

多智能体系统固定时间旋转一致性控制

宋鑫焯, 寇立伟[†], 窦银科

(太原理工大学 电气与动力工程学院, 太原 030024)

摘要: 针对由一般线性系统驱动的移动目标, 研究二阶多智能体系统固定时间旋转一致性问题. 在复杂环境中, 考虑部分智能体因感知范围受限或通信限制而无法直接获取移动目标的位置与速度信息, 基于此, 设计一种基于时变坐标变换的分布式观测器, 该观测器只利用智能体间的局部交互信息, 使所有智能体均能在固定时间内精确估计移动目标的位置. 在此基础上, 设计局部固定时间输出反馈控制器, 通过引入目标跟踪、旋转控制、位置一致性及速度补偿项, 实现系统在无速度信息条件下的固定时间旋转一致性. 随后, 结合双边极限齐次性理论与李雅普诺夫稳定性理论, 证明系统的固定时间稳定性. 理论分析证明, 所提控制器能确保所有智能体在固定时间内实现旋转一致性. 最后, 仿真实验验证了所提控制器的有效性.

关键词: 一般线性系统; 多智能体系统; 旋转一致性; 固定时间稳定性; 分布式控制; 输出反馈控制

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.1166

引用格式: 宋鑫焯, 寇立伟, 窦银科. 多智能体系统固定时间旋转一致性控制 [J]. 控制与决策.

Fixed-time rotating consensus control of multi-agent systems

SONG Xin-ye, KOU Li-wei[†], DOU Yin-ke

(College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: This paper investigates the fixed-time rotating consensus problem of second-order multi-agent systems for a moving target governed by a general linear system. In complex environments, we consider that some agents cannot directly acquire the position and velocity information of the moving target due to limited sensing range or communication constraints. To this end, a distributed observer based on time-varying coordinate transformation is devised, using only local interaction information among agents, the proposed observer enables all agents to accurately estimate the position of the moving target within a fixed time. On this basis, a local fixed-time output feedback controller is devised, by introducing the target tracking term, rotation control term, position consensus term and velocity compensation term, the controller achieves fixed-time rotating consensus of the system in the absence of velocity measurements. Subsequently, the fixed-time stability of the closed-loop system is rigorously proved via the combination of bilateral limit homogeneity theory and Lyapunov stability theory. Theoretical analysis demonstrates that the proposed controller can guarantee all agents to achieve rotating consensus within a fixed time. Finally, numerical simulation results are provided to verify the effectiveness of the proposed controller.

Keywords: general linear system; multi agent system; rotating consensus; fixed-time stability; distributed control; output feedback

0 引言

近年来, 人工智能与自动化技术发展迅速, 多智能体系统因其在复杂任务中的出色表现, 逐渐成为控制领域的热点方向^[1-2]. 该系统由多个具备独立感知、决策与执行能力的智能体组成, 通过相互协同与信息交换, 共同完成单个智能体无法完成的复杂任

务^[3], 目前已广泛应用于传感器网络、无人机编队、无人艇协同等领域^[4-8]. 在这些应用中, 保证智能体之间的一致性是实现协同任务的基础与关键.

一致性控制是多智能体协同的核心问题, 其目标在于设计分布式控制器, 使得所有智能体在仅依赖局部邻居信息交互的条件下, 实现位置、速度等状

收稿日期: 2025-11-10; 录用日期: 2026-03-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62503353, 62403193, 62403346).

责任编委: 李忠奎.

[†]通信作者. E-mail: kouliwei@tyut.edu.cn.

态的一致收敛^[9].为进一步完成对移动目标的动态环绕监视、多智能体协同围捕等更复杂的任务^[10-11],需要将一致性问题深化与拓展至更具挑战性的旋转一致性.旋转一致性不仅要求智能体的位置与速度等状态实现一致收敛,还要求所有智能体围绕一个共同目标,以预设半径进行协同旋转运动.旋转一致性是旋转编队实现的基础,具有明确的工程价值.例如,在多无人机协同监视场景中,无人机群需围绕车辆、船只等移动目标进行圆周飞行,以保持全方位、持续性的观测视角;在海洋或大气监测中,多个移动传感节点可围绕重点区域进行旋转采样,实现数据的协同获取.因此,对旋转一致性问题的深入研究,有助于旋转编队控制在实际场景的可靠应用. Scardovi 等人^[12]率先在三维空间中采用分布式控制策略实现了智能体的旋转一致性,并证明了系统的指数收敛特性. Wang 等人^[13]进一步将该问题拓展至有向通信拓扑下的二阶系统.

然而,早期研究大多假设协同目标为静态的,且所有智能体均可直接获取目标的完整状态信息,这在实际应用中往往难以成立.实际场景中的目标通常是动态的.当目标由静态转为动态时,系统的复杂性将显著增加.部分智能体因感知范围受限或通信链路不稳定,无法直接、持续地获取目标的动态信息,智能体无法实现稳定的协同跟踪与旋转运动^[14-17].针对动态目标信息难以获取的问题,分布式观测器技术为解决该问题提供了新的思路.例如, Nino 等人^[18]提出了仅需智能体间相对距离的跟踪控制器,摆脱了对相对速度测量的依赖, Pin 等人^[19]基于时变坐标变换,为线性系统设计了状态估计器,使线性系统的状态误差能收敛至零.

然而,现有观测器多侧重于指数收敛,虽然能保证稳定,但收敛速度依赖于时间趋于无穷,难以满足旋转一致性对快速收敛的需求. Wang 等人^[20]首次针对二阶多智能体系统提出了有限时间收敛理论,使得状态误差在有限时间内趋零;在此基础上, Cao 等人^[21]结合滑模控制与有限时间稳定性理论,设计了分布式有限时间滑模估计器,解决了含未知非线性动态的编队跟踪问题.有限时间收敛虽提升了收敛速度,但其时间上界仍与系统初始状态有关. Polyakov^[22]首次针对连续时间线性系统提出了固定时间稳定性理论,其最大优势在于收敛时间上界与初始状态无关. Zuo 等人^[23]将这一理论应用于多智能体系统,提出了固定时间一致性控制方法,其优越性已在机器人编队^[24-26]、微电网控制^[27-29]等场景中得到验证.这一进展自然延伸至对收敛性能要求更

高的旋转一致性问题. Kou 等人^[30]首次实现了二阶系统的固定时间旋转一致性运动,但其方法仍依赖智能体对动态目标状态的直接感知,且缺乏针对一般线性系统动态目标的分布式固定时间观测器设计.

从工程实际来看,在多智能体围绕移动目标执行旋转任务时,部分智能体可能因传感器部署受限而无法直接获取目标位置信息.因此,在实现固定时间旋转一致性控制之前,需首先设计一种能够在固定时间内估计目标位置的分布式观测器.目前已有的一些固定时间分布式观测器的研究成果,但大多仅适用于具有积分动力特性的目标^[30-31].在实际应用中,目标动力学通常建模为一般线性系统,该类系统可描述多项式、正弦、指数及其组合等多种典型信号,适用性更强.因此,针对一般线性系统驱动的目标设计固定时间分布式观测器具有更明确的工程意义.然而,由于目标动力学形式不同,现有固定时间观测器难以直接适用.近年虽有部分相关研究,如 Dong 等人^[32]提出的观测器需部分智能体直接获取目标状态信息; Hong 等人^[33]在目标动力学未知时,要求至少一个智能体能获取目标的位置、速度及加速度信息.这些方法均依赖于目标的某些状态信息,在目标与智能体通信受限的场景中难以实现.因此,设计完全不依赖目标状态信息的固定时间分布式观测器显得尤为重要.表1对上述现有观测器的特点进行了系统对比.

表1 现有观测器对比表

文献/方法	目标模型	是否分布式	是否需要获取目标状态信息	是否需要速度信息	拓扑
文献[31]	二阶积分器	是	是	是	有向
文献[32]	异构非线性	是	是	是	有向
文献[33]	非线性系统	是	是	是	有向
文献[30]	二阶积分器	是	是	否	无向
本文	一般线性系统目标	是	否	否	无向

基于上述分析,本文围绕二阶多智能体系统的固定时间旋转一致性控制展开研究,主要贡献如下:

1. 针对部分智能体无法直接获取移动目标位置的问题,提出一种基于时变坐标变换的分布式观测器,使系统在固定时间内实现对一般线性系统驱动的移动目标的位置估计.

2. 设计一种无需速度信息的输出反馈控制器,可确保所有智能体在固定时间内实现绕移动目标的旋转一致性控制.

1 预备知识与问题陈述

在本文中,集合 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示所有的

智能体,其中 $n \geq 3$ 为智能体的数量. 给定任意向量 $x \in \mathbb{R}^r$, 其中 \mathbb{R}^r 是维数为 r 的实列向量的集合, x 的欧几里得范数定义为 $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^r x_i^2}$, 其中 x_i 是向量 x 的第 i 个元素. 对于任何标量 α , 定义 $x^{[\alpha]} = \frac{\|x\|^\alpha}{\|x\|} x$. 对于具有适当维数的反对称矩阵 S 恒有 $x^T S x^{[\alpha]} \equiv 0$ 成立. 定义符号函数 $\text{sign}(x) = \frac{x}{\|x\|}$. 给定 $r = [r_1, \dots, r_n]^T \in \mathbb{R}_+^n$ 和 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, $\epsilon^r \diamond x = [\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n]^T$ 为向量 x 以向量 r 的扩张向量. 定义对称矩阵 A 的最大特征值和最小特征值分别为 $\bar{\lambda}(A)$ 、 $\underline{\lambda}(A)$.

1.1 齐次性理论

本节给出双极限齐次性的定义, 以及后续分析所需的一些关键引理.

考虑如下动力学系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), t \geq t_0, x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

其中 $x = [x_1, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ 为系统状态, $f(x) = [f_1, \dots, f_m]^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为定义在原点附近的非线性函数.

定义 1 函数 $g(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为在 ℓ -极限下具有三元组 $(r_\ell, d_\ell, \phi_\ell)$ 的齐次函数, 其中 $r_\ell = [r_{\ell,1}, \dots, r_{\ell,m}] \in \mathbb{R}_+^m$ 为权重, $d_\ell \geq 0$ 为度, ϕ_ℓ 为近似函数, 若 g 是连续的, g_ℓ 是连续非零的, 且对每个满足 $C \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 的紧集 C , 都有 $\lim_{\epsilon \rightarrow \ell} \max_{x \in C} \left| \frac{g(\epsilon^{r_\ell} \diamond x)}{\epsilon^{d_\ell}} - g_\ell(x) \right| = 0$. 系统 $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 被称为在 ℓ -极限下具有三元组 $(r_\ell, \delta_\ell, f_\ell)$ 的齐次向量场, 其中 $r_\ell = [r_{\ell,1}, \dots, r_{\ell,m}] \in \mathbb{R}_+^m$ 为权重, $\delta_\ell \in \mathbb{R}$ 为次数, $f_\ell = [f_{\ell,1}, \dots, f_{\ell,m}]^T$ 为近似向量场, 若对每个 $i \in [m]$, f_i 是在 ℓ -极限下具有三元组 $(r_\ell, \delta_\ell + r_{\ell,i}, f_{\ell,i})$ 的齐次函数, 且 $\delta_\ell + r_{\ell,i} \geq 0$ ^[34].

定义 2 若向量场 $f(x)$ 同时是 0-极限下的齐次向量场和 ∞ -极限下的齐次向量场, 则称其满足双边极限齐次性^[34].

引理 1 假设系统 $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足双边极限性, 且具有关联三元组 (r_0, δ_0, f_0) 和 $(r_\infty, \delta_\infty, f_\infty)$. 若系统 $\dot{x} = f(x)$, $\dot{x} = f_0(x)$, 与 $\dot{x} = f_\infty(x)$ 是全局渐近稳定的, 且有 $\delta_\infty > 0 > \delta_0$ 成立, 则系统 (1) 是固定时间稳定的, 即系统 (1) 的所有解在固定时间内都收敛到原点^[22,34].

此外, 基于正定函数 $V(x)$ 固定时间稳定性将在下文给出.

引理 2 对于系统 (1), 如果存在一个李雅普诺夫函数 $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得:

$$\dot{V}(x) \leq -(\alpha(V(x))^p + \beta(V(x(t)))^q)^k$$

其中 $\alpha, \beta, p, q, k > 0, pk < 1, qk > 1$, 则系统 (1) 是固定时间稳定的, 且具有恒定的调节时间 $T \leq \frac{1}{\alpha^k(1-pk)} + \frac{1}{\beta^k(qk-1)}$ ^[22].

注 1 引理 1 基于双边极限齐次性理论, 通过近似系统证明原系统固定时间稳定, 该方法在证明固定时间稳定性时更为直接, 但不易导出收敛时间的显式参数表达式. 引理 2 基于李雅普诺夫函数, 若函数满足其对应的微分不等式, 则系统固定时间稳定, 其稳定时间上界可直接由参数 α, β, p, q, k 等显式表达.

引理 3 对任意 $\varpi_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$. 若 $p \in (0, 1]$,

则有 $(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\varpi|)^p \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\varpi|^p \leq n^{1-p} (\sum_{i \in \mathbb{N}} |\varpi|)^p$; 若 $p \in (1, \infty)$, 则有 $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\varpi|^p \leq (\sum_{i \in \mathbb{N}} |\varpi|)^p \leq n^{p-1} \sum_{i \in \mathbb{N}} |\varpi|^p$ ^[34].

1.2 问题描述

考虑如下双积分型多智能体系统:

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t), \dot{v}_i(t) = u_i(t), i \in \mathbb{N} \quad (2)$$

其中, $x_i(t) \in \mathbb{R}^2, v_i(t) \in \mathbb{R}^2$ 和 $u_i(t) \in \mathbb{R}^2$ 分别表示智能体 i 的位置、速度与控制输入. 移动目标的动力学模型为:

$$\dot{\eta}_0(t) = A\eta_0(t), x_0(t) = E\eta_0(t) \quad (3)$$

其中, $\eta_0(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示目标的内部状态, $x_0(t) \in \mathbb{R}^2$ 代表目标的位置, A 和 E 为常数矩阵. 易知目标的速度和加速度分别为 $E A \eta_0$ 和 $E A A \eta_0$. 在协同输出调节问题中, 信号 x_0 通常视作待跟踪的参考信号. 为简洁起见, 本文后续将省略时间参数 t , 例如将 $x_0(t)$ 简写为 x_0 .

本文中, 切换无向图 $\mathcal{G}^{\sigma(t)} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}^{\sigma(t)}\}$ 描述了式 (2) 中智能体间的通信拓扑, $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示智能体对应的节点集合, $\mathcal{E}^{\sigma(t)} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为智能体的边集合. 其中分段函数 $\sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, p\}$ 表示多智能体系统的网络拓扑在有限图集随时间切换. 智能体 i 的邻居集用 $\mathcal{N}_i^{\sigma(t)} = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}^{\sigma(t)}\}$ 表示, 其中 $(j, i) \in \mathcal{E}^{\sigma(t)}$ 意味着智能体 i 可从智能体 j 接收信息. 与切换无向图 $\mathcal{G}^{\sigma(t)}$ 关联的邻接矩阵 $\mathcal{A}^{\sigma(t)} = [a_{ij}^{\sigma(t)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足: 若 $(j, i) \in \mathcal{E}^{\sigma(t)}$, 则 $a_{ij}^{\sigma(t)} > 0$; 否则 $a_{ij}^{\sigma(t)} = 0$. 无向图 $\mathcal{G}^{\sigma(t)}$ 的拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}^{\sigma(t)} = [l_{ij}^{\sigma(t)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定

义为: 其对角元为 $l_{ii}^{\sigma(t)} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\sigma(t)}} a_{ij}^{\sigma(t)}$, 且当 $i \neq j$ 时, 非对角元 $l_{ij}^{\sigma(t)} = -a_{ij}^{\sigma(t)}$. 此外, $a_{i0}^{\sigma(t)} = 1$ 表示智能体 i 可获取目标的位置信息 x_0 .

在给出主要结论之前, 首先给出如下定义.

定义 3 考虑多智能体系统动力学模型 (2) 和目标的动力学模型 (3), 若闭环系统对所有 $i \neq j \in \mathcal{V}$ 满足以下条件:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} x_i(t) &= x_j(t), \quad x_i(t) \equiv x_j(t) \quad \forall t \geq T \\ \lim_{t \rightarrow T} v_i(t) &= v_j(t), \quad v_i(t) \equiv v_j(t) \quad \forall t \geq T \\ \lim_{t \rightarrow T} \bar{u}_i(t) &= S(\bar{v}_i(t)), \\ \bar{u}_i(t) &\equiv S(\bar{v}_i(t)) \quad \forall t \geq T \end{aligned} \quad (4)$$

则系统达到固定时间旋转一致性 (fixed-time rotating consensus, FRC). 其中, $\bar{u}_i(t) = u_i(t) - EAA\eta_0(t)$ 和 $\bar{v}_i(t) = v_i(t) - EA\eta_0(t)$ 分别表示智能体 i 相对于移动目标 x_0 的相对加速度和相对速度; $S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$, 其中 ω 为旋转角速度, 且其值为常数; T 是与初始条件无关的常数.

注 2 式 (4) 的前两个极限表明, 所有智能体实现了位置收敛与速度收敛; 式 (4) 的最后一个极限表明, 所有智能体以旋转角速度 ω 绕移动目标 x_0 以预设半径 R 做匀速圆周运动. 在不影响一般性的前提下, 我们仅讨论每个智能体最终沿逆时针方向运动的情形, 即 $\omega > 0$, 因此, 若式 (4) 成立, 则所有智能体达到固定时间旋转一致性 (FRC).

假设 1 目标动态模型 (3) 中, (E, A) 是可观测的.

假设 2 无向图 $\mathcal{G}^{\sigma(t)}$ 是连通的, 且至少存在一个满足 $a_{i0}^{\sigma(t)} = 1$ 的智能体, 即该智能体能够感知目标位置 x_0 , 相应地, 对角矩阵 $\mathcal{B}^{\sigma(t)} = \text{diag}(a_{10}^{\sigma(t)}, a_{20}^{\sigma(t)}, \dots, a_{n0}^{\sigma(t)}) \neq 0_{n \times n}$.

注 3 假设 2 保证矩阵 $\mathcal{H}^{\sigma(t)} = \mathcal{L}^{\sigma(t)} + \mathcal{B}^{\sigma(t)}$ 正定.

2 主要结论

从实际角度而言, 由于感知限制或通信约束, 部分智能体无法获取动态目标 (3) 的位置. 为应对这一挑战, 本节首先引入一个分布式固定时间观测器, 用于估计动态目标 (3) 的位置; 随后, 设计一个局部固定时间输出反馈控制器, 以解决 FRC 问题.

2.1 分布式固定时间观测器

为解决部分智能体无法获取目标位置的问题, 本节提出一个分布式固定时间观测器, 用于在固定时间内估计目标的状态 η_0 , 进而实现对目标位置的

间接估计. 其详细形式如下:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= A\eta_i - c_1 \varepsilon_i^{[\mu_1]} - c_2 \text{sign}(\varepsilon_i) - c_3 \varepsilon_i \\ \varepsilon_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\sigma(t)}} a_{ij}^{\sigma(t)} (\eta_i - \eta_j) + a_{i0}^{\sigma(t)} (\eta_i - P^{-1} \hat{z}) \\ \dot{\hat{z}} &= (-A + LE)^\top \hat{z} + (E^\top + PL)x_0 \\ \dot{P} &= (-A + LE)^\top P + P(-A + LE) + E^\top E \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mu_1 > 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 \geq \bar{\lambda} \left(\frac{(\mathcal{H}^{\sigma(t)})^{-1} \otimes A + (\mathcal{H}^{\sigma(t)})^{-\top} \otimes A^\top}{2} \right)$, $\hat{z}(0) = 0_{m \times 1}$

且 $P(0) = P_0 = 0_{m \times m}$, η_i 为智能体 i 对 η_0 的估计值; 选取矩阵 L 使得矩阵 $-A + LE$ 为 Hurwitz 矩阵, 由假设 1 可知 L . 需要指出, 并非所有智能体可获取目标位置 x_0 , 只有满足 $a_{i0}^{\sigma(t)} = 1$ 的少数智能体能感知 x_0 . 对于其余满足 $a_{i0}^{\sigma(t)} = 0$ 的智能体, 其对目标位置的估计依赖于与邻居间的信息交互. 接下来, 基于固定时间观测器 (5) 构造如下定理.

定理 1 考虑目标动力学模型 (3) 和固定时间观测器 (5), 在假设 1-2 下, 存在固定时间 $T^* \geq 0$, 使得对 $\eta_i(0) \in \mathbb{R}^m$, 有 $\lim_{t \rightarrow T^*} \eta_i(t) = \eta_0(t)$, 且 $\forall t \geq T^*$, $\forall i \in \mathcal{V}$, 恒有 $\eta_i(t) \equiv \eta_0(t)$, $\forall t \geq T^*$.

证明 证明过程分为三步. 首先, 证明对所有 $t > 0$ 的情况下, 矩阵 $P(t)$ 是可逆的; 接下来, 证明对所有 $t \geq 0$ 的情况下, 等式 $\dot{\hat{z}}(t) = P(t)\eta_0(t)$ 成立; 最后证明收敛性 $\lim_{t \rightarrow T^*} \eta_i(t) = \eta_0(t)$ 成立, 且对所有 $t \geq T^*$, $i \in \mathcal{V}$, 恒有 $\eta_i(t) \equiv \eta_0(t)$, $\forall t \geq T^*$.

步骤 1: 根据式 (5), 可得如下形式的李雅普诺夫矩阵微分方程:

$$\begin{cases} \dot{P} = (-A + LE)^\top P + P(-A + LE) + E^\top E \\ P(0) = P_0 = 0_{m \times m} \end{cases} \quad (6)$$

齐次方程 $\dot{P} = (-A + LE)^\top P + P(-A + LE)$ 的解为 $P_{hom} = e^{(-A + LE)^\top t} P_0 e^{(-A + LE)t}$. 由于 $P_0 = 0_{m \times m}$, 该解退化为 $P_{hom} = 0$. 对于非齐次项 $E^\top E$, 其特解通过常数变易公式 $P(t) = \int_0^t e^{(-A + LE)^\top (t-\tau)} E^\top E e^{(-A + LE)(t-\tau)} d\tau$. 通过变量代换 $\tau' = t - \tau$ 化简后, 有:

$$P(t) = \int_0^t e^{(-A + LE)^\top \tau} E^\top E e^{(-A + LE)\tau} d\tau. \quad (7)$$

容易验证, 该式满足方程 (6). 注意到 $P(t)$ 对应于对 $(E, -A + LE)$ 的可观性格拉姆矩阵, 因此, $P(t)$ 的可逆性可由对 $(E, -A + LE)$ 的可观性证明. 根据可观性与能控性的对偶性, (E, A) 是可观的, 故对 (A^\top, E^\top) 是能控的. 由于能控性在状态反馈下保持不变, 对 (A^\top, E^\top) 施加反馈矩阵 $-L^\top$ 可得到能控

对 $(A^\top - E^\top L^\top, E^\top)$. 再次取对偶后, 这对应于对 $(E, -A + LE)$, 故该对必是可观的. 因此, 对所有 $t > 0$, $P(t)$ 是可逆的.

步骤 2: 定义 z 为 $z = P\eta_0$, 且由于 $P(0) = 0_{m \times m}$, 故 $z(0) = 0_{m \times 1}$. 对 z 关于时间求导可得:

$$\dot{z} = \dot{P}\eta_0 + PA\eta_0. \quad (8)$$

将式 (5) 的最后一个方程代入式 (8) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (-A + LE)^\top z + PLE\eta_0 + E^\top E\eta_0 = \\ &(-A + LE)^\top z + (E^\top + PL)x_0. \end{aligned} \quad (9)$$

结合式 (9) 和式 (5) 中的 \dot{z} , 误差 $\tilde{z} = z - \hat{z}$ 的动态演化满足: $\dot{\tilde{z}} = (-A + LE)^\top \tilde{z}$, 且 $\tilde{z}(0) = 0_{m \times 1}$. 由于 $(-A + LE)$ 是 Hurwitz 矩阵, 该系统是指数稳定的. 此外, 在初始条件 $\tilde{z}(0) = 0_{m \times 1}$ 下, 误差 \tilde{z} 对所有 $t \geq 0$ 消失. 因此, 对所有 $t \geq 0$, 有 $\hat{z}(t) = z(t) = P(t)\eta_0(t)$.

步骤 3: 根据前两个步骤, 有 $P^{-1}\hat{z} = P^{-1}P\eta_0 = \eta_0$. 于是, 观测器 (5) 可简化为:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= A\eta_i - c_1 \varepsilon_i^{[\mu_1]} - c_2 \text{sign}(\varepsilon_i) - c_3 \varepsilon_i \\ \varepsilon_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\sigma(t)}} a_{ij}(\eta_i - \eta_j) + a_{i0}(\eta_i - \eta_0). \end{aligned} \quad (10)$$

为便于表达, 定义 $\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}, Y_i$ 和 Y 如下: $\tilde{\eta}_i = \eta_i - \eta_0$, $\tilde{\eta} = [\tilde{\eta}_1^\top, \dots, \tilde{\eta}_n^\top]^\top$, $Y_i = c_1 \varepsilon_i^{[\mu_1]} + c_2 \text{sign}(\varepsilon_i) + c_3 \varepsilon_i$, 且 $Y = [Y_1^\top, \dots, Y_n^\top]^\top$. 此时有 $\dot{\tilde{\eta}} = (I_n \otimes A)\tilde{\eta} - Y$, 其中 \otimes 为克罗内克积. 定义 ε 为 $\varepsilon = [\varepsilon_1^\top, \dots, \varepsilon_n^\top]^\top$, 则有 $\varepsilon = (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2)\tilde{\eta}$. 选取李雅普诺夫候选函数为 $V_\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^\top (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2)^{-1} \varepsilon$. 对 V_ε 求时间导数可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varepsilon &= \varepsilon^\top (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2)^{-1} ((\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2) \dot{\tilde{\eta}}) = \\ &\varepsilon^\top (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2)^{-1} (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2) ((I_n \otimes A)\tilde{\eta} - Y) = \\ &\varepsilon^\top (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2)^{-1} (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2) (I_n \otimes A)\tilde{\eta} - \\ &\varepsilon^\top (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2)^{-1} (\mathcal{H}^{\sigma(t)} \otimes I_2) Y = \\ &\varepsilon^\top ((\mathcal{H}^{\sigma(t)})^{-1} \otimes A)\varepsilon - \varepsilon^\top Y \leq \\ &-\varepsilon^\top (c_1 \times [(\varepsilon_1^{[\mu_1]})^\top, \dots, (\varepsilon_n^{[\mu_1]})^\top]^\top + \\ &c_2 \times [\text{sign}(\varepsilon_1)^\top, \dots, \text{sign}(\varepsilon_n)^\top]^\top) = \\ &-c_1 \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^{1+\mu_1} - c_2 \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\| \leq \\ &-c_1 n^{\frac{1-\mu_1}{2}} \left(\sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 \right)^{\frac{1+\mu_1}{2}} - c_2 \left(\sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 第一个不等式由下述结果得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon^\top ((\mathcal{H}^{\sigma(t)})^{-1} \otimes A)\varepsilon - c_3 \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 = \\ -c_3 \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 + \end{aligned}$$

$$\varepsilon^\top \left(\frac{(\mathcal{H}^{\sigma(t)})^{-1} \otimes A + (\mathcal{H}^{\sigma(t)})^{-\top} \otimes A^\top}{2} \right) \varepsilon \leq 0,$$

第二个不等式通过引理 3 的如下不等式推导得出:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^{1+\mu_1} &\geq n^{\frac{1-\mu_1}{2}} \left(\sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 \right)^{\frac{1+\mu_1}{2}} \\ \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\| &\geq \left(\sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

此外, 由于矩阵 $\mathcal{H}^{\sigma(t)}$ 是正定的, 故有:

$$V_\varepsilon \leq \frac{1}{2 \min_{\sigma(t) \in \mathcal{P}} \lambda(\mathcal{H}^{\sigma(t)})} \varepsilon^\top \varepsilon = \frac{1}{2\lambda_{\min}} \sum_{i \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_i\|^2 \quad (12)$$

式中, $\lambda_{\min} = \min_{\sigma(t) \in \mathcal{P}} \lambda(\mathcal{H}^{\sigma(t)})$. 将式 (12) 代入式 (11) 可得: $\dot{V}_\varepsilon \leq -\kappa_1 V_\varepsilon^{\frac{1+\mu_1}{2}} - \kappa_2 V_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, 其中 $\kappa_1 = c_1 n^{\frac{1-\mu_1}{2}} (2\lambda_{\min})^{\frac{1+\mu_1}{2}} > 0$, $\kappa_2 = c_2 (2\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}} > 0$. 由引理 2 易知, 存在恒定调节时间 $T^* \leq \frac{2}{\kappa_2} + \frac{2}{\kappa_1(\mu_1 - 1)}$, 使得 $\lim_{t \rightarrow T^*} \eta_i(t) = \eta_0$ 且对所有的 $t \geq T^*$, $i \in \mathcal{V}$, 有 $\eta_i(t) \equiv \eta_0$. 证明成立. \square

注 4 如观测器 (5) 所示, 矩阵 $P(t)$ 仅出现在满足 $a_{i0}^{\sigma(t)} = 1$ 的智能体的观测器 $P^{-1}z$ 中. 对于无法直接感知目标的智能体, 即满足 $a_{i0}^{\sigma(t)} = 0$ 的智能体, 其目标状态估计则仅依赖于与邻居间的信息交互, 不涉及 $P(t)$ 的计算或共享. $P(t)$ 的可逆性由 $(E, -A + LE)$ 的可观性保证. 由于系统 (E, A) 可观, 可证 $(E, -A + LE)$ 可观, 故对 $t > 0$, $P(t)$ 是可逆的, 因此 P^{-1} 存在. 尽管理论上 $t > 0$ 时矩阵 $P(t)$ 可逆, 但初始条件 $P(0) = 0$ 会在数值计算中引起 $t = 0^+$ 时刻的奇异. 为保证仿真稳定且不影响理论结论, 论文采用了短延时启动, 在极小区间 $[0, \epsilon]$ 内, 令 $z = 0$, 此时暂不引入 $P^{-1}z$, 即在 $t = \epsilon$ 时启动观测器. 由于 ϵ 可任意小且 $P(t)$ 在 $t > 0$ 后保持正定, 不影响观测器在 $t \geq \epsilon$ 后的固定时间收敛性. 此数值方案仅为规避初始时刻矩阵 $P(t)$ 求逆奇异而设, 与系统收敛性的理论分析结论一致.

2.2 局部控制器设计

为解决多智能体系统固定时间旋转一致性问题, 基于式 (5) 中的固定时间观测器, 提出一种分布式局部控制器. 该控制器确保所有智能体实现固定时间旋转一致性, 且与初始条件无关. 控制器设计如下:

$$\begin{cases} u_i = EAA\eta_i + RSS\rho + \psi_i + \gamma\dot{\sigma}_i \\ \psi_i = k_1(E\eta_i + R\rho - x_i)^{[\alpha_1]} + \\ \quad k_2(E\eta_i + R\rho - x_i)^{[\alpha_2]} \\ \dot{\sigma}_i = -b_1\sigma_i^{[\beta_1]} - b_2\sigma_i^{[\beta_2]} + \psi_i \end{cases} \quad (13)$$

其中, $k_1, k_2, \gamma, b_1, b_2$ 为正数, $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 1$,

且 $\beta_i = \frac{2\alpha_i}{1 + \alpha_i}$, $i = 1, 2$. 该控制器包含四项: $EAA\eta_i$; $RSS\rho$ 用于引导智能体绕目标运动 (其中 R 表示旋转半径, S 如式 (4) 定义, 且 $\rho = [\cos \omega t, \sin \omega t]^\top$); ψ_i 用于实现位置一致性; 辅助变量 σ_i 用于补偿智能体间相对速度的影响.

定理 2 考虑多智能体系统动力学模型 (2) 和运动目标动力学模型 (3). 若系统满足假设 1 和假设 2, 则在局部控制器 (13) 和分布式固定时间观测器 (5) 的作用下, 所有智能体对目标状态 η_0 的估计误差 $\tilde{\eta}_i = \eta_i - \eta$ 可在固定时间 T 内收敛至零, 且所有智能体的位置 x_i 与速度 v_i 会在固定时间 T 内达成一致性, 并以预设半径围绕智能体做匀速圆周运动, 即实现固定时间旋转一致性.

证明 如定理 1 所证, 应用分布式固定时间观测器 (5) 可保证 $\lim_{t \rightarrow T^*} \eta_i(t) = \eta_0$, 且对 $t \geq T^*$, 有 $\eta_i(t) \equiv \eta_0$. 因此, 当 $t \geq T^*$ 时, 控制器 (13) 转化为:

$$\begin{cases} u_i = EAA\eta_0 + RSS\rho + \psi_i + \gamma\dot{\sigma}_i \\ \psi_i = -k_1(x_i - x_0 - R\rho)^{[\alpha_1]} - \\ \quad k_2(x_i - x_0 - R\rho)^{[\alpha_2]} \\ \dot{\sigma}_i = -b_1\sigma_i^{[\beta_1]} - b_2\sigma_i^{[\beta_2]} + \psi_i \end{cases}$$

定义两个误差向量 \tilde{x}_i 和 \tilde{v}_i , 其中 $\tilde{x}_i = x_i - x_0 - R\rho$, 且 $\tilde{v}_i = v_i - EAA\eta_0 - RS\rho$. 将其对时间求导, 并代入上式, 可求得以下误差动力学系统, 如式 (14) 所示:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = \psi_i + \gamma\dot{\sigma}_i \\ \dot{\sigma}_i = -b_1\sigma_i^{[\beta_1]} - b_2\sigma_i^{[\beta_2]} + \psi_i \end{cases} \quad (14)$$

选取以下李雅普诺夫候选函数:

$$V_i(t) = \frac{1}{2}\|\tilde{v}_i - \gamma\sigma_i\|^2 + \frac{1}{2}\gamma\|\sigma_i\|^2 + k_1 \int_0^{\tilde{x}_i} (s)^{[\alpha_1]} ds + k_2 \int_0^{\tilde{x}_i} (s)^{[\alpha_2]} ds$$

对 $V_i(t)$ 求导得:

$$\dot{V}_i(t) = -b_1\gamma\|\sigma_i\|^{\beta_1+1} - b_2\gamma\|\sigma_i\|^{\beta_2+1} \leq 0$$

定义不变集 $\Omega = \{\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \sigma_i : \dot{V}_i = 0\}$. 根据不变集理论, 系统的所有解都收敛到集合 Ω . 因此, 我们有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i(t) = 0$, $i \in \mathcal{V}$. 由于 $\dot{\sigma}_i(t)$ 是一致连续的, 由 Barbalat 引理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\sigma}_i(t) = 0$. 随后, 由式 (14) 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t) = 0$. 此外, 满足 $(x_0 + R\rho - x_i)^\top \psi_i = k_1\|\tilde{x}_i\|^{1+\alpha_1} + k_2\|\tilde{x}_i\|^{1+\alpha_2}$; 结合 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t) = 0$, 这表明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_i(t) = 0$. 由 \tilde{v}_i 的一致连续性和 Barbalat 引理可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_i(t) = 0$. 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_i(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_i(t) = 0$ 以及

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i(t) = 0$ 成立, 系统 (14) 的全局渐近稳定性得证. 为了利用引理 1 证明系统 (14) 的固定时间稳定性, 首先必须验证系统 (14) 是否在双极限下具有齐次性. 系统 (14) 在 0-极限和 ∞ -极限下的近似系统分别给出如下:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = -k_1(1 + \gamma)\tilde{x}_i^{[\alpha_1]} - b_1\gamma\sigma_i^{[\beta_1]} \\ \dot{\sigma}_i = -b_1\sigma_i^{[\beta_1]} - k_1\tilde{x}_i^{[\alpha_1]} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = -k_1(1 + \gamma)\tilde{x}_i^{[\alpha_2]} - b_2\gamma\sigma_i^{[\beta_2]} \\ \dot{\sigma}_i = -b_2\sigma_i^{[\beta_2]} - k_2\tilde{x}_i^{[\alpha_2]} \end{cases} \quad (16)$$

采用类似的分析可证明系统 (15) 和系统 (16) 是全局渐近稳定的. 定义 $\vartheta = [\tilde{x}_i^\top, \tilde{v}_i^\top, \sigma_i^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$. 系统 (14), (15) 和系统 (16) 分别记为 $f(\vartheta) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, $f_0(\vartheta) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ 和 $f_\infty(\vartheta) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$. 接下来, 我们证明系统 $f(\vartheta)$ 同时在 0-极限和 ∞ -极限下关于三元组 $(r_0, \alpha_1 - 1, f_0)$ 是齐次的, 且在 ∞ -极限下关于三元组 $(r_\infty, \alpha_2 - 1, f_\infty)$ 是齐次的, 其中 $r_0 = (2, 2, 1 + \alpha_1, 1 + \alpha_1, 1 + \alpha_1, 1 + \alpha_1)$, $r_\infty = (2, 2, 1 + \alpha_2, 1 + \alpha_2, 1 + \alpha_2, 1 + \alpha_2)$. 为便于表达, 系统 $f(\vartheta)$, $f_0(\vartheta)$ 和 $f_\infty(\vartheta)$ 的每个标量分别定义为 $f_j(\vartheta)$, $f_{0,j}(\vartheta)$ 和 $f_{\infty,j}(\vartheta)$, $j \in \{1, \dots, 6\}$, 例如, $[f_1(\vartheta), f_2(\vartheta)]^\top = \tilde{v}_i$, 且 $[f_{0,3}(\vartheta), f_{0,4}(\vartheta)] = -k_1(1 + \gamma)\tilde{x}_i^{[\alpha_1]} - b_1\gamma\sigma_i^{[\beta_1]}$. 由于 $\alpha_2 > \alpha_1$, $(1 + \alpha_1)\beta_2 - 2\alpha_1 > 0$, 且函数 σ_i 和 \tilde{x}_i 是连续的, 因此

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} \left| \frac{[f_1(\epsilon^{r_0} \diamond \vartheta), f_2(\epsilon^{r_0} \diamond \vartheta)]^\top}{\epsilon^{\alpha_1+1}} - \frac{[f_{0,1}(\vartheta), f_{0,2}(\vartheta)]^\top}{\epsilon^{\alpha_1+1}} \right| = \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} \left| \frac{\epsilon^{1+\alpha_1}\tilde{v}_i}{\epsilon^{\alpha_1+1}} - \tilde{v}_i \right| = [0, 0]^\top \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} \left| \frac{[f_3(\epsilon^{r_0} \diamond \vartheta), f_4(\epsilon^{r_0} \diamond \vartheta)]^\top}{\epsilon^{2\alpha_1}} - \frac{[f_{0,3}(\vartheta), f_{0,4}(\vartheta)]^\top}{\epsilon^{2\alpha_1}} \right| = \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} \left| \frac{-k_1(1 + \gamma)\epsilon^{2\alpha_1}\tilde{x}_i^{[\alpha_1]} - b_1\gamma\epsilon^{(1+\alpha_1)\beta_1}\sigma_i^{[\beta_1]}}{\epsilon^{2\alpha_1}} - \right. \\ & \left. \frac{k_1(1 + \gamma)\epsilon^{2\alpha_2}\tilde{x}_i^{[\alpha_2]} + b_2\gamma\epsilon^{(1+\alpha_1)\beta_2}\sigma_i^{[\beta_2]}}{\epsilon^{2\alpha_1}} + \right. \\ & \left. k_1(1 + \gamma)\tilde{x}_i^{[\alpha_1]} + b_1\gamma\sigma_i^{[\beta_1]} \right| = \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} \left| -k_1(1 + \gamma)\epsilon^{2\alpha_2-2\alpha_1}\tilde{x}_i^{[\alpha_2]} - \right. \\ & \left. b_2\gamma\epsilon^{(1+\alpha_1)\beta_2-2\alpha_1}\sigma_i^{[\beta_2]} \right| = [0, 0]^\top \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} \left| \frac{[f_5(\epsilon^{r_0} \diamond \vartheta), f_6(\epsilon^{r_0} \diamond \vartheta)]^\top}{\epsilon^{2\alpha_1}} - \right. \\ & \left. \frac{[f_{0,5}(\vartheta), f_{0,6}(\vartheta)]^\top}{\epsilon^{2\alpha_1}} + \right. \\ & \left. \frac{b_2\epsilon^{(1+\alpha_1)\beta_2}\sigma_i^{[\beta_2]} + k_2\epsilon^{2\alpha_2}\tilde{x}_i^{[\alpha_2]}}{\epsilon^{2\alpha_1}} + \right. \end{aligned}$$

$$b_1\sigma_i^{[\beta_1]} + k_1\tilde{x}_i^{[\alpha_1]} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\vartheta \in C} | -b_2\epsilon^{(1+\alpha_1)\beta_2-2\alpha_1}\sigma_i^{[\beta_2]} - k_2\epsilon^{2\alpha_2-2\alpha_1}\tilde{x}_i^{[\alpha_2]} | = [0, 0]^T.$$

上述结果表明,系统(14)在0-极限下是齐次的,其关联三元组为 $(r_0, \alpha_1 - 1, f_0)$. 系统(14)在无穷大极限下,关联三元组为 $(r_\infty, \alpha_1 - 1, f_0)$ 时的齐次性,也可通过类似分析证明,因此此处省略. 由此,系统(14)的双极限齐次性得证.

根据引理1,系统(14)是全局固定时间稳定的,且满足 $\lim_{t \rightarrow T} \tilde{x}_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow T} \tilde{v}_i(t) = 0$, 以及 $\lim_{t \rightarrow T} \sigma_i(t) = 0$. 结合 \tilde{x}_i 与 \tilde{v}_i 的定义可知: $\lim_{t \rightarrow T} x_i(t) = x_0 + R\rho, \lim_{t \rightarrow T} v_i(t) = EA\eta_0 + RS\rho$, 且 $\lim_{t \rightarrow T} u_i(t) = EAA\eta_0 + RSS\rho$. 因此,式(4)成立. 证明成立. \square

注5 为突显本文所提固定时间控制器的优越性,在此将其与传统的有限时间控制器进行对比. 有限时间控制器的设计形式如下:

$$\begin{cases} u_i = EA^2\eta_0 + RS^2\rho + \psi_i + \gamma\sigma_i \\ \psi_i = -k_1(x_i - x_0 - R\rho)^{[\alpha_1]} \\ \dot{\sigma}_i = -b_1\sigma_i^{[\beta_1]} + \psi_i \end{cases} \quad (17)$$

该控制器可在有限时间内使系统收敛. 但是其收敛时间依赖于系统的初始状态,导致实际性能受初始条件影响而呈现较大波动. 相比之下,本文所设计的固定时间控制器(13)可以确保系统不受初始条件的影响,在固定时间内实现收敛.

注6 分布式控制器式(13)中幂次 α_i 与 β_i 的关系设计,是为了保证闭环系统严格满足双边极限齐次性,从而确保固定时间稳定性. 该关系与定理(2)证明中引入的三元组 $(r_0, \alpha_1 - 1, f_0)$ 和 $(r_\infty, \alpha_2 - 1, f_\infty)$ 密切相关. 权重项 r_0 和 r_∞ 可推广为一般形式:

$$\begin{aligned} r_0 &= l(c, c, 1 + (c - 1)\alpha_1, 1 + (c - 1)\alpha_1, \\ &\quad 1 + (c - 1)\alpha_1, 1 + (c - 1)\alpha_1r) \\ r_\infty &= l(c, c, 1 + (c - 1)\alpha_2, 1 + (c - 1)\alpha_2, \\ &\quad 1 + (c - 1)\alpha_2, 1 + (c - 1)\alpha_2r), \end{aligned}$$

其中 $c \geq 1$. 此时,为保证系统严格满足双边极限齐次性,幂次 α_i 与 β_i 需满足:

$$\beta_i = \frac{c\alpha_i}{1 + (c - 1)\alpha_i}, i \in \{1, 2\}. \quad (18)$$

采用类似的方法可验证系统(14)在该关系下仍满足双边极限齐次性. 当 $c = 2$ 时,式(18)退化为本文中的 $\beta_i = \frac{2\alpha_i}{1 + \alpha_i}, i \in \{1, 2\}$.

注7 定理(2)的证明引入三元组 $(r_0, \alpha_1 -$

$1, f_0)$ 、 $(r_\infty, \alpha_2 - 1, f_\infty)$, 其中 $\alpha_1 - 1$ 对应于定义1的 $\delta_0, \alpha_2 - 1$ 对应 δ_∞ . 控制器(13)参数 α_1 和 α_2 满足 $0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 > 1$, 因此易得 $\delta_0 < 0 < \delta_\infty$.

3 仿真结果与分析

为验证控制器的有效性,本节采用4个智能体组成的多智能体系统以及一个移动目标为例进行仿真,仿真时间为130s. 观测器(5)和控制器(13)的参数如表2所示. 智能体和移动目标的切换通信拓扑如图1所示,其中V1~V4代表智能体,L0代表移动目标. 当 $t \in [0, 65]$ s 时对应图 \mathcal{G}^1 . 当 $t \in (65, 130]$ s 时对应图 \mathcal{G}^2 , 切换信号 $\sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{P} = \{1, 2\}$. 多智能体系统的初始状态设置为:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= [10, 10]^T & v_1(0) &= [18, 18]^T \\ x_2(0) &= [-20, 20]^T & v_2(0) &= [18, 18]^T \\ x_3(0) &= [-20, 40]^T & v_3(0) &= [18, 18]^T \\ x_4(0) &= [30, 10]^T & v_4(0) &= [18, 18]^T \end{aligned}$$

表2 仿真参数

参数	值	参数	值
L	$\begin{bmatrix} -0.025 & -0.05 \\ 0.025 & -0.0375 \end{bmatrix}$	$\eta_0(0)$	$[1, 0]^T$
E	$\begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$	A	$\begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ -0.05 & 0 \end{bmatrix}$
c_1	10	k_1	1
c_2	10	k_2	1
c_3	0.1	β_1	1/3
μ_1	5/3	β_2	5/4
γ	2	α_1	1/5
b_1	1	α_2	5/3
b_2	1	R	5
ω	$\pi/2$	\bar{T}	0.01

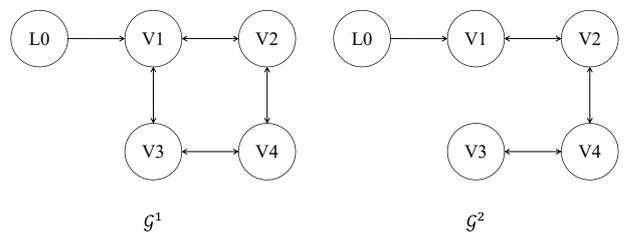


图1 智能体与移动目标的切换通信拓扑图

由图1及已知参数,求得矩阵 \mathcal{H}^1 和 \mathcal{H}^2 分别为

$$\mathcal{H}^1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

通过计算可得: $\lambda_{\min} = 0.121, \kappa_1 = 8.091, \kappa_2 =$

4.919, $T^* \leq 0.777$.

仿真结果如图2~8所示. 图2描绘了移动目标和智能体的运动轨迹, 可以看到, 智能体可以跟踪移动目标并围绕移动目标旋转一致性运动, 且最终各智能体的运动轨迹趋于重合, 系统实现固定时间旋转一致性. 图3和图4绘制了误差 \tilde{z} 和 $\tilde{\eta}_i$ 随时间变化轨迹图. 仿真结果表明, 在系统启动后的 0.19 s 内, $\tilde{\eta}_i$ 可迅速收敛, 最终收敛到 0, 表明系统可以准确估计出移动目标的状态信息, 符合理论计算值 $T^* \leq 0.777$ s. 图5绘制了 $P^{-1}\tilde{z}$ 随时间变化轨迹图. 为避免在初始时刻附近矩阵求逆出现奇异值, 当 $t \in [0, 0.01]$ s, 状态估计值 \hat{z} 设置为零, 由图可以看出, 当 $t \in [0, 0.01]$ s 时, $P^{-1}\tilde{z} = 0$. 图6展示了在固定时间控制器作用下智能体与移动目标的相对距离, 该距离最终收敛至系统预设的旋转半径 $R = 5$. 作为对比, 图7展示了在有限时间控制器 (17) 作用下智能体与移动目标的相对距离. 观察易知, 智能体与移动目标相对距离的收敛过程依赖系统的初始条件: 初始相对距离越大, 收敛所需时间越长; 反之则收敛更快. 相比之下, 固定时间控制器作用下系统的收敛时间和初始状态无关. 图8中的 \bar{u}_i 定义为 $\bar{u}_i = u_i - EA^2\eta_0$, \bar{v}_i 定义为 $\bar{v}_i = v_i - EA\eta_0$, 分别表示智能体与移动目标的相对加速度与速度, 其中 $S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$, 从图8可以明显看出, 随着时间的推移, $\|\bar{u}_i - S\bar{v}_i\|$ 的波动逐渐减小, 最终趋于稳定, 表明智能体围绕移动目标做匀速运动. 综上, 控制器 (13) 保证智能体围绕目标做匀速圆周运动, 实现固定时间

旋转一致性.

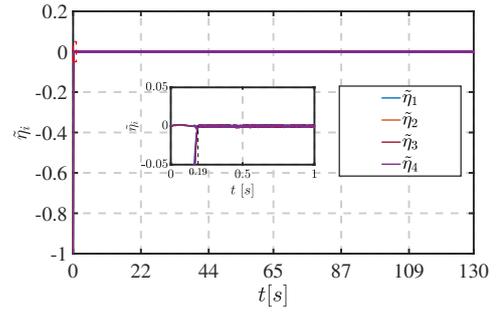


图4 $\tilde{\eta}_i$ 随时间变化轨迹图

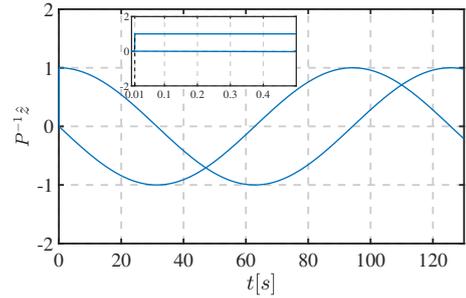


图5 $P^{-1}\tilde{z}$ 随时间变化轨迹图

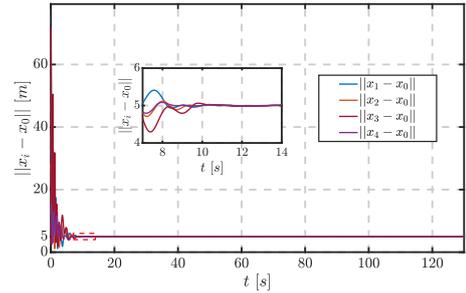


图6 固定时间下 $\|x_i - x_0\|$ 随时间变化轨迹图

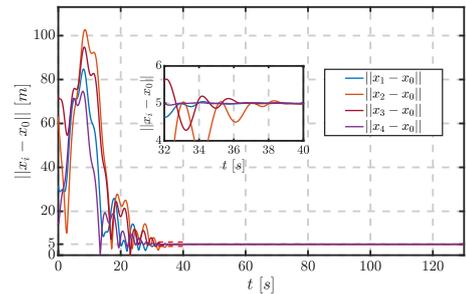


图7 有限时间下 $\|x_i - x_0\|$ 随时间变化轨迹图

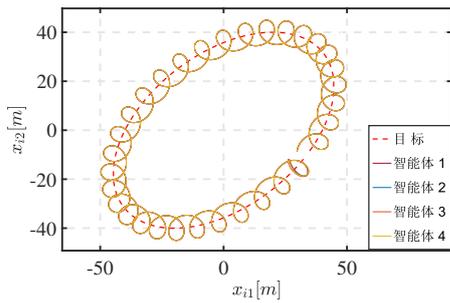


图2 智能体与移动目标轨迹

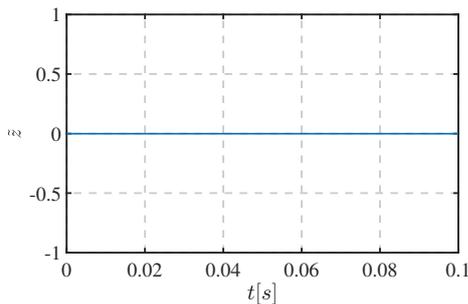


图3 \tilde{z} 随时间变化轨迹图

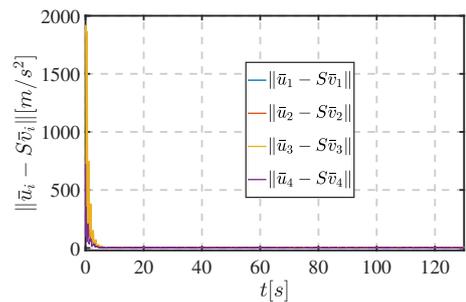


图8 $\|\bar{u}_i - S\bar{v}_i\|$ 随时间变化轨迹图

4 结论

本文针对一般线性系统驱动的移动目标,研究了二阶多智能体系统的固定时间旋转一致性控制问题.在部分智能体无法直接获取目标状态信息的情况下,提出了一种基于时变坐标变换的分布式固定时间观测器,实现了目标状态估计误差在固定时间内收敛.并在此基础上,设计了一种无需速度测量的局部固定时间输出反馈控制器,并结合李雅普诺夫稳定性分析与双边极限齐次性理论,严格证明了闭环系统能够在与初始条件无关的固定时间内实现旋转一致性.仿真结果验证了所提方法在收敛速度和旋转运动保持方面的有效性.

但是,本文的研究仍存在一定的局限性.虽然基于双边极限齐次性理论证明了所设计控制策略能够实现固定时间旋转一致性,但固定时间收敛上界难以显式给出;另一方面,为了实现固定时间收敛,控制器中引入的非线性项在状态偏差较大时可能导致控制输入幅值显著增大,在实际系统中可能引发执行器饱和、能耗增加等工程问题,而本文尚未将输入约束显式纳入控制器设计与稳定性分析;此外,本文假设智能体间的通信拓扑为无向图,但实际多智能体系统的通信链路往往具有方向性或存在非对称性.未来的研究将围绕指定时间旋转一致性控制、输入受限条件下的实用固定时间稳定性分析、有向通信拓扑以及复杂动力学多智能体系统的推广等方向展开.

参考文献 (References)

- [1] 任微, 禹梅. 具有扰动的非线性多智能体系统在非周期间歇通信下的一致性[J]. *控制与决策*, 2025, 40(12): 3743-3751.
(Ren W, Yu M. Consensus of nonlinear multi-agent systems with disturbances under aperiodic intermittent communications[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(12): 3743-3751.)
- [2] 满景涛, 曾志刚, 盛银, 等. 基于 ODE-PDE 的大规模多智能体系统有限时间编队[J]. *自动化学报*, 2025, 51(3): 631-642.
(Man J T, Zeng Z G, Sheng Y, et al. Finite-time formation of large-scale multi-agent systems based on an ODE-PDE approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(3): 631-642.)
- [3] Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control[J]. *Automatica*, 2015, 53: 424-440.
- [4] 赵超轮, 戴邵武, 赵国荣, 等. 基于分布式模型预测控制的无人机编队控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(7): 1763-1771.
(Zhao C L, Dai S W, Zhao G R, et al. Formation control of multi-UA V based on distributed model predictive control algorithm[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(7): 1763-1771.)
- [5] Hu B B, Zhang H T, Wang J. Multiple-target surrounding and collision avoidance with second-order nonlinear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 68(8): 7454-7463.
- [6] Hu B B, Zhang H T. Bearing-only motional target-surrounding control for multiple unmanned surface vessels[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(4): 3988-3997.
- [7] 寇立伟, 项基. 基于输出反馈线性化的多移动机器人目标包围控制[J]. *自动化学报*, 2022, 48(5): 1285-1291.
(Kou L W, Xiang J. Target fencing control of multiple mobile robots using output feedback linearization[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(5): 1285-1291.)
- [8] 卢剑权, 邢梦平, 张晶. 网络攻击下多智能体系统一致性安全与隐私保护研究综述[J]. *控制与决策*, 2025, 40(11): 3201-3219.
(Lu J Q, Xing M P, Zhang J. A survey on secure and privacy protection of multi-agent systems consensus under cyber attacks[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(11): 3201-3219.)
- [9] 秦家虎, 马麒超, 李曼, 等. 多智能体协同研究进展综述: 博弈和控制交叉视角[J]. *自动化学报*, 2025, 51(3): 489-509.
(Qin J H, Ma Q C, Li M, et al. Recent advances on multi-agent collaboration: A cross-perspective of game and control theory[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(3): 489-509.)
- [10] 陈琳, 郭炳晖, 段海滨, 等. 基于群体熵度量的无人机集群目标合围控制[J]. *中国科学: 技术科学*, 2023, 53(2): 177-186.
(Chen L, Guo B H, Duan H B, et al. Target enclosing control of multiple unmanned aerial vehicles based on crowd entropy[J]. *Scientia Sinica: Technologica*, 2023, 53(2): 177-186.)
- [11] 徐友春, 郭宏达, 娄静涛, 等. 无人车集群协同围捕发展现状分析[J]. *电子与信息学报*, 2024, 46(2): 456-471.
(Xu Y C, Guo H D, Lou J T, et al. Analysis on current development situation of unmanned ground vehicle clusters collaborative pursuit[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2024, 46(2): 456-471.)
- [12] Scardovi L, Leonard N E, Sepulchre R. Stabilization of collective motion in three dimensions: A consensus approach[C]. *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, 2007: 2931-2936.
- [13] Wang Y T, Sun Q. Sampled-data collective rotating consensus for second-order networks under directed interaction[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(5): 1057-1066.
- [14] Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11): 1002-1033.
- [15] 夏元清, 谢超, 高寒, 等. 天空地一体化网络环境下多

- 运动体系系统跨域协同控制与智能决策[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1176-1199.
(Xia Y Q, Xie C, Gao H, et al. Cross-domain cooperative control and intelligent decision-making of multi-dynamic agents in space-air-ground integrated network environment: A review[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1176-1199.)
- [16] 路平立, 骆文城, 杜长坤. 基于动态事件驱动的多智能体系统预测控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(12): 3981-3988.
(Lu P L, Luo W C, Du C K. Dynamic event-triggered-based predictive control of multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(12): 3981-3988.)
- [17] 周萌, 李建宇, 王昶, 等. 多机器人协同围捕方法综述[J]. *自动化学报*, 2024, 50(12): 2325-2358.
(Zhou M, Li J Y, Wang C, et al. Multi-robot cooperative hunting: A survey[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(12): 2325-2358.)
- [18] Nino C F, Patil O S, Dixon W E. Second-order heterogeneous multi-agent target tracking without relative velocities[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2023, 7: 3663-3668.
- [19] Pin G, Yang G T, Serrani A, et al. Fixed-time observer design for LTI systems by time-varying coordinate transformation[C]. *Proceedings of the 59th IEEE Conference on Decision and Control*. Jeju, 2020: 6040-6045.
- [20] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950-955.
- [21] Cao Y C, Ren W, Meng Z Y. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking[J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(9): 522-529.
- [22] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [23] Zuo Z Y, Yang W, Tie L, et al. Fixed-time consensus for multi-agent systems under directed and switching interaction topology[C]. *American Control Conference*. Portland, 2014: 5133-5138.
- [24] 向雨竹, 邹文成, 郭健, 等. 无人机领导的多无人艇系统固定时间优化编队控制[J]. *控制与决策*, 2025, 40(1): 223-230.
(Xiang Y Z, Zou W C, Guo J, et al. Fixed-time optimal formation control for multi-unmanned surface vessels under the leadership of unmanned aerial vehicle[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(1): 223-230.)
- [25] 郝爽, 何玉鹏, 陈继尧, 等. 多蛇形机器人编队路径跟踪控制[J]. *电子与信息学报*, 2024, 46(7): 2981-2993.
(Hao S, He Y P, Chen J Y, et al. Formation path-following control of multi-snake robots[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2024, 46 (7): 2981-2993.)
- [26] 伍锡如, 邢梦媛. 分数阶多机器人的领航-跟随型环形编队控制[J]. *控制理论与应用*, 2021, 38(1): 103-109.
(Wu X R, Xing M Y. Annular formation control of the leader-follower multi-robot based on fractional order[J]. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(1): 103-109.)
- [27] 李忠文, 李沛阳, 程志平, 等. 孤岛模式下交直流混合微电网互联变流器新型控制策略[J]. *电力系统保护与控制*, 2024, 52(21): 50-59.
(Li Z W, Li P Y, Cheng Z P, et al. A novel control strategy for an interlinking converter in an islanded hybrid AC/DC microgrid[J]. *Power System Protection and Control*, 2024, 52(21): 50-59.)
- [28] 刘建刚, 杨胜杰, 谢小良, 等. 并联 DC-DC 变换器系统的固定时间分布式协同控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(10): 2912-2918.
(Liu J G, Yang S J, Xie X L, et al. Fixed-time based distributed cooperative control for parallel DC-DC converter systems[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(10): 2912-2918.)
- [29] 徐波, 俞向栋, 杨逸欣, 等. 基于多智能体系统的分布式风储协同频率控制策略[J]. *电力系统保护与控制*, 2022, 50(19): 13-24.
(Xu B, Yu X D, Yang Y X, et al. Distributed wind-storage coordinate frequency control strategy based on a multi-agent system[J]. *Power System Protection and Control*, 2022, 50(19): 13-24.)
- [30] Kou L W, Huang Y, Zuo G Y, et al. Fixed-time rotating consensus control of second-order multi-agent systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2024, 34(18): 12031-12049.
- [31] Ni J K, Tang Y, Shi P. A new fixed-time consensus tracking approach for second-order multiagent systems under directed communication topology[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 2488-2500.
- [32] Dong Y, Chen Z Y. Fixed-time synchronization of networked uncertain Euler-Lagrange systems[J]. *Automatica*, 2022, 146: 110571.
- [33] Hong H F, Anderson B D O. Distributed fixed-time attitude tracking consensus for rigid spacecraft systems under directed graphs[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, 4(3): 698-703.
- [34] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, 47(4): 1814-1850.

作者简介

宋鑫焯 (2003-), 女, 硕士生, 主要研究方向为多智能体控制与协同, E-mail: 2024520556@link.tyut.edu.cn;

寇立伟 (1993-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为极地装备设计、多智能体控制与协同, E-mail: kouliwei@tyut.edu.cn;

窦银科 (1973-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为极地环境探测、新能源利用, E-mail: douyinke@tyut.edu.cn.