

排斥机制驱动的不平衡多模态多目标进化算法

段鑫绘¹, 江巧永^{1†}, 林艳艳², 邓镜达¹, 王彬¹, 黑新宏¹

(1. 西安理工大学 计算机科学与工程学院, 西安 710048; 2. 西安文理学院 信息工程学院, 西安 710065)

摘要: 针对不平衡多模态多目标优化的等效 Pareto 最优解集难以找全的问题, 提出一种排斥机制驱动的多阶段多目标演化算法. 所提出算法将整个演化过程划分为 3 个阶段, 并在不同阶段采用不同的环境选择方法, 以实现在不同的演化阶段搜索不同等效 Pareto 最优解集的优化任务: 第 1 阶段的环境选择方法仅考虑个体在目标空间中的收敛性, 这使得种群能够快速收敛至最易找到的等效 Pareto 最优解集; 第 2 阶段的环境选择方法采用基于排斥机制的搜索策略, 该策略通过对靠近已找到的等效 Pareto 最优解集的个体进行自适应惩罚, 这有利于避免种群对重复区域进行搜索和降低算法陷入单一等效 Pareto 最优解集的风险; 第 3 阶段的环境选择方法通过同时兼顾个体在目标空间和决策空间中的收敛性和多样性的方式对前两个阶段获得的等效 Pareto 最优解集进行微调, 以进一步提高算法的优化性. 实验研究结果表明: 所提出算法在相同函数评价次数条件下能够找到全部等效 Pareto 最优解集, 且与其他 7 个同类算法相比, 其在目标空间和决策空间上的综合性能方面具有一定的优势.

关键词: 多目标优化; 多模态; 不平衡; 多阶段; 排斥机制; 环境选择

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.1177

引用格式: 段鑫绘, 江巧永, 林艳艳, 等. 排斥机制驱动的不平衡多模态多目标进化算法[J]. 控制与决策.

Imbalanced multi-modal multi-objective evolutionary algorithm driven by exclusion mechanism

DUAN Xin-hui¹, JIANG Qiao-yong^{1†}, LIN Yan-yan², DENG Jing-da¹, WANG Bin¹, HEI Xin-hong¹

(1. School of Computer Science and Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;
2. School of Information Engineering, Xi'an University, Xi'an 710065, China)

Abstract: To address the issue that it is difficult to fully find the equivalent Pareto optimal solution sets in imbalanced multimodal multi-objective optimization, this paper proposes a multi-stage multi-objective evolutionary algorithm driven by an exclusion mechanism. The algorithm divides the entire evolutionary process into three stages and adopts different environmental selection methods in each stage, thereby realizing the optimization task of searching for different equivalent Pareto optimal solution sets in different evolutionary stages. Specifically, the environmental selection method in the first stage only considers the convergence of individuals in the objective space, enabling the population to quickly converge to the most easily found equivalent Pareto optimal solution set. The environmental selection method in the second stage employs a search strategy based on the exclusion mechanism, which adaptively penalizes individuals close to the already found equivalent Pareto optimal solution sets. This helps avoid the population from searching in duplicate regions and reduces the risk of the algorithm getting trapped in a single equivalent Pareto optimal solution set. The environmental selection method in the third stage fine-tunes the equivalent Pareto optimal solution sets obtained in the first two stages by simultaneously considering the convergence and diversity of individuals in both the objective space and decision space, so as to further improve the optimization performance of the algorithm. Experimental results show that the proposed algorithm can find all equivalent Pareto optimal solution sets under the condition of the same number of function evaluations, and compared with seven other similar algorithms, it has certain advantages in terms of comprehensive performance in both the objective space and decision space.

Keywords: multi-objective optimization; multimodality; imbalance; multi-stage; exclusion mechanism; environmental selection

收稿日期: 2025-11-13; 录用日期: 2026-03-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62272384, 62502379, U2468206); 陕西省自然科学基金项目 (2022JQ-674).

责任编委: 陈家伟.

[†]通信作者. E-mail: jiangqiaoyong@xaut.edu.cn.

0 引言

现实生活中经常遇到具有多个等效 Pareto 最优解的多目标问题,这类问题通常被称为多模态多目标优化问题 (Multi-modal Multi-objective Optimization Problems, MMOPs)^[1]. 与传统 MOPs 仅关注 Pareto 前沿的收敛性与多样性不同, MMOPs 还需找到全部的等效 Pareto 最优解,这对经典的进化多目标计算范式提出新的挑战.

为应对这种挑战,许多学者对 MMOPs 展开研究并提出各种基于小生境策略的多模态多目标进化算法 (Multi-modal Multi-objective Evolutionary Algorithms, MMEAs). 例如, Zou 等^[2]提出一种基于动态小生境 Pareto 支配的 MMEA,该算法在进化前期采用尺度较小的小生境来引导种群进行分散搜索,而在进化的后期则采用尺度较大的小生境以加速种群的收敛. Liang 等^[3]提出一种基于物种的 MMEA,该算法借鉴物种形成原理来划分子种群并利用差分算法实现子种群的协同进化. Lin 等^[4]提出一种基于相似小生境的 MMEA,该算法将种群划分为若干个小生境并通过相似小生境之间的知识迁移来提高种群的搜索能力. Yan 等^[5]提出一种基于知识引导的自适应动态多模态差分进化算法,利用自组织映射神经网络形成稳定的小生境. Li 等^[6]提出一种结合层级排序方法的 MMEA,该算法能够根据决策者的偏好,同时找到 MMOPs 的全局与局部帕累托前沿. Qu 等^[7]提出一种基于网格引导的粒子群优化器来求解 MMOPs,该算法利用网格将决策空间划分为若干个子区域,以此来实现种群的分散搜索,同时引入外部存档策略来保留高质量个体. Yang 等^[8]提出一种带有分解策略的 MMEA,该算法利用一组分布均匀的参考向量集将决策空间划分为多个子空间,并限制个体仅在其关联的子区域内独立进化,进而增强了种群的多样性. Yue 等^[9]提出一种基于邻域和改进特殊拥挤距离的 MMEA,该算法利用聚类方法对种群进行划分,并结合非支配排序和改进的拥挤距离方法选出多样性较好的个体进入下一代. Liu 等^[10]提出一种基于个体质量惩罚的 MMEA,该算法根据个体的强度和距离设计一种自适应的适应度调节机制,以此来增强种群的多样性. 李等^[11]提出一种基于分区搜索的 MMEA 框架,该框架通过区间等方法将决策空间划分为若干个子区域,降低算法搜索的难度. 张等^[12]提出一种兼顾种群在目标空间收敛性和在决策空间多样性的 MMEA,其中非支配解的存档保留策略和参考向量关联策略分别用于增强目标

空间的收敛性和决策空间的多样性. 程等^[13]提出一种基于改进头脑风暴的 MMEA,该算法利用 k -均值聚类 and 特殊拥挤距离平衡算法的收敛性与多样性. 此外, MMEAs 还被应用于各种工程实践问题,如无人三维路径规划^[14],旅行商问题^[15],多模态参数优化^[16],柔性作业车间调度^[17]等. MMEAs 更全面的描述可参考文献 [18].

通过对 MMEAs 代表性成果的讨论,不难发现该领域的研究主要聚焦在如何设计小生境技术来增强种群在决策空间中的多样性,而传统的进化多目标环境选择策略则用来保证种群在目标空间上的收敛性,二者的有效结合则是实现算法高效求解的关键. 目前的 MMEAs 框架大多数遵循"收敛性第一、多样性第二"或"多样性第一、收敛性第二"的原则进行设计. 前者的环境选择优先考虑种群在目标空间上的收敛性,再关注种群在决策空间上的多样性,代表性的算法如文献 [6]. 由于收敛速度过快,这类算法在演化的过程中容易丢失某些模态,特别对于搜索难度呈现显著差异的不平衡多模态多目标优化问题. 后者的环境选择优先考虑种群在决策空间上的多样性,再关注种群在目标空间上的收敛性,代表性算法如文献 [10]. 虽然这类算法较好地解决了模态容易丢失的问题,但算法的收敛速度显著降低.

针对 MMEA 在决策空间上的多样性和在目标空间上的收敛性平衡难这一瓶颈,本文设计一种面向不平衡多模态多目标优化问题的多阶段 MMEA. 该算法在第一阶段采用个体支配强度的环境选择,以引导种群快速收敛到某一模态;在第二阶段设计一种基于排斥机制的环境选择,其目的是避免种群重复搜索同一区域,进而增加算法找到其它模态的概率;在第三阶段则利用双空间近邻的环境选择来微调种群在决策空间的多样性和在目标空间上的收敛性. 最后在一组不平衡多模态多目标优化问题测试平台上验证了算法设计的有效性.

1 多模态多目标优化问题

不失一般性,最小化 M 维向量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 的数学模型可表示为:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})), \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &\in S. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: 搜索空间 $S = \prod_{i=1}^D [x_i^{lower}, x_i^{upper}]$ 为 D 维超矩形, x_i^{lower} 和 x_i^{upper} 分别为决策变量 x_i 的下界和上界, M 为目标个数. 由于子目标之间存在相互冲突的特性,因此问题 (1) 的最优解被定义成各个目标的折衷

解, 这类解通常被称为 Pareto 最优解. 下面给出相关概念^[17]:

(a) Pareto 最优解: 称 \mathbf{x}^* 是问题 (1) 的 Pareto 最优解当且仅当不存在 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, 使得 $\forall i \in \{1, 2, \dots, M\}, f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*)$ 且 $\exists j \in \{1, 2, \dots, M\}, f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*)$.

(b) 等效 Pareto 最优解: 称 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为等效 Pareto 最优解当且仅当 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为 Pareto 最优解且 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_2)$.

(c) Pareto 最优解集与最优前沿: 所有 Pareto 最优解构成 Pareto 最优解集 (Pareto-optimal Set, PS), 其在目标空间的象称为 Pareto 前沿 (Pareto-optimal Front, PF).

(d) 等效 Pareto 最优解集 (Equivalent Pareto-optimal Set, EPS): 称 $\mathbf{PS}_1, \mathbf{PS}_2$ 为等效 Pareto 最优解集当且仅当 $\mathbf{PS}_1, \mathbf{PS}_2$ 为 Pareto 最优解集且 $\{\mathbf{F}(\mathbf{PS}_1)\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{PS}_2)\}$.

(e) 多模态多目标优化问题: 称问题 (1) 为多模态多目标优化问题当且仅当存在等效 Pareto 最优解集.

上述相关概念的可视化可进一步参见图 1.

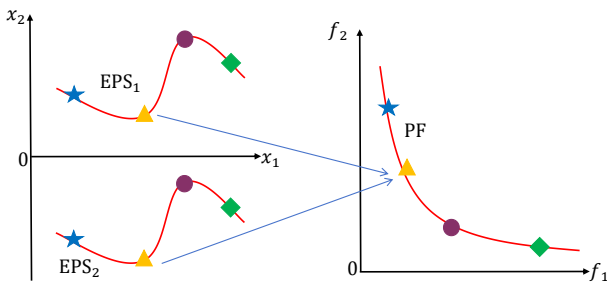


图1 多模态多目标问题示意图

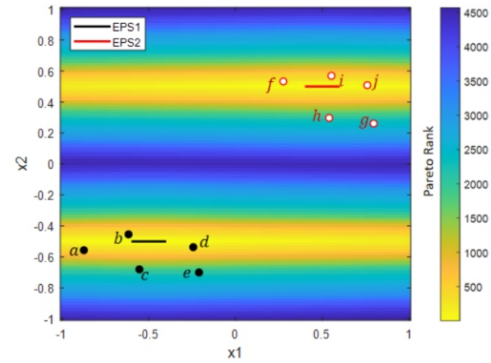
2 研究动机

文献 [10] 提出一类特殊的 MMOPs: 不平衡多模态多目标问题, 此类问题最突出的特征是不同的等效 PSs 的搜索难度差异显著, 这对 MMEA 环境选择的设计提出了新的挑战. 在本文中, 以文献 [10] 中的 IDMPM2T4 问题为例来解释这一现象:

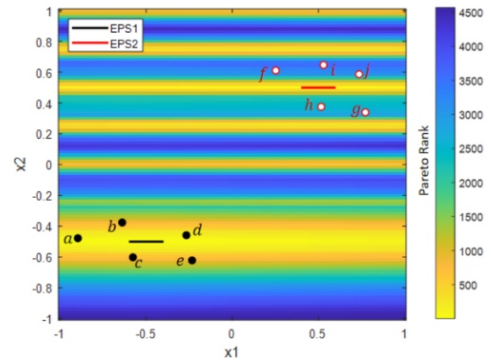
$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \min(|x_1 - 0.6| + g_1(\mathbf{x}), \\ |x_1 - 0.4| + g_2(\mathbf{x})) \\ f_2(\mathbf{x}) = \min(|x_1 + 0.4| + g_1(\mathbf{x}), \\ |x_1 - 0.6| + g_2(\mathbf{x})) \\ g_1(\mathbf{x}) = 100((x_2 + 0.5)^2 - \\ \cos(2\pi(x_2 + 0.5)) + 1) \\ g_2(\mathbf{x}) = 100((x_2 - 0.5)^2 - \\ \cos(2\pi\alpha(x_2 - 0.5)) + 1) \end{cases} \quad (2)$$

其中: 参数 α 为困难调节因子. 文献 [10] 的研究结果表明: 当 α 分别取 1 和 4 时, IDMPM2T4 问题呈现基

本平衡和显著不平衡两种状态. 为可视化这一现象, 图 2 给出其热力图. 由图 2(a) 可清楚地看到, EPS1 和 EPS2 附近的黄色区域面积基本相同, 因此 EPS1 和 EPS2 的选择压力几乎一样, 而图 2(b) 的 EPS1 附近的黄色区域面积远大于 EPS2 附近的黄色区域面积, 这使得 EPS1 的选择压力明显大于 EPS2.



(a) $\alpha = 1$



(b) $\alpha = 4$

图2 IDMPM2T4 问题在参数 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 4$ 情况下的热力图

不妨假设种群包含 10 个个体: a-j, 若采用"收敛性第一、多样性第二"的环境选择方法, 对于图 2(a) 的情形, 最终存活到下一代的个体为 b, d, f, i, j. 由于个体 b 和 d 在 EPS1 附近, 而个体 f, i 和 j 在 EPS2 附近, 因此随着搜索的深入, "收敛性第一、多样性第二"的 MMOEA 能以较大概率同时找到 EPS1 和 EPS2; 而对于图 2(b) 的情形, 最终存活到下一代的个体为 a, b, c, d, e. 注意到这些个体均位于 EPS1 的附近, 因此算法很容易找到 EPS1, 而 EPS2 将会被丢弃. 为了进一步验证上述讨论, 图 3 给出 DN-NSGAI 算法^[19]在 IDMPM2T4 问题上的模拟实验结果 (种群规模: $N = 60$, 终止条件: $FES = 18000$). 不难看出, 当 $\alpha = 1$ 时, DN-NSGAI 算法能够同时找到 EPS1 和 EPS2, 而当 $\alpha = 4$ 时, DN-NSGAI 算法只能找到 EPS1.

解决不平衡多模态多目标问题的另一挑战是种群的多样性需要更好的维护, 其主要原因是种群在演化的过程中需要逐渐分散到各个 EPSs 的周围, 否

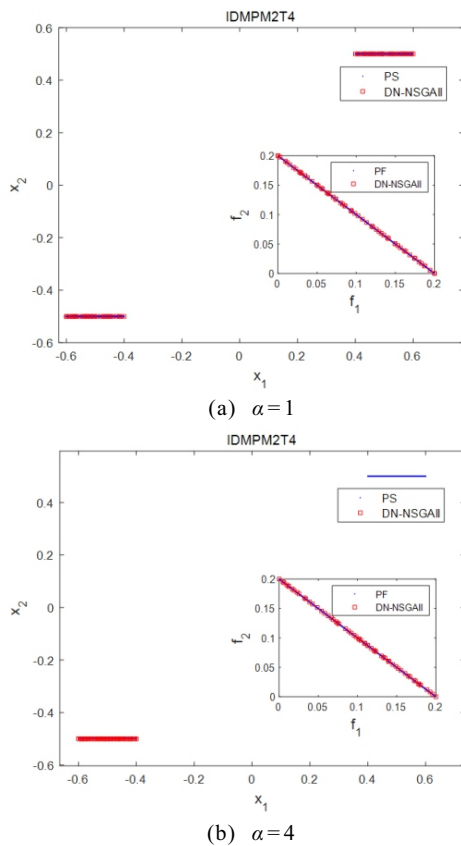


图3 DN-NSGAI算法对IDMPM2T4问题在参数 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 4$ 情况下的模拟结果

则会引起部分 EPSs 的丢失. 下面以“多样性第一、收敛性第二”的 EMO-DD 算法^[8]来说明上述现象. EMO-DD 算法通过计算每个个体与权重向量的相似性将种群划分成若干个子区域, 并对每一个子区域进行独立的环境选择. 实验结果表明当种群规模设置为 800 时, 该算法能够较好地解决部分不平衡多目标多模态问题. 然而我们通过实验发现当种群规模减少到一定程度时 (例如 60), 该算法将会丢失部分 EPSs (图 4). 这说明 EMO-DD 算法对种群多样性的维护很大程度上依赖于种群规模的设置, 其中较大的种群规模增加了子区域的分散程度, 这有利于提高算法找到全部 EPSs 的概率, 反之亦然. 造成这种现象的主要原因是 EMO-DD 算法的子区域划分方式只能确保子区域中的个体在目标空间中能够形成小生境, 而在决策空间中这些个体可能位于不同 EPSs 的周围 (类似于图 3 的情形), 因此无法找到全部的 EPSs.

为更好地解决上述两个挑战性的问题, 本文提出一种排斥机制驱动的不平衡多模态多目标进化算法 (Imbalanced Multi-modal Multi-objective Evolutionary Algorithm Driven by Exclusion Mechanism, IMMEA+EM). 与常规的多模态多目标算法不同, 该算法将不同难度的 EPSs 分不同阶段

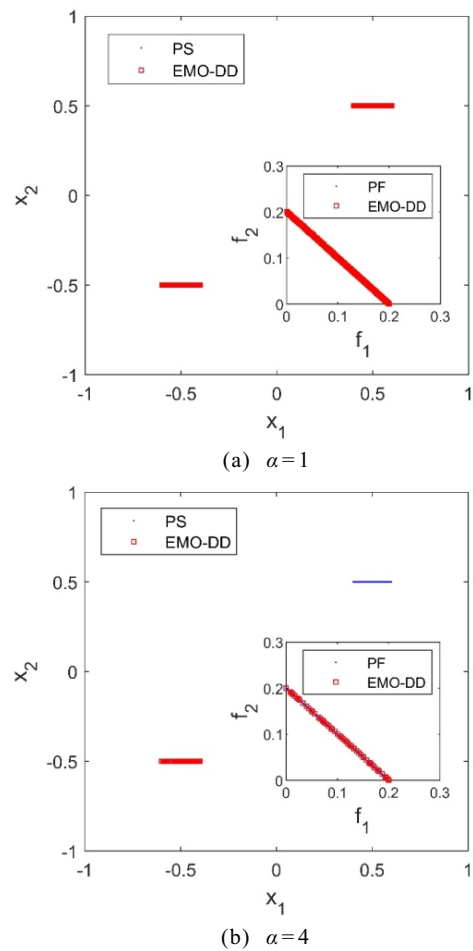


图4 EMO-DD算法对IDMPM2T4问题在参数 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 4$ 情况下的模拟结果

进行求解, 以此避免多个 EPSs 同时搜索而导致部分模态丢失的问题.

3 IMMEA+EM 算法

3.1 算法框架

算法 1 为 IMMEA+EM 的总体框架. 该算法将整个演化过程划分为三个阶段并在不同阶段采用不同的环境选择方法, 以此实现在不同的演化阶段搜索不同 EPSs 任务. 具体地, 第一阶段首先利用差分进化 (Differential Evolution, DE)^[20]生成种群, 并采用收敛性第一的环境选择方法来引导算法快速收敛到容易搜索的 EPS. 第二阶段则设计一种基于排斥机制的环境选择策略, 该策略通过对靠近已找到等效 Pareto 最优解集的个体进行自适应惩罚, 从而将搜索方向引导至决策空间中未被充分探索的区域, 这将显著提高算法找到困难 EPSs 的概率. 第三阶段的环境选择则考虑同时兼顾收敛性和多样性的双 M 近邻环境选择策略, 该策略对前两阶段产生的个体进行微调, 以进一步提升算法在目标空间和决策空间上的综合性能.

1: **输入**: 种群规模 N , 目标个数 M , 最大函数评估次数 $MaxFEs$, 参数 α 和 β ;

2: **输出**: **PS**, **PF**.

3: 随机生成均匀分布的初始种群 $\mathbf{P} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$;

4: 评价每个个体的目标函数值 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1), \mathbf{F}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{F}(\mathbf{x}_N)$;

5: 置 $FEs = N$;

6: **while** $FEs \leq MaxFEs$ **do**

7: %第一阶段

8: **while** $FEs \leq \alpha * MaxFEs$ **do**

9: $\mathbf{O} \leftarrow DE_Operator(\mathbf{P})$; %DE产生子代种群

10: **Fitness** \leftarrow 利用公式(3)评估 $\mathbf{P} \cup \mathbf{O}$ 的适应度值;

11: $\mathbf{P} \leftarrow$ 根据 **Fitness** 选出较好的一半种群;

12: $FEs = FEs + N$;

13: **end while**

14: $\mathbf{P}_1 \leftarrow \mathbf{P}$;

15: $\mathbf{P} \leftarrow$ 重新初始化种群;

16: $FEs = FEs + N$;

17: %第二阶段

18: **while** $FEs \leq \beta * MaxFEs$ **do**

19: **for** $i = 1, 2, \dots, N$ **do**

20: $\mathbf{o}_i \leftarrow DE_Operator(\mathbf{P})$; %DE产生子代

21: $N_M \leftarrow$ 从 \mathbf{P} 中找出距离 \mathbf{o}_i 的最近 M 个个体;

22: $\mathbf{y}_r \leftarrow$ 从 N_M 中随机选择一个个体;

23: $[Fitness_i, Fitness_r] \leftarrow$ 利用公式(6)评估个体 \mathbf{o}_i 和 \mathbf{y}_r 的适应度值;

24: **if** $Fitness_r > Fitness_i$ **then**

25: $\mathbf{y}_r \leftarrow \mathbf{o}_i$

26: **end if**

27: **end for**

28: $FEs = FEs + N$;

29: **end while**

30: $\mathbf{P}_2 \leftarrow \mathbf{P}$;

31: $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$;

32: $\mathbf{P} \leftarrow EnvironmentalSelection(\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2, N)$;

33: **while** $FEs \leq MaxFEs$ **do**

34: $\mathbf{O} \leftarrow DE_Operator(\mathbf{P})$; %DE产生子代种群

35: $\mathbf{P} \leftarrow EnvironmentalSelection(\mathbf{P} \cup \mathbf{O}, N)$;

36: $FEs = FEs + N$;

37: **end while**

38: **end while**

39: **PS** \leftarrow 找出 \mathbf{P} 中的非支配解集;

40: **PF** $\leftarrow \mathbf{F}(\mathbf{PS})$.

3.2 基于个体支配强度的环境选择策略

为引导种群快速逼近易于收敛的 EPS, IMMEA+

EM 算法在演化的第一阶段采用基于支配强度的适应度评估方法:

$$Fitness(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{O}_1, \mathbf{y} \prec \mathbf{x}} S(\mathbf{y}). \quad (3)$$

其中: $S(\mathbf{y}) = |\{\mathbf{x} \in \mathbf{P}_1 | \mathbf{y} \prec \mathbf{x}\}|$ 表示个体 \mathbf{y} 在父代种群 \mathbf{P}_1 和子代种群 \mathbf{O}_1 中的支配强度. 该评估方法通过量化个体的被支配程度, 从复合种群 $\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{O}_1$ 中选出收敛性较好的一半个体进入下一代. 与 SPEA2 算法^[21] 的适应度评估方法相比, 这里忽略了个体的多样性, 其目的是加快 IMMEA+EM 算法收敛到容易探索的 EPS. 图 5(a) 的模拟结果进一步证实 IMMEA+EM 算法在第一阶段能快速收敛到 IDMPM2T4 问题左下方的 EPS.

3.3 基于排斥机制的环境选择策略

由于第一阶段的种群 \mathbf{P}_1 已收敛到容易找到的 EPS_1 附近, 因此算法在第二阶段的主要任务是通过排斥种群 \mathbf{P}_1 周围的新个体 \mathbf{y} 来搜索其它区域的 EPSs. 排斥方法是通过计算新个体 \mathbf{y} 与种群 \mathbf{P}_1 中的个体 \mathbf{x} 的距离 $\xi = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, 再与排斥半径 r 进行比较. 若 $\xi \leq r$, 则对个体 \mathbf{y} 进行惩罚, 否则不惩罚. 具体的惩罚函数描述如下:

$$\zeta_r(\xi) = \begin{cases} -|\operatorname{erf}(\frac{\xi}{10})|^{-1}, & \xi \leq r; \\ 1, & \text{其它}. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 为误差函数, 其值域为 $(-1, 1)$.

考虑到需要探索的 EPSs 距离种群 \mathbf{P}_1 各不相同, 这里采用动态调节排斥半径 r 来控制个体的分布. 结合图 6 可见, 排斥半径 r 越大, 越有利于个体探索距离种群 \mathbf{P}_1 较远的 EPS_3 , 反之有利于个体探索距离种群 \mathbf{P}_1 较近的 EPS_2 . 为了能够兼顾各种情形, 这里采用线性递减的方式来调节排斥半径 r :

$$r = r_{\min} + (1 - \frac{FEs}{MaxFEs}) \times (r_{\max} - r_{\min}) \quad (5)$$

其中: FEs 表示当前函数评估次数, $MaxFEs$ 表示最大函数评估次数, r_{\min} 和 r_{\max} 为两个参数, 本文分别设置为 0.01 和 0.5.

通过结合收敛性度量和罚函数, 可定义新的适应度函数:

$$Fitness(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \times \zeta_r(\xi) \quad (6)$$

其中: $C(\mathbf{x}) = - \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}_2 \cup \{\mathbf{x}\}} e^{-\max_{1 \leq i \leq M} \{f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x})\} / 0.05}$ 为个体 \mathbf{x} 的收敛性度量^[22]. 在环境选择过程中, 新产生的个体需要与距离其最近的 M 个父代个体进行比较适应度值, 适应度值更优的个体将存活到下一代.

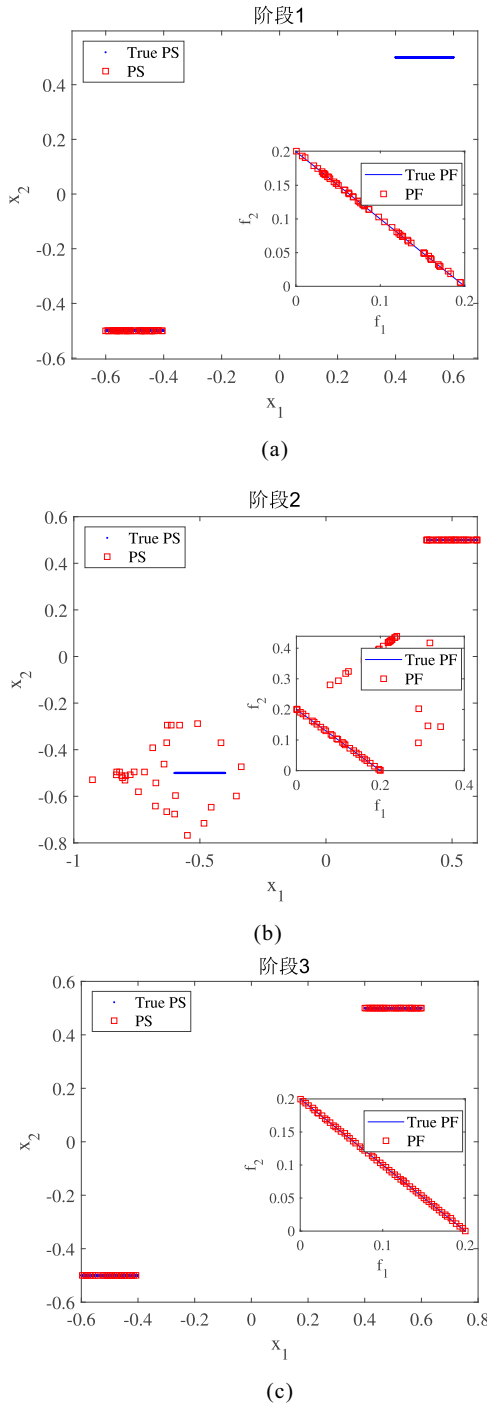


图5 IMMEA+EM 对 IDMPM2T4 问题的三阶段演化过程模拟图

图 5(b) 的模拟结果展示了 IMMEA+EM 算法的排斥过程。

3.4 基于双邻居拥挤距离的环境选择策略

由于前两个阶段的环境选择策略并未考虑种群的多样性, 因此种群 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 的分布不会非常均匀。此外, 考虑到 \mathbf{P}_2 是用于搜索多个模态的种群, 在计算资源相对有限的情况下, 其中部分个体的收敛性仍需进一步提高。有鉴于此, 这里从 $\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$ 中选出一部分非支配解 \mathbf{P} , 并对其进行差分进化产生新种群 \mathbf{O} , 最后利用非支配分层排序方法从 $\mathbf{P} \cup \mathbf{O}$ 中筛选出

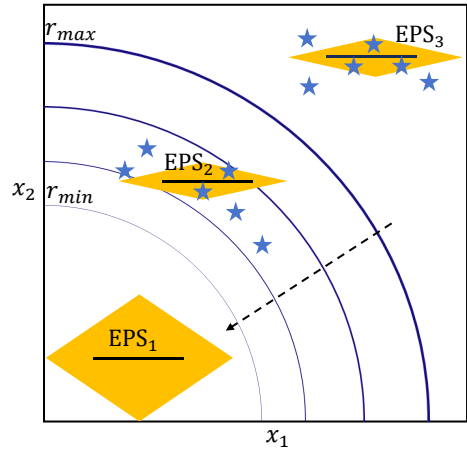


图6 排斥半径动态调节示意图。

更高质量的后代种群。

与传统多目标进化算法仅考虑临界层种群在目标空间上的拥挤距离不同, MMEA 需要同时兼顾临界层种群在目标空间和决策空间上的拥挤距离。为此, 临界层的个体 \mathbf{x} 可通过其在目标空间和决策空间上的 M 近邻距离之和来表示, 具体描述如下^[23]:

$$CD(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^M d_{\mathbf{x},i}^{obj}}{d_{mean}^{obj}} + \frac{\sum_{i=1}^M d_{\mathbf{x},i}^{dec}}{d_{mean}^{dec}}}} \quad (7)$$

其中: d_{mean}^{obj} 和 d_{mean}^{dec} 分别表示临界层种群中所有个体在目标空间和决策空间上 M 近邻距离的平均值。

算法 2 给出了上述环境选择策略的详细过程, 图 5(c) 的模拟结果验证了该方法的有效性。

Algorithm 2 环境选择 Environmental Selection

- 1: 输入: 种群 \mathbf{P} , 截断参数 N ;
- 2: 输出: \mathbf{P} .
- 3: $\mathcal{F} \leftarrow \text{non-dominant-sort}(\mathbf{P})$;
- 4: $\mathcal{A} = \emptyset, i = 1$;
- 5: **while** $|\mathcal{A}| + |\mathcal{F}_i| < N$ **do**
- 6: $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{F}_i, i = i + 1$;
- 7: **end while**
- 8: **while** $|\mathcal{F}_i| > N - |\mathcal{A}|$ **do**
- 9: 根据公式(7)计算 \mathcal{F}_i 中每个个体的拥挤距离;
- 10: $\mathbf{x} \leftarrow$ 挑出拥挤距离最小的个体;
- 11: $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i \setminus \{\mathbf{x}\}$;
- 12: **end while**
- 13: $\mathbf{P} \leftarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{F}_i$;

4 数值实验

4.1 测试问题和对比较法

为合理评估 IMMEA+EM 算法的性能, 本文采用文献 [10] 提出的 12 个 IDMP 基准测试问题, 并

与 CPDEA^[10], DNEA^[23], EMO_DD^[8], MMEAWI^[24], TriMoEATAR^[25], DN_NSGAII^[19] 和 MMOEACAS^[26] 等同类算法对比. 为比较公平, 所有算法公共参数均与文献 [10] 保持一致, 其它参数设置与原文献相同.

4.2 性能评价指标

为全面评价算法的性能, 本节采用三个常用的评价指标: 目标空间上的逆世代距离 IGD^+ ^[27]、决策空间上的逆世代距离 $IGDX$ ^[28] 和双空间上的逆世代距离 $IGDM$ ^[25], 分别来综合评估算法在目标空间的收敛性与多样性, 在决策空间上的收敛性与多样性以及双空间上的收敛性与多样性. 具体描述如下:

$$IGD^+(PF, PF^*) = \frac{(\sum_{y^* \in PF^*} d^+(y^*, PF))^2}{|PF^*|}. \quad (8)$$

其中: $d^+(y^*, PF) = \min_{y \in PF} \sqrt{\sum_{i=1}^M (\max\{y_i - y_i^*, 0\})^2}$, PF 为算法得到的 Pareto 前沿, PF^* 为真实 Pareto 前沿.

$$IGDX(PS, PS^*) = \frac{\sum_{x \in PS^*} d(x, PS)}{|PS^*|}. \quad (9)$$

其中: $d(x, PS)$ 表示问题的真实 Pareto 解集 PS^* 中

的点 x 到算法得到的 Pareto 解集 PS 的欧式距离.

$$IGDM(PS, PF^*, PS^*) = \frac{\sum_{f_i^* \in PF^*} \sum_{j \in 1, \dots, a_i} d(f_i^*, x_{i,j}^*, PS)}{|PS^*|}. \quad (10)$$

其中: $PS = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $PS^* = \{x_{1,1}^*, x_{1,2}^*, x_{1,a_1}^*, x_{2,1}^*, \dots, x_{s,a_s}^*\}$ (a_i 表示 PF^* 上第 i 个点对应决策空间中等效最优解的个数), $d(f_i^*, x_{i,j}^*, PS) = \begin{cases} d_{max}, & \text{如果 } PS_{i,j} = \phi; \\ \min\{d_{max}, ed(f_i^*, PS_{i,j})\}, & \text{其它.} \end{cases}$ $PS_{i,j} = \{x_k : j = \arg \min_{l=1, \dots, a_i} ed(x_{i,l}^*, x_k), x_k \in PS\}$, $ed(x_{i,l}^*, x_k)$ 为 $x_{i,l}^*$ 和 x_k 之间的欧式距离, d_{max} 是用户自定义的参数.

4.3 实验结果比较

表 1-表 3 分别给出 8 个算法的实验结果, 每个问题的结果通过 Wilcoxon 秩和检验进行比较, 其中: 记号 "+", "-", " \approx " 分别表示本文算法优于、劣于、类似于其它算法且最优结果标黑. 所有问题的整体结果则通过 Friedman 检验进行比较, 表格的最后两行分别为 Wilcoxon 秩和检验的统计结果和 Friedman 检验的排名结果.

(1) IGD^+ 结果对比: 根据表 1 的 Wilcoxon 秩

表1 8种算法在12个IDMPs测试函数上运行21次得到的 IGD^+ 均值(标准差)

| 测试问题 | DN_NSGAII | EMO_DD | MMEAWI | DNEA | TriMoEATAR | MMOEACAS | CPDEA | IMMEA+EM |
|----------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|---|-------------------------------|
| IDMPM2T1 | 1.36E-03 \approx (6.06E-05) | 1.43E-03 \approx (1.51E-04) | 2.04E-03 \approx (3.18E-04) | 1.38E-03 \approx (8.07E-05) | 1.25E-03+ (1.50E-04) | 1.31E-03 \approx (1.65E-04) | 1.23E-03 \approx (1.00E-04) | 1.10E-03 (9.87E-05) |
| IDMPM2T2 | 1.32E-03 \approx (8.05E-05) | 1.32E-03 \approx (1.01E-04) | 2.05E-03 \approx (2.63E-04) | 1.33E-03 \approx (9.28E-05) | 1.29E-03+ (1.62E-04) | 1.27E-03+ (1.23E-04) | 1.10E-03 \approx (6.36E-05) | 1.01E-03 (8.21E-05) |
| IDMPM2T3 | 1.39E-03 \approx (1.22E-04) | 1.55E-03+ (1.55E-04) | 1.97E-03+ (1.76E-04) | 1.42E-03 \approx (1.35E-04) | 1.28E-03+ (1.13E-04) | 1.41E-03+ (1.13E-04) | 1.22E-03 \approx (5.52E-05) | 9.83E-04 (5.38E-05) |
| IDMPM2T4 | 1.27E-03 \approx (7.15E-05) | 1.25E-03 \approx (2.00E-04) | 3.48E-03 \approx (9.79E-04) | 1.28E-03 \approx (7.51E-05) | 1.26E-03+ (1.47E-04) | 1.12E-03+ (1.37E-04) | 1.18E-03 \approx (7.18E-05) | 9.66E-04 (3.74E-05) |
| IDMPM3T1 | 6.26E-03 \approx (4.32E-04) | 6.05E-03 \approx (4.36E-04) | 6.25E-03 \approx (5.90E-04) | 5.40E-03 \approx (2.39E-04) | 8.83E-03+ (5.15E-04) | 7.33E-03+ (7.91E-04) | 4.84E-03 \approx (2.02E-04) | 5.14E-03 (2.48E-04) |
| IDMPM3T2 | 5.93E-03 \approx (3.24E-04) | 5.44E-03 \approx (2.19E-04) | 6.04E-03+ (4.59E-04) | 5.06E-03 \approx (2.05E-04) | 8.74E-03+ (5.42E-04) | 7.02E-03+ (8.36E-04) | 4.49E-03 - (1.21E-04) | 4.62E-03 (1.75E-04) |
| IDMPM3T3 | 6.11E-03 \approx (3.20E-04) | 6.14E-03 \approx (9.14E-04) | 6.71E-03 \approx (8.69E-04) | 5.21E-03 \approx (1.69E-04) | 8.62E-03+ (7.07E-04) | 8.13E-03+ (7.26E-04) | 5.04E-03 \approx (1.30E-04) | 4.87E-03 (1.36E-04) |
| IDMPM3T4 | 5.93E-03 \approx (3.21E-04) | 5.85E-03 \approx (6.01E-04) | 5.72E-03 \approx (3.99E-04) | 4.72E-03 \approx (1.92E-04) | 8.81E-03+ (5.29E-04) | 6.43E-03+ (1.34E-03) | 4.56E-03 \approx (1.68E-04) | 4.50E-03 (1.34E-04) |
| IDMPM4T1 | 7.20E-03 \approx (2.00E-04) | 7.52E-03 \approx (9.54E-04) | 7.17E-03 \approx (6.62E-04) | 5.58E-03 \approx (1.64E-04) | 2.26E-02+ (1.16E-03) | 1.44E-02+ (3.67E-03) | 4.94E-03 \approx (3.92E-04) | 7.18E-03 (3.28E-04) |
| IDMPM4T2 | 5.93E-03 \approx (4.25E-04) | 7.03E-03 \approx (9.91E-04) | 7.79E-03+ (1.05E-03) | 5.16E-03 \approx (5.63E-04) | 2.27E-02+ (1.34E-03) | 1.22E-02+ (5.40E-03) | 4.32E-03 \approx (1.46E-04) | 5.01E-03 (4.47E-04) |
| IDMPM4T3 | 6.05E-03 \approx (3.47E-04) | 8.96E-03 \approx (1.58E-03) | 7.48E-03+ (8.20E-04) | 5.86E-03 \approx (3.34E-04) | 2.17E-02+ (2.06E-03) | 1.02E-02 \approx (2.95E-03) | 4.69E-03 \approx (1.51E-04) | 5.15E-03 (3.12E-04) |
| IDMPM4T4 | 5.96E-03 \approx (3.36E-04) | 7.73E-03 \approx (1.17E-03) | 7.13E-03+ (6.32E-04) | 5.17E-03 \approx (4.74E-04) | 2.25E-02+ (1.25E-03) | 1.01E-02+ (3.69E-03) | 4.19E-03 \approx (1.74E-04) | 4.51E-03 (2.10E-04) |
| +/-/ \approx | 0/0/12 | 1/0/11 | 5/0/7 | 0/0/12 | 12/0/0 | 10/0/2 | 0/1/11 | Base |
| Friedman排名 | 4.88 | 5.38 | 6.00 | 4.08 | 6.58 | 5.83 | 1.58 | 1.67 |

表2 8种算法在12个IDMPs测试函数上运行21次得到的IGDX均值(标准差)

| 测试问题 | DN_NSGAII | EMO_DD | MMEAWI | DNEA | TriMoEATAR | MMOEACAS | CPDEA | IMMEA+EM |
|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| IDMPM2T1 | 5.46E-01+ (2.70E-01) | 2.27E-01+ (3.24E-01) | 1.06E-01+ (2.38E-01) | 4.82E-01+ (3.11E-01) | 6.74E-01+ (8.13E-05) | 1.85E-01+ (2.97E-01) | 2.01E-03- (6.93E-05) | 2.06E-03 (7.19E-04) |
| IDMPM2T2 | 5.14E-01+ (2.93E-01) | 2.90E-01+ (3.40E-01) | 1.40E-01+ (2.66E-01) | 2.26E-01+ (3.24E-01) | 6.74E-01+ (1.18E-04) | 3.51E-01+ (3.41E-01) | 2.08E-03+ (1.20E-04) | 2.02E-03 (7.63E-05) |
| IDMPM2T3 | 3.54E-01+ (3.44E-01) | 3.54E-02+ (1.46E-01) | 1.39E-01+ (2.66E-01) | 1.32E-01+ (2.73E-01) | 6.75E-01+ (3.24E-03) | 2.21E-01+ (3.16E-01) | 2.96E-03- (2.34E-04) | 4.54E-03 (6.06E-03) |
| IDMPM2T4 | 6.74E-01+ (3.38E-05) | 5.14E-01+ (2.92E-01) | 6.44E-01+ (1.40E-01) | 5.78E-01+ (2.41E-01) | 6.74E-01+ (7.53E-05) | 5.40E-01+ (2.67E-01) | 1.99E-03+ (7.53E-05) | 1.91E-03 (1.08E-04) |
| IDMPM3T1 | 7.29E-01+ (2.55E-01) | 1.43E-01+ (1.46E-01) | 6.28E-02+ (9.85E-02) | 5.12E-01≈ (3.08E-01) | 8.94E-01+ (2.16E-01) | 2.62E-01+ (2.22E-01) | 1.13E-02+ (1.66E-04) | 1.12E-02 (1.62E-04) |
| IDMPM3T2 | 6.68E-01+ (2.47E-01) | 1.91E-01+ (1.37E-01) | 1.46E-01+ (1.96E-01) | 3.46E-01+ (1.62E-01) | 8.54E-01+ (2.27E-01) | 2.15E-01+ (1.90E-01) | 1.12E-02≈ (1.94E-04) | 1.11E-02 (2.26E-04) |
| IDMPM3T3 | 4.55E-01+ (2.88E-01) | 1.64E-01+ (2.27E-01) | 3.52E-01+ (2.07E-01) | 1.06E-01+ (1.23E-01) | 6.31E-01+ (2.80E-01) | 1.68E-01+ (2.51E-01) | 1.21E-02+ (2.11E-04) | 1.16E-02 (2.10E-04) |
| IDMPM3T4 | 7.01E-01+ (2.86E-01) | 3.48E-01+ (1.94E-01) | 2.15E-01+ (2.76E-01) | 3.23E-01≈ (2.72E-01) | 9.03E-01+ (1.60E-01) | 4.78E-01+ (3.07E-01) | 1.13E-02≈ (1.74E-04) | 1.10E-02 (1.71E-04) |
| IDMPM4T1 | 1.19E+00+ (1.10E-03) | 4.40E-01+ (2.93E-01) | 2.39E-01+ (1.96E-01) | 1.09E+00+ (1.92E-01) | 1.19E+00+ (5.70E-04) | 1.02E+00+ (2.86E-01) | 8.66E-03- (1.11E-04) | 2.43E-02 (5.79E-02) |
| IDMPM4T2 | 9.86E-01+ (2.17E-01) | 4.09E-01+ (2.50E-01) | 6.16E-01+ (2.76E-01) | 7.15E-01+ (2.49E-01) | 1.13E+00+ (9.83E-02) | 7.68E-01+ (4.19E-01) | 3.40E-02+ (8.03E-02) | 9.62E-03 (6.04E-04) |
| IDMPM4T3 | 7.48E-01+ (3.44E-01) | 4.87E-01+ (2.98E-01) | 6.31E-01+ (2.93E-01) | 9.85E-02+ (1.29E-01) | 9.76E-01+ (2.40E-01) | 4.15E-01+ (3.38E-01) | 9.89E-03+ (6.40E-04) | 9.74E-03 (2.13E-04) |
| IDMPM4T4 | 1.09E+00+ (2.15E-01) | 5.70E-01+ (2.11E-01) | 3.42E-01+ (1.65E-01) | 5.12E-01≈ (2.82E-01) | 1.13E+00+ (9.83E-02) | 8.38E-01+ (3.24E-01) | 2.15E-02+ (5.86E-02) | 9.10E-03 (1.16E-04) |
| +/-/≈ | 12/0/0 | 12/0/0 | 12/0/0 | 9/0/3 | 12/0/0 | 12/0/0 | 7/3/2 | Base |
| Friedman排名 | 7.08 | 4.17 | 4.00 | 4.67 | 7.92 | 5.17 | 1.75 | 1.25 |

表3 8种算法在12个IDMPs测试函数上运行21次得到的IGDM均值(标准差)

| 测试问题 | DN_NSGAII | EMO_DD | MMEAWI | DNEA | TriMoEATAR | MMOEACAS | CPDEA | IMMEA+EM |
|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| IDMPM2T1 | 4.11E-01+ (1.97E-01) | 1.85E-01+ (2.31E-01) | 1.44E-01+ (1.61E-01) | 3.65E-01+ (2.26E-01) | 5.04E-01+ (5.45E-04) | 1.56E-01+ (2.26E-01) | 1.43E-02- (5.48E-04) | 1.47E-02 (5.12E-03) |
| IDMPM2T2 | 3.88E-01+ (2.14E-01) | 2.25E-01+ (2.48E-01) | 1.76E-01+ (1.81E-01) | 1.79E-01+ (2.36E-01) | 5.05E-01+ (5.69E-04) | 2.71E-01+ (2.50E-01) | 1.42E-02+ (7.65E-04) | 1.33E-02 (2.88E-04) |
| IDMPM2T3 | 2.72E-01+ (2.49E-01) | 4.34E-02+ (1.06E-01) | 1.65E-01+ (1.74E-01) | 1.10E-01≈ (1.96E-01) | 5.04E-01+ (3.66E-04) | 1.80E-01+ (2.35E-01) | 1.76E-02≈ (1.70E-03) | 2.93E-02 (3.94E-02) |
| IDMPM2T4 | 5.04E-01+ (2.27E-04) | 3.90E-01+ (2.09E-01) | 4.96E-01+ (6.18E-02) | 4.34E-01+ (1.75E-01) | 5.04E-01+ (5.15E-04) | 4.11E-01+ (1.96E-01) | 1.42E-02+ (5.46E-04) | 1.35E-02 (7.52E-04) |
| IDMPM3T1 | 6.02E-01+ (1.43E-01) | 2.27E-01+ (1.22E-01) | 1.55E-01+ (8.22E-02) | 4.55E-01+ (2.08E-01) | 7.16E-01+ (1.18E-01) | 3.44E-01+ (1.49E-01) | 8.03E-02≈ (1.29E-03) | 8.06E-02 (1.27E-03) |
| IDMPM3T2 | 5.74E-01+ (1.39E-01) | 2.66E-01+ (1.14E-01) | 2.22E-01+ (1.41E-01) | 3.55E-01+ (1.01E-01) | 7.00E-01+ (1.16E-01) | 3.02E-01+ (1.48E-01) | 7.93E-02+ (1.30E-03) | 7.86E-02 (1.78E-03) |
| IDMPM3T3 | 4.34E-01+ (1.91E-01) | 2.74E-01+ (1.44E-01) | 4.05E-01+ (1.14E-01) | 1.64E-01+ (1.10E-01) | 5.92E-01+ (1.79E-01) | 2.72E-01+ (1.90E-01) | 8.32E-02+ (1.44E-03) | 7.97E-02 (1.52E-03) |
| IDMPM3T4 | 6.08E-01+ (1.66E-01) | 3.77E-01+ (1.32E-01) | 2.68E-01+ (1.90E-01) | 3.23E-01+ (1.89E-01) | 7.22E-01+ (9.18E-02) | 4.87E-01+ (1.70E-01) | 8.01E-02+ (1.48E-03) | 7.82E-02 (1.13E-03) |
| IDMPM4T1 | 7.61E-01+ (2.55E-04) | 4.46E-01+ (1.89E-01) | 2.97E-01+ (1.38E-01) | 7.14E-01+ (9.41E-02) | 7.86E-01+ (1.36E-03) | 7.06E-01+ (1.30E-01) | 6.30E-02- (1.37E-03) | 9.96E-02 (5.05E-02) |
| IDMPM4T2 | 6.83E-01+ (1.12E-01) | 4.25E-01+ (1.42E-01) | 5.14E-01+ (1.24E-01) | 5.26E-01+ (1.27E-01) | 7.86E-01+ (1.62E-03) | 5.95E-01+ (1.94E-01) | 8.34E-02+ (6.86E-02) | 6.89E-02 (4.52E-03) |
| IDMPM4T3 | 5.53E-01+ (1.74E-01) | 4.93E-01+ (1.82E-01) | 5.47E-01+ (1.11E-01) | 1.42E-01+ (1.11E-01) | 7.48E-01+ (7.28E-02) | 4.25E-01+ (2.04E-01) | 6.74E-02≈ (4.49E-03) | 6.62E-02 (1.40E-03) |
| IDMPM4T4 | 7.27E-01+ (8.35E-02) | 5.17E-01+ (1.25E-01) | 3.85E-01+ (1.28E-01) | 4.15E-01+ (1.57E-01) | 7.85E-01+ (1.41E-03) | 6.25E-01+ (1.55E-01) | 7.23E-02+ (4.95E-02) | 6.41E-02 (7.54E-04) |
| +/-/≈ | 12/0/0 | 12/0/0 | 12/0/0 | 11/0/1 | 12/0/0 | 12/0/0 | 7/2/3 | Base |
| Friedman排名 | 7.04 | 4.25 | 4.00 | 4.67 | 7.96 | 5.08 | 1.67 | 1.33 |

和检验统计结果可知 IMMEA+EM 的整体表现显著优于 MMEAWI, TriMoEATAR 和 MMOEACAS, 与 DN_NSGAII, EMO_DD, DNEA 和 CPDEA 基本相当. Friedman 检验结果为 CPDEA 排名第一, IMMEA+EM 排名第二.

(2) *IGDX* 结果对比: 根据表 2 的 Wilcoxon 秩和检验统计结果可知 IMMEA+EM 的整体表现显著优于其它 7 个算法, 其中: 本文算法全部优于 DN_NSGAII, EMO_DD, MMEAWI, TriMoEATAR 和 MMOEACAS, 对于 DNEA 和 CPDEA, IMMEA+EM 分别有 9 个和 7 个指标明显占优. Friedman 检验结果显示 IMMEA+EM 排名第一, CPDEA 排名第二. 值得关注的是 IMMEA+EM 和 CPDEA 的大多数 *IGDX* 结果的数量级相同且至少优于其它算法一个数量级, 这说明传统 MMEAs 在求解不平衡的 MMOPs 方面出现模态丢失的现象.

(3) *IGDM* 结果对比: 根据表 3 的秩和检验统计结果可知, IMMEA+EM 的整体表现显著优于其它 7 个算法, 其中: IMMEA+EM 全部优于 DN_NSGAII, EMO_DD, MMEAWI, TriMoEATAR 和

MMOEACAS, 对于 DNEA 和 CPDEA, IMMEA+EM 分别有 11 个和 7 个指标明显占优. Friedman 检验结果为 IMMEA+EM 排名第一, CPDEA 排名第二. 与 *IGDX* 类似, IMMEA+EM 和 CPDEA 的大多数 *IGDM* 结果的数量级相同且至少优于其它算法一个数量级, 这说明 IMMEA+EM 和 CPDEA 对种群在决策空间和目标空间上的收敛性与多样性实现了更好的平衡, 如图 7 所示. 此外, 从图 8 的 *IGDM* 指标收敛曲线图可观测到 IMMEA+EM 呈现明显的抖动过程, 这是由于 IMMEA+EM 在第二阶段采用了种群重启机制.

4.4 讨论

(1) 种群多样性: 上一节的实验结果证实 IMMEA+EM 和 CPDEA 在评估 MMOPs 的核心指标 *IGDM* 上要显著优于其它算法且其 *IGDX* 的提升起着关键作用. *IGDX* 的提升意味着 IMMEA+EM 和 CPDEA 得到的种群在决策空间上的收敛性与分布性要优于其它算法, 这与种群多样性的控制密切相关. 为直观展示种群多样性的变化过程, 本节采用下面的多样性指标对每个算法的种群变化进行追踪.

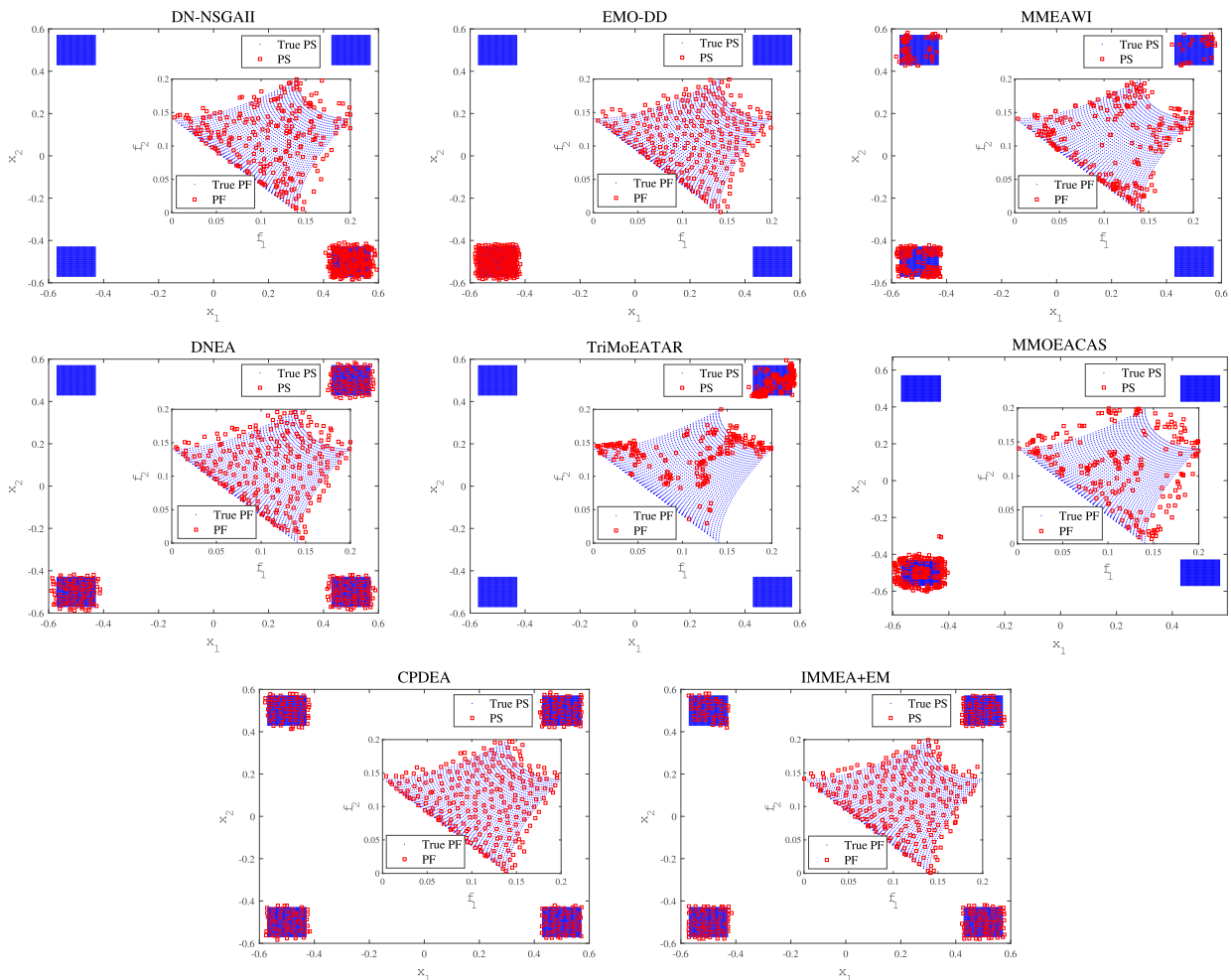


图7 8种算法在 IDMPM4T4 基准测试函数上的 PS 模拟图

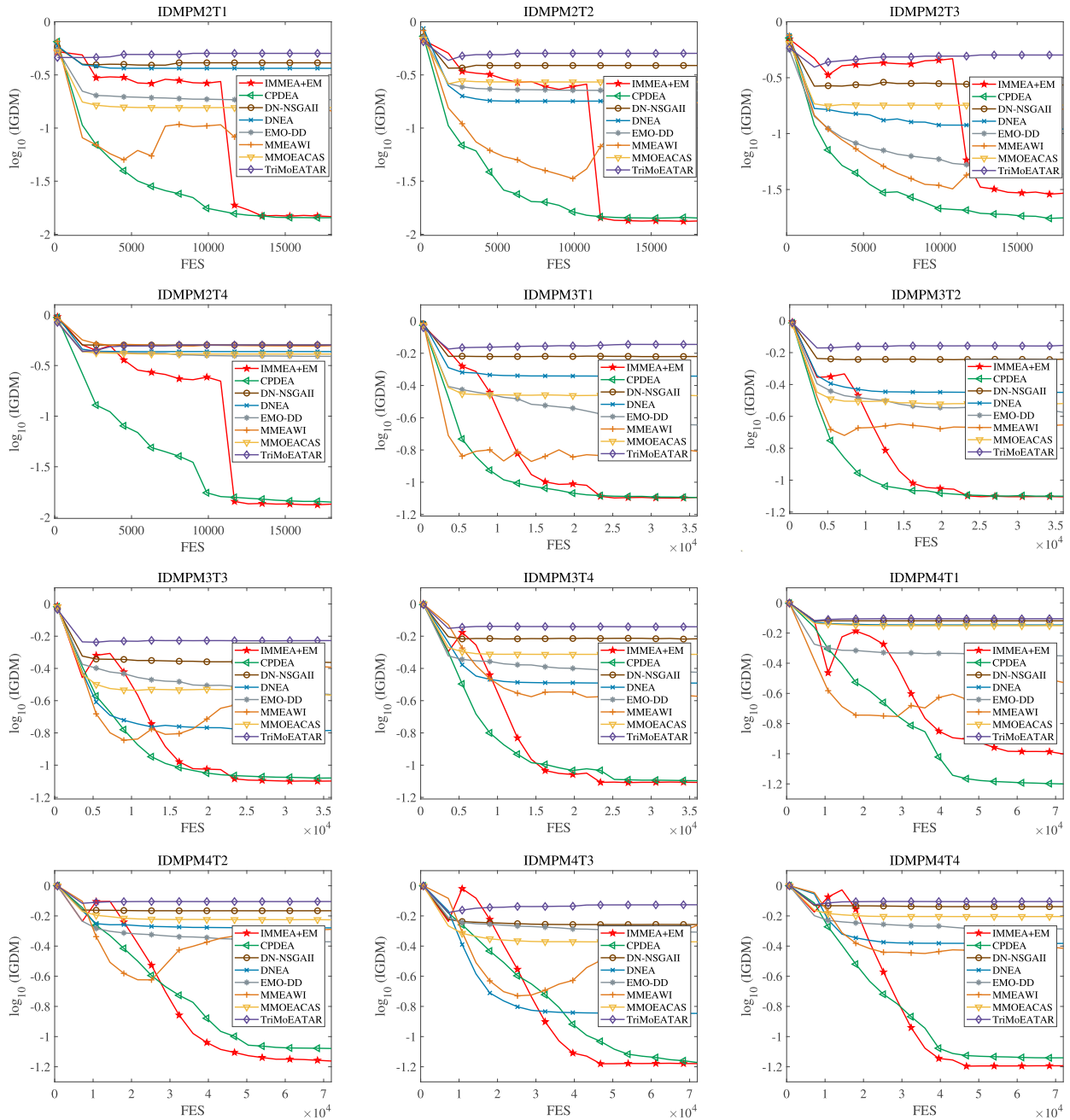


图8 8种算法在IDMPs基准测试函数上的平均IGDM指标

$$DI = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^D (x_{i,j} - \bar{x}_j)^2}. \quad (11)$$

其中: $x_{i,j}$ 表示第 i 个个体在第 j 维度上的取值, \bar{x}_j 为其在第 j 维上的平均值. DI 值越大, 种群多样性越好; 反之亦然.

图9的 DI 变化曲线显示 CPDEA 的种群多样性在整个演化过程中一直维持最好, 这是由于 CPDEA 采用稳态演化机制, 即每一次仅更新一个个体, 因此种群在演化过程中不会出现剧烈变化. 而 IMMEA+EM 在演化的第一阶段多样性迅速下降, 在第二阶段种群重启后, 种群多样性的维护要优于其它6个算法.

(2) 算法运行效率: IMMEA+EM 算法的主要操

作步骤包括: 种群初始化 $O(N)$ 、DE 算子 $O(N)$ 、第一阶段的支配强度计算 $O(MN^2)$, 第二阶段的个体之间的距离计算 $O(N^2)$ 以及第三阶段的快速非支配排序和双空间拥挤距离计算 $O(N^2(M + \log N))$. 因此, IMMEA+EM 算法的最坏时间复杂度为 $O(N^2 \log N)$. CPDEA 算法的主要操作步骤包括: 种群初始化 $O(N)$ 、遗传算子 $O(N)$ 、快速非支配排序和双空间拥挤距离计算 $O(N^2(M + \log N))$ 以及存档更新操作 $O(N^3 \log N)$. 因此, CPDEA 算法的最坏时间复杂度为 $O(N^3 \log N)$. 与 CPDEA 算法相比, IMMEA+EM 算法的复杂度要低一个数量级.

为进一步验证算法的实际运行效率, 图10给出

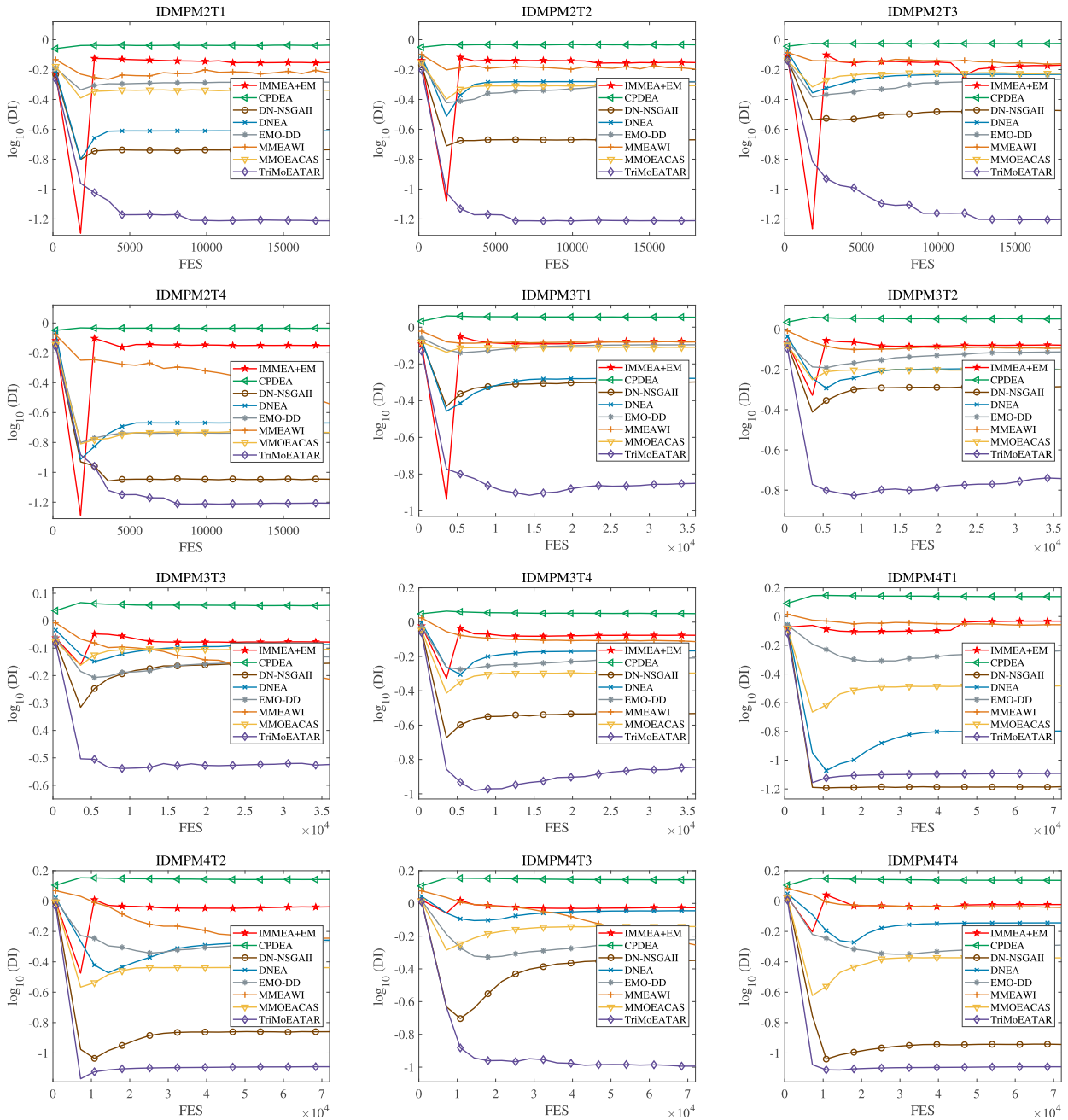


图9 8种算法在IDMPs基准测试函数上的平均DI指标

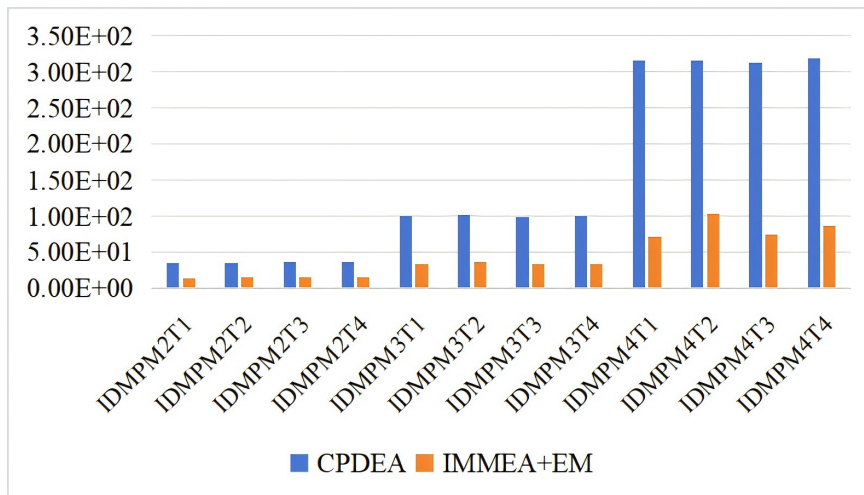


图10 CPDEA与IMMEA+EM在IDMP测试问题上的运行时间对比情况

两者的运行时间对比图. 结果显示 IMMEA+EM 算法的运行效率显著高于 CPDEA 算法.

(3) 算法阶段划分: 考虑到这些测试问题均能快速找到 PF, 因此在第一阶段无需设置过多的计算资源. 经实验测试 $\alpha = 0.1$ 均能保证算法收敛. 而第二阶段的资源分配将是算法成功的关键, 过多地分配计算资源将会影响第三阶段的微调效果, 过少地分配计算资源可能会导致某些 PSs 的丢失. 为实现算法的有效搜索, 这里将 β 分别设置为 0.2, 0.3, ..., 0.9 并进行实验对比. 图 11 的实验结果表明 $\beta = 0.6$ 较为合理.

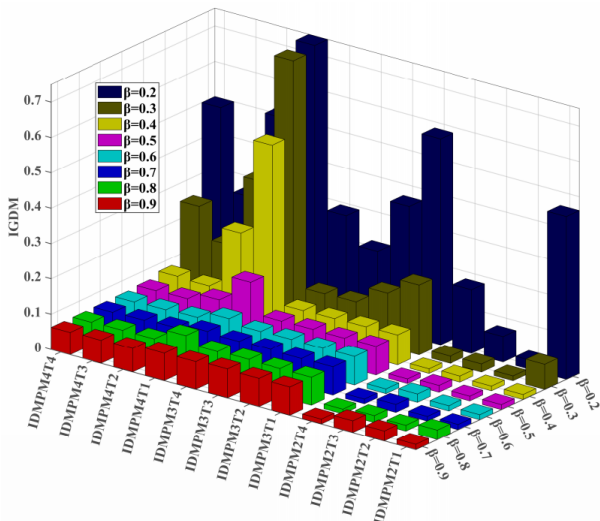


图11 参数 β 的敏感性分析.

(4) 排斥机制局限性: 为更深入探索算法在平衡连续型多模态问题中的表现局限, 下面以 MMF1 问题为例进行进一步讨论. 图 12 和图 13 分别展示了 MMF1 问题的决策空间热力图和算法的仿真模拟图, 显然该问题的 Pareto 解集具有显著的平衡与连续分布特征. 这一性质使本文采用的排斥机制面临一定的制约: 在第一阶段收敛过程中, 由于各 PS 的收敛难度较为接近, 算法在不同 PS 上发现解的概率趋于均衡, 导致存档中容易同时包含来自不同解集的个体. 而排斥机制最初的设计意图是通过抑制对已覆盖区域的重复探索来引导算法挖掘新的独立 PS, 在此类"各 PS 平衡"场景下, 该机制难以发挥有针对性的引导作用. 此外, PS 的连续拓扑结构导致"已覆盖个体"与"未探索个体"的边界趋于模糊, 进而难以通过"搜索禁忌域"对邻域个体进行二次探索, 从而削弱了该机制的有效性. 这一现象进一步表明, 本文算法更适用于 PS 分布相对独立、且各 PS 间收敛难度存在显著差异的问题场景. 后续算法将在平衡连续的多模态多目标优化问题中进行进一步研究.

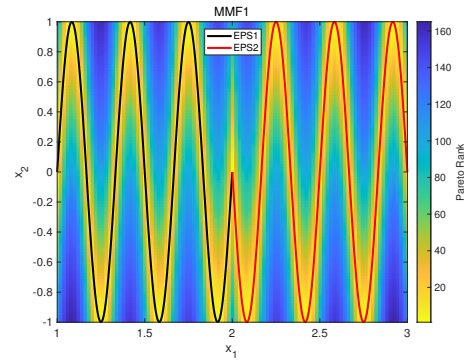


图12 MMF1 问题的决策空间热力图.

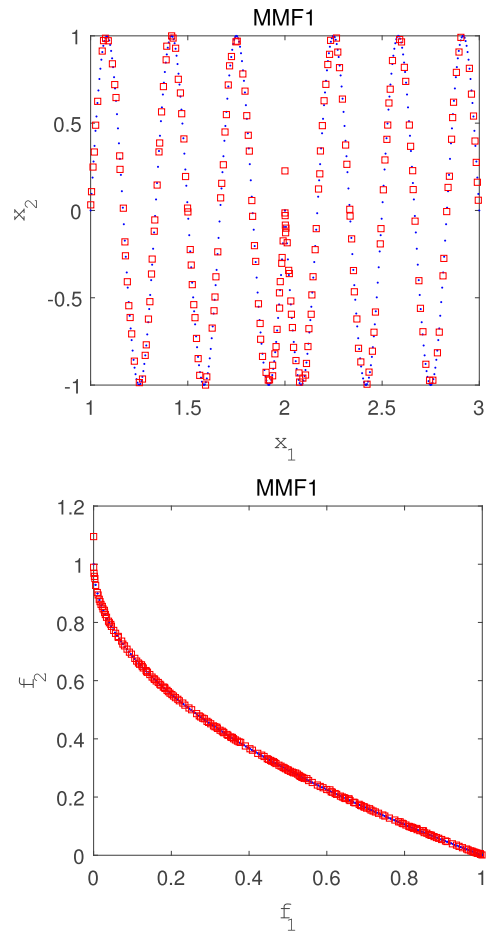


图13 MMF1 问题在决策空间和目标空间的模拟图.

参考文献 (References)

- [1] Yue C T, Qu B Y, Liang J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(5): 805-817.
- [2] Zou J, Deng Q, Liu Y, et al. A dynamic-niching-based Pareto domination for multimodal multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2024, 28(5): 1529-1543.
- [3] Liang J, Lin H Y, Yue C T, et al. Multiobjective differential evolution with speciation for constrained multimodal multiobjective optimization[J]. *IEEE*

- Transactions on Evolutionary Computation*, 2023, 27(4): 1115-1129.
- [4] Lin H Y, Liang J, Yue C T, et al. A similar-niching-based differential evolution for constrained multimodal multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2025, 55(10): 6710-6722.
- [5] 闫李, 马佳慧, 柴旭朝, 等. 基于知识引导的自适应动态多模态差分进化算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(11): 3048-3056.
(Yan L, Ma J H, Chai X Z, et al. Adaptive dynamic multimodal differential evolution algorithm based on knowledge guidance[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(11): 3048-3056.)
- [6] Li W H, Yao X Y, Zhang T, et al. Hierarchy ranking method for multimodal multiobjective optimization with local Pareto fronts[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2023, 27(1): 98-110.
- [7] Qu B Y, Li G S, Yan L, et al. A grid-guided particle swarm optimizer for multimodal multi-objective problems[J]. *Applied Soft Computing*, 2022, 117: 108381.
- [8] Yang Q T, Wang Z K, Luo J P, et al. Balancing performance between the decision space and the objective space in multimodal multiobjective optimization[J]. *Memetic Computing*, 2021, 13(1): 31-47.
- [9] Yue C T, Song J K, Liang J, et al. A multimodal multiobjective evolutionary algorithm based on neighborhood and enhanced special crowding distance[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2025, 315: 113340.
- [10] Liu Y P, Ishibuchi H, Yen G G, et al. Handling imbalance between convergence and diversity in the decision space in evolutionary multimodal multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(3): 551-565.
- [11] 李浩东, 胡洁, 范勤勤. 基于并行分区搜索的多模态多目标优化及其应用[J]. *计算机科学*, 2022, 49(5): 212-220.
(Li H D, Hu J, Fan Q Q. Multimodal multi-objective optimization based on parallel zoning search and its application[J]. *Computer Science*, 2022, 49(5): 212-220.)
- [12] 张国晨, 刘鹏飞, 孙超利. 一种新环境选择策略的多模态多目标优化算法[J]. *应用科学学报*, 2022, 40(5): 739-748.
(Zhang G C, Liu P F, Sun C L. Multi-model multi-objective optimization algorithms with a new environmental selection strategy[J]. *Journal of Applied Sciences*, 2022, 40(5): 739-748.)
- [13] 程适, 刘悦, 王雪萍, 等. 改进头脑风暴优化算法求解多模态多目标问题[J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2024, 52(6): 24-31.
(Cheng S, Liu Y, Wang X P, et al. Improved brain storm optimization algorithm for solving multimodal multiobjective problems[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition*, 2024, 52(6): 24-31.)
- [14] 陈先亮, 黄元君, 范勤勤. 基于多模态多目标进化算法的无人机三维路径规划[J]. *火力与指挥控制*, 2023, 48(11): 32-39.
(Chen X L, Huang Y J, Fan Q Q. Three-dimensional path planning of UAV based on multimodal multi-objective evolutionary algorithm[J]. *Fire Control & Command Control*, 2023, 48(11): 32-39.)
- [15] Yue C T, Song J K, Liu M N, et al. An evolutionary algorithm for multimodal multi-objective traveling salesman problems[J]. *Expert Systems with Applications*, 2026, 297: 129540.
- [16] 边琦, 张梦寒, 王建平, 等. 基于改进细菌觅食算法的飞控系统多模态参数优化[J]. *控制与决策*, 2022, 37(8): 1981-1988.
(Bian Q, Zhang M H, Wang J P, et al. An improved bacterial foraging algorithm for multimodal parameter optimization of flight control system[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(8): 1981-1988.)
- [17] 王艳红, 付威通, 张俊, 等. 基于改进近端策略优化算法的柔性作业车间调度[J]. *控制与决策*, 2025, 40(6): 1883-1891.
(Wang Y H, Fu W T, Zhang J, et al. Flexible job-shop scheduling based on improved proximal policy optimization algorithm[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(6): 1883-1891.)
- [18] Yue C T, Liang J, Qu B Y, et al. A survey on multimodal multiobjective optimization[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(11): 2577-2588.
- [19] Liang J J, Yue C T, Qu B Y. Multimodal multi-objective optimization: A preliminary study[C]. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vancouver, 2016: 2454-2461.
- [20] Storn R, Price K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. *Journal of Global Optimization*, 1997, 11(4): 341-359.
- [21] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm[R]. Zurich: Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.
- [22] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search[C]. *Parallel Problem Solving from Nature — PPSN VIII*. Heidelberg, 2004: 832-842.
- [23] Liu Y P, Ishibuchi H, Nojima Y, et al. A double-niched evolutionary algorithm and its behavior on polygon-based problems[C]. *Parallel Problem Solving from Nature — PPSN XV*. Coimbra, 2018: 262-273.
- [24] Li W H, Zhang T, Wang R, et al. Weighted indicator-based evolutionary algorithm for multimodal

- multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(6): 1064-1078.
- [25] Liu Y P, Yen G G, Gong D W. A multimodal multiobjective evolutionary algorithm using two-archive and recombination strategies[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(4): 660-674.
- [26] Luo N L, Lin W, Huang P Z, et al. An evolutionary algorithm with clustering-based assisted selection strategy for multimodal multiobjective optimization[J]. *Complexity*, 2021, 2021: 4393818.
- [27] Ishibuchi H, Masuda H, Nojima Y. A study on performance evaluation ability of a modified inverted generational distance indicator[C]. *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. Madrid Spain. New York, 2015: 695-702.
- [28] 王丽萍, 任宇, 邱启仓, 等. 多目标进化算法性能评价指标研究综述[J]. *计算机学报*, 2021, 44(8): 1590-1619. (Wang L P, Ren Y, Qiu Q C, et al. Survey on

performance indicators for multi-objective evolutionary optimization[J]. *Journal of Computers*, 2021, 44(8): 1590-1619.)

作者简介

段鑫绘 (2000-), 女, 博士生, 主要研究方向为进化计算、复杂系统建模与优化, E-mail: duanxhxaut@126.com;

江巧永 (1983-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为演化优化与学习、复杂系统建模与优化, E-mail: jiangqiaoyong@xaut.edu.cn;

林艳艳 (1983-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为多目标进化优化与算法自动设计, E-mail: linyy1027@126.com;

邓镜达 (1991-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为昂贵多目标进化优化, E-mail: jddeng@xaut.edu.cn;

王彬 (1971-), 男, 副教授, 硕士, 主要研究方向为多任务进化优化, E-mail: wb@xaut.edu.cn;

黑新宏 (1976-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为复杂系统建模与优化, E-mail: heixinhong@xaut.edu.cn.