01	<b>4.71e-01</b>
	std	4.11e-02	8.05e-02	1.18e-01	1.25e-01	1.08e-01	1.49e-02	1.40e-01	1.49e-02	<b>4.36e-04</b>
Total		1	2	0	2	0	2	3	2	<b>8</b>
Rank		4.0000	5.2500	5.3500	4.5000	8.6000	3.6250	5.2250	5.2250	<b>3.2250</b>
Final rank		3	7	8	4	9	2	5	6	<b>1</b>

表6 添加不同策略的算法在IGD上的实验结果

Problem	MOWPA mean(std)	MOWPA+A1 mean(std)	MOWPA+A1+A2 mean(std)	MOWPA+A1+A3 mean(std)	MOWPA-AE mean(std)
MW1	5.16e-1(5.91e-2)	2.56e-2(2.54e-3)	8.75e-3(5.62e-4)	7.86e-3(5.96e-4)	<b>1.95e-3(2.37e-4)</b>
MW2	1.15e-1(6.12e-2)	6.07e-2(4.32e-2)	9.56e-3(4.65e-5)	6.51e-3(3.91e-5)	<b>4.17e-3(3.61e-5)</b>
MW3	NaN(NaN)	5.17e-2(2.14e-3)	8.11e-3(6.66e-4)	7.11e-3(6.30e-4)	<b>6.61e-3(4.53e-4)</b>
MW4	NaN(NaN)	5.18e-1(6.03e-3)	8.77e-2(2.69e-3)	5.56e-2(2.13e-3)	<b>4.70e-2(1.70e-3)</b>
MW5	NaN(NaN)	1.25e-2(2.31e-3)	4.25e-3(7.86e-4)	3.68e-3(7.11e-4)	<b>1.66e-3(6.06e-4)</b>
MW6	6.28e-1(2.98e-2)	3.02e-2(3.62e-4)	5.69e-3(5.26e-5)	4.32e-3(4.39e-5)	<b>2.76e-3(3.21e-5)</b>
MW7	1.95e-1(1.60e-2)	2.03e-2(5.10e-4)	9.64e-3(4.87e-4)	7.58e-3(3.67e-4)	<b>5.34e-3(2.87e-4)</b>
MW8	1.04e+0(0.00e+0)	1.60e-1(7.36e-2)	8.92e-2(3.64e-3)	5.33e-2(3.15e-3)	<b>4.32e-2(2.60e-3)</b>
MW9	NaN(NaN)	7.16e-1(2.31e-2)	6.35e-2(9.37e-3)	3.26e-2(8.39e-3)	<b>1.37e-2(6.04e-3)</b>
MW10	1.70e-1(0.00e+0)	3.23e-2(6.21e-2)	9.21e-3(3.70e-3)	8.39e-3(2.20e-3)	<b>6.68e-3(1.37e-3)</b>
MW11	5.62e-1(0.00e+0)	4.62e-2(6.57e-3)	7.65e-3(3.54e-4)	6.64e-3(2.61e-4)	<b>6.30e-3(1.16e-4)</b>
MW12	NaN(NaN)	6.79e-2(1.11e-2)	8.53e-3(3.65e-3)	7.46e-3(1.23e-3)	<b>6.62e-3(9.03e-4)</b>
MW13	4.62e-1(1.22e-2)	2.50e-1(2.71e-3)	6.37e-2(6.95e-4)	5.24e-2(5.18e-4)	<b>1.19e-2(4.98e-4)</b>
MW14	NaN(NaN)	7.78e-1(3.16e-2)	6.50e-1(8.25e-3)	2.67e-1(6.93e-3)	<b>1.09e-1(1.01e-3)</b>
Total	0	0	0	0	<b>14</b>
rank	4.43	3.29	3.43	2.43	<b>1.43</b>
Final rank	5	4	3	2	<b>1</b>

IGD 均值 (Mean), 方差 (Std), 其中加粗部分表示在该 CMOP 上取得的最优解, 并统计 IGD 值的 Frideman 检验秩均值 (rank)、各个算法综合性能排名 (Final rank). 表中 MOWPA+A1 表示添加自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制的 MOWPA, MOWPA+A1+A2 表示添加自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制和精英引导的 MOWPA, MOWPA+A1+A3 表示添加自适应 $\varepsilon$ 约束处理机制和差分进化更新机制的 MOWPA. 由表 6 可以看出, 原始 MOWPA 因难以有效处理约束, 其 IGD 表现较差; 加入自适应约束处理机制后, 算法在 CMOP 上的性能得到显著提升. 在此基础上分别引入精英引导策略和差分进化机制, 可进一步增强种群多样性与收敛性. 综合最优解数量和性能排名来看, 结合自适应约束处理、精英引导与差分进化三种机制的 MOWPA-AE 能最大程度提升算法求解 CMOP 的能力.

为验证三种机制的协同效果, 图 3 展示了算法在不同 MW 测试问题上可行解比例随迭代的变化. 可见, 进化初期可行率由接近 0 快速升高, 这主要得益于 MOWPA 的游走与召唤行为及宽松约束策略, 使轻度违约但信息优良的个体参与进化, 加速种群向可行域收敛. 随着迭代进行, 约束逐步收紧, 搜索由全局转向局部围攻, 部分问题可行率出现短暂波动, 反映阶段切换的即时影响, 但整体未出现持续下降. 随后, 在严格约束下, 精英引导与差分进化持续发挥作用, 通过非支配排序和拥挤距离调控可行解分布, 使可行率迅速恢复并稳定在接近 1 的水平. 结果表明三种机制在不同阶段形成互补, 保证了约束满足、搜索稳定性及解集质量, 避免种群退化和可行

解丢失.

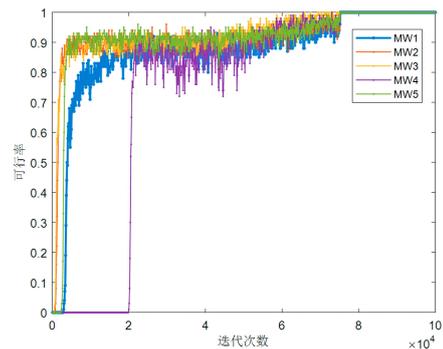


图3 可行解比例随迭代次数增加的演化曲线

#### 4 MOWPA-AE 在实际约束多目标问题上的应用

本文采用焊接梁 (Design of a welded beam)<sup>[35]</sup> 工程问题进一步验证 MOWPA-AE 的性能, 该问题需要在受剪应力、弯曲应力和屈曲载荷的约束下, 同时优化成本和末端挠度两个目标, 如图 4 所示, 为焊接梁设计示意图.

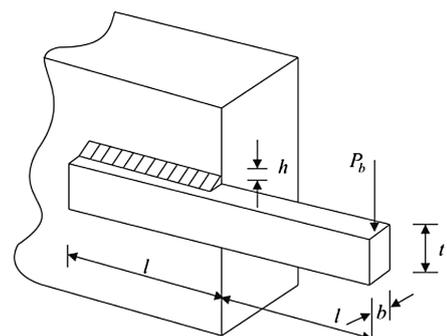


图4 焊接梁设计示意图

该问题的变量为焊缝高度 ( $h$ )、夹紧棒材长度 ( $l$ )、棒材高度 ( $t$ ) 和棒材厚度 ( $b$ ), 分别用  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  和  $x_4$  表示. 该问题是一个混合的、带约束的多目标优化问题. 从数学上来讲, 该问题数学模型如下:

$$\min f_1(x) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.04811x_3x_4(14.0 + x_2)f_2(x) = \delta(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to } & \tau(x) - \tau_{\max} \leq 0 \\ & \sigma(x) - \sigma_{\max} \leq 0 \\ & x_1 - x_4 \leq 0 \\ & 0.125 - x_1 \leq 0 \\ & P - P_C(x) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{where } \tau(x) = \sqrt{(\tau')^2 + \frac{2\tau'\tau''x_2}{2R} + (\tau'')^2}$$

$$\tau' = \frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2}$$

$$\tau'' = \frac{MR}{J}$$

$$M = P(L + \frac{x_2}{2})$$

$$R = \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + (\frac{x_1 + x_3}{2})^2}$$

$$J = 2\left\{\frac{x_1x_2}{\sqrt{2}}\left[\frac{x_2^2}{12} + (\frac{x_1 + x_3}{2})^2\right]\right\}$$

$$\sigma(x) = \frac{6PL}{x_4x_3^2}$$

$$\delta(x) = \frac{4PL^3}{Ex_4x_3^3}$$

$$P_C(x) = \frac{4.013\sqrt{\frac{EGx_2^2x_4^4}{36}}}{L^2}\left(1 - \frac{x_3}{2L}\sqrt{\frac{E}{4G}}\right) \quad (12)$$

其中,  $x_1 \in [0.125, 5]$ ,  $x_2 \in [0.1, 10]$ ,  $x_3 \in [0.1, 10]$ ,  $x_4 \in [0.125, 5]$ ,  $P = 6000\text{lb}$ ,  $L = 14\text{in}$ ,  $\delta_{\max} = 0.25\text{in}$ ,  $E = 30 \times 10^6\text{psi}$ ,  $G = 12 \times 10^6\text{psi}$ ,  $\tau_{\max} = 13600\text{psi}$ ,  $\sigma_{\max} = 30000\text{psi}$ .

通过 IGD 指标评价 MOWPA-AE 求解焊接梁工程问题的性能, 并与其他 8 种约束多目标进化算法进行对比, 为确保实验的公平性, 各算法在该实际问题中独立运行 10 次, 算法评估次数为 50000 次.

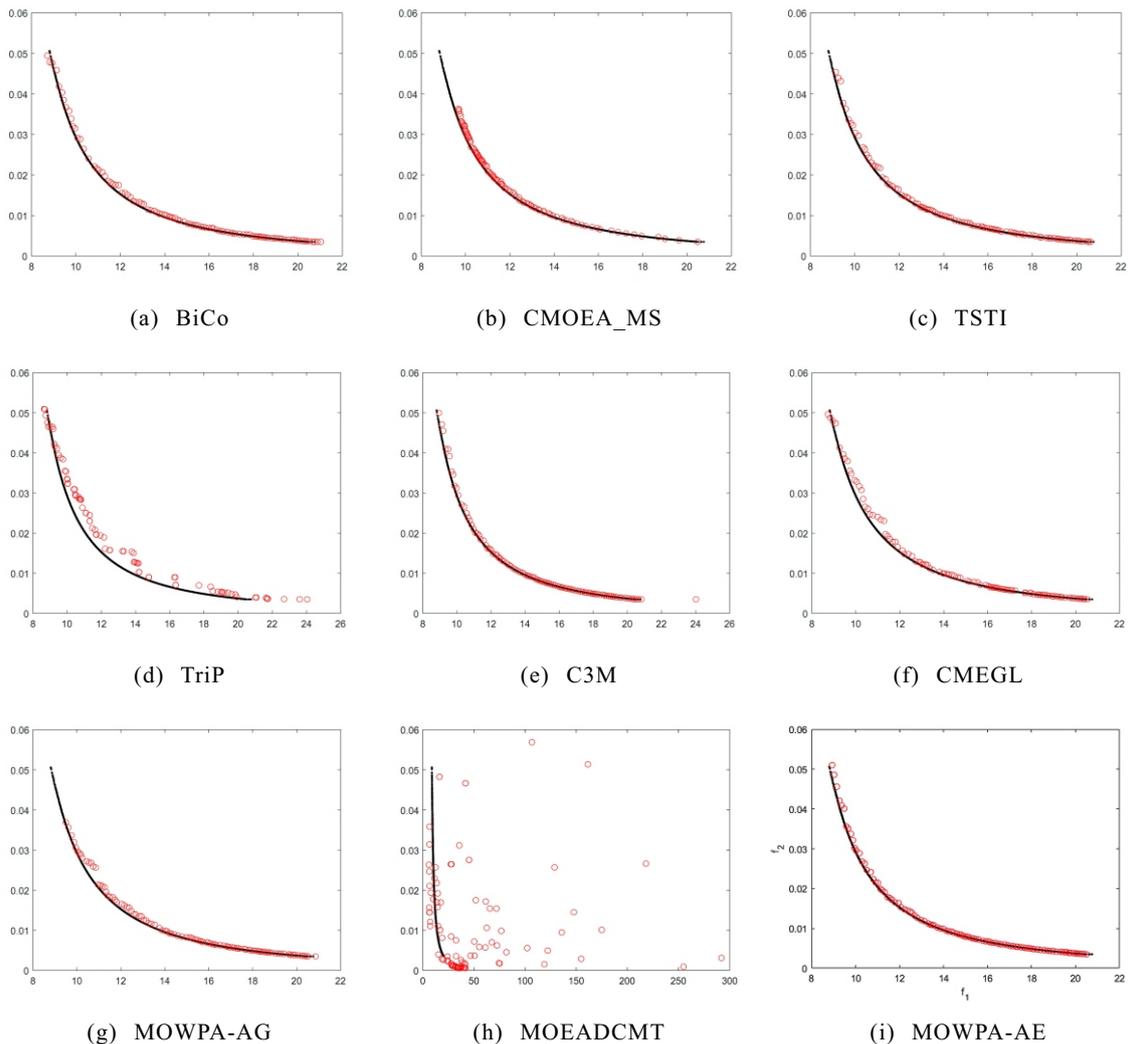


图5 9种算法在焊接梁问题中的帕累托前沿拟合图

表7展示了MOWPA-AE与其他对比算法在该实例问题上的IGD均值(mean)和方差(std),其中最优的为MOWPA-AE,其次是C3M、BiCo、TSTI、CMEGL、TriP、MOWPA-AG、CMOEA\_MS,最差的是MOEADCMT.图5展示了MOWPA-AE和其他

8种对比算法在焊接梁问题上的前沿拟合图,MOWPA-AE获取的解较接近真实的约束帕累托前沿.表中的结果表明MOWPA-AE在处理焊接梁工程问题时的性能要优于其他8种对比算法.

表7 MOWPA-AE与8种算法在焊接梁问题的IGD结果

Problem	BiCo	CMOEA_MS	TSTI	TriP	C3M	CMEGL	MOWPA-AG	MOEADCMT	MOWPA-AE
WeldedBeam	3.41E-02	7.69E-02	3.47E-02	4.39E-02	3.28E-02	3.75E-02	6.53E-02	3.345E-01	<b>3.21E-02</b>
	3.83E-03	7.40E-03	6.17E-03	6.20E-03	6.46E-01	5.30E-03	2.18E-02	1.19E-01	<b>8.53E-04</b>

## 5 结论

针对约束多目标优化中难以同时兼顾目标优化、约束满足、种群多样性和收敛性的问题,本文提出嵌入自适应约束处理的多目标狼群算法.首先,引入自适应约束机制,将进化过程划分为学习阶段和探索阶段:学习阶段侧重快速收敛,探索阶段侧重约束满足,引导种群在可行域内扩散检索约束前沿.基于此机制,引入精英引导策略,通过当前代与上一代头狼矢量加权引导种群,提升多样性并均匀分布搜索空间.同时设计差分进化更新机制,通过两两对比保留优势个体并进行差分变异,实现收敛性与快速进化兼顾.将MOWPA-AE与8种新近约束多目标优化算法在20个CMOP测试函数上进行比较,并从多项指标及Frideman秩均值分析,结果显示MOWPA-AE性能优越.进一步,将其应用于焊接梁工程问题,验证了算法的实际应用价值.未来研究将探索其在大规模约束优化及更多工程问题中的应用.

### 参考文献 (References)

- [1] 赵嘉,钟劲文,肖人彬,等.精细搜索驱动的多目标狼群算法[J].控制理论与应用, <https://link.cnki.net/urlid/44.1240.TP.20250903.1826.030>. (Zhao J, Zhong J W, Xiao R B, et al. Multi-objective wolf pack algorithm driven with refined search[J]. Control Theory & Applications, <https://link.cnki.net/urlid/44.1240.TP.20250903.1826.030>.)
- [2] Zhou H B, Qiao J F. Multiobjective optimal control for wastewater treatment process using adaptive MOEA/D[J]. *Applied Intelligence*, 2019, 49(3): 1098-1126.
- [3] 侯莹,乔聃,韩红桂.考虑动态配送时间需求的多策略协同车辆路径优化算法[J].控制与决策, DOI: [10.13195/j.kzyjc.2025.0908](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0908). (Hou Y, Qiao D, Han H G. Multi-strategy collaborative vehicle routing optimization algorithm considering dynamic delivery time requirements[J]. Control and Decision, DOI: [10.13195/j.kzyjc.2025.0908](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2025.0908).)
- [4] 侯艳,任丙飞,滕少华,等.带罐约束的多目标短期炼油调度优化研究[J].江西师范大学学报:自然科学版, 2023, 47(3): 307-316.

- (Hou Y, Ren B F, Teng S H, et al. The multi-objective short-term scheduling optimization with charging-tank-switch-overlap constraint in refinery[J]. *Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science*, 2023, 47(3): 307-316.)
- [5] 肖人彬,邬博文,赵嘉,等.群体智能视角下的高等生物仿生计算:问题分析与综合评述[J].*复杂系统与复杂性科学*, 2025, 22(1): 1-10. (Xiao R B, Wu B W, Zhao J, et al. Bionic computing in higher organisms from the perspective of collective intelligence: Problem analysis and comprehensive review[J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2025, 22(1): 1-10.)
- [6] 鲁宇明,曹龙昊,董显娟,等.基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法[J].*控制与决策*, 2025, 40(8): 2473-2480. (Lu Y M, Cao L H, Dong X J, et al. A constrained multi-objective evolutionary algorithm based on average vector angle and dynamic reduction mechanism[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(8): 2473-2480.)
- [7] 赵嘉,胡秋敏,肖人彬,等.参考点引导和多策略协同的高维多目标萤火虫算法[J].*计算机研究与发展*, 2025, 62(10): 2595-2610. (Zhao J, Hu Q M, Xiao R B, et al. Many-objective firefly algorithm based on reference point guidance and multiple cooperative strategies[J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2025, 62(10): 2595-2610.)
- [8] 张丽园,刘建昌,刘圆超,等.基于自适应响应选择的动态多目标进化算法[J].*控制与决策*, 2025, 40(12): 3689-3703. (Zhao L Y, Liu J C, Liu Y C, et al. A dynamic multi-objective optimization algorithm based on adaptive response selection[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(12): 3689-3703.)
- [9] Coello C A C. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: A survey of the state of the art[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(11/12): 1245-1287.
- [10] Takahama T, Sakai S. Constrained optimization by the constrained differential evolution with gradient-based mutation and feasible elites[C]. *IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. Vancouver, 2006: 1-8.

- [11] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [12] Runarsson T P, Yao X. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2000, 4(3): 284-294.
- [13] Li K, Chen R Z, Fu G T, et al. Two-archive evolutionary algorithm for constrained multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 303-315.
- [14] Tian Y, Zhang T, Xiao J, et al. A coevolutionary framework for constrained multiobjective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 25(1): 102-116.
- [15] Fan Z, Li W J, Cai X Y, et al. Push and pull search for solving constrained multi-objective optimization problems[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 44: 665-679.
- [16] Liu Z Z, Wang Y. Handling constrained multiobjective optimization problems with constraints in both the decision and objective spaces[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(5): 870-884.
- [17] 肖人彬, 赵嘉, 崔志华, 等. 群体智能研究的范式转变[J]. *太原科技大学学报*, 2025, 46(5): 401-410.  
(Xiao R B, Zhao J, Cui Z H, et al. Paradigm shift in collective intelligence research[J]. *Journal of Taiyuan University of Science and Technology*, 2025, 46(5): 401-410.)
- [18] 吴虎胜, 张凤鸣, 吴庐山. 一种新的群体智能算法——狼群算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(11): 2430-2438.  
(Wu H S, Zhang F M, Wu L S. New swarm intelligence algorithm — Wolf pack algorithm[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(11): 2430-2438.)
- [19] 陈作汉, 曹洁, 赵付青. 基于 NSGA-II 的无线传感网络簇首选择算法[J]. *控制与决策*, 2019, 34(11): 2358-2365.  
(Chen Z H, Cao J, Zhao F Q. A NSGA-II-based algorithm for WSN cluster head selection[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(11): 2358-2365.)
- [20] Menassel R, Nini B, Mekhaznia T. An improved fractal image compression using wolf pack algorithm[J]. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 2018, 30(3): 429-439.
- [21] 马梓元, 冯鹏宇, 龚华军, 等. 基于改进图神经网络算法的异构多智能体动态任务分配[J]. *控制与决策*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0887.  
(Ma Z Y, Feng P Y, Gong H J, et al. Dynamic task allocation for heterogeneous multi-agent systems based on an improved graph neural network algorithm[J]. *Control and Decision*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.0887.)
- [22] 刘洋, 万吉林, 余敏. 基于混沌麻雀搜索算法的室内蓝牙 RSSI 标定方法[J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2024, 48(4): 359-363.  
(Liu Y, Wan J L, Yu M. The indoor bluetooth RSSI calibration method based on chaotic sparrow search algorithm[J]. *Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science*, 2024, 48(4): 359-363.)
- [23] 荀洪凯, 陶翼飞, 张源, 等. 多目标启发式狼群算法求解不相关并行机分批调度问题[J]. *信息与控制*, 2023, 52(1): 93-103.  
(Xun H K, Tao Y F, Zhang Y, et al. Multi-objective heuristic wolf pack algorithm for unrelated parallel machine batch scheduling problem[J]. *Information and Control*, 2023, 52(1): 93-103.)
- [24] 陶翼飞, 丁小鹏, 罗俊斌, 等. 基于多目标狼群算法的机场行李导入系统仿真优化研究[J]. *系统仿真学报*, 2024, 36(7): 1655-1669.  
(Tao Y F, Ding X P, Luo J B, et al. Simulation optimization of airport baggage import system based on multi-objective wolf pack algorithm[J]. *Journal of System Simulation*, 2024, 36(7): 1655-1669.)
- [25] 赵嘉, 吕丰, 肖人彬, 等. 自适应分组和拥挤距离更新的多目标狼群算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(11): 3772-3780.  
(Zhao J, Lv F, Xiao R B, et al. Multi-objective wolf pack algorithm based on adaptive grouping strategy and crowding distance[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(11): 3772-3780.)
- [26] Ma Z W, Wang Y. Evolutionary constrained multiobjective optimization: Test suite construction and performance comparisons[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(6): 972-986.
- [27] Jain H, Deb K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to an adaptive approach[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 602-622.
- [28] Li H, Zhang Q F. Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(2): 284-302.
- [29] Wang W L, Li W K, Wang Z, et al. Opposition-based multi-objective whale optimization algorithm with global grid ranking[J]. *Neurocomputing*, 2019, 341: 41-59.
- [30] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117-132.
- [31] Liu Z Z, Wang B C, Tang K. Handling constrained multiobjective optimization problems via bidirectional coevolution[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(10): 10163-10176.
- [32] Tian Y, Zhang Y, Su Y, et al. Balancing objective optimization and constraint satisfaction in constrained evolutionary multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52(9): 9559-9572.

- [33] Dong J, Gong W Y, Ming F, et al. A two-stage evolutionary algorithm based on three indicators for constrained multi-objective optimization[J]. *Expert Systems with Applications*, 2022, 195: 116499.
- [34] Ming F, Gong W Y, Wang L, et al. A tri-population based co-evolutionary framework for constrained multi-objective optimization problems[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2022, 70: 101055.
- [35] Sun R Q, Zou J, Liu Y, et al. A multistage algorithm for solving multiobjective optimization problems with multiconstraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2023, 27(5): 1207-1219.
- [36] Qiao K J, Liang J, Liu Z Y, et al. Evolutionary multitasking with global and local auxiliary tasks for constrained multi-objective optimization[J]. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2023, 10(10): 1951-1964.
- [37] Chu X, Ming F, Gong W. Competitive multitasking for computational resource allocation in evolutionary constrained multi-objective optimization[J]. *IEEE*

*Transactions on Evolutionary Computation*, DOI: 10.1109/TEVC.2024.3376728.

### 作者简介

赵嘉 (1981-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为机器学习、数据挖掘、智能计算, E-mail: [zhaojia@juwp.edu.cn](mailto:zhaojia@juwp.edu.cn);

钟劲文 (1999-), 男, 硕士生, 主要研究方向为智能计算, E-mail: [1643941134@qq.com](mailto:1643941134@qq.com);

肖人彬 (1965-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为群体智能、大规模个性化定制, E-mail: [rbxiao@hust.edu.cn](mailto:rbxiao@hust.edu.cn);

李院民 (1975-), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为嵌入式应用与无线通信, E-mail: [liyuanmin16@163.com](mailto:liyuanmin16@163.com);

吴莉娟 (2001-), 女, 硕士生, 主要研究方向为智能计算, E-mail: [lijuanwu0115@163.com](mailto:lijuanwu0115@163.com);

刘东晓 (1978-), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为数据挖掘、智能计算, E-mail: [liudongxiao@sina.com](mailto:liudongxiao@sina.com);

翁佳桥 (1999-), 男, 助理工程师, 硕士, 主要研究方向为大数据挖掘, E-mail: [wengjiaqiao957@163.com](mailto:wengjiaqiao957@163.com).