

# 基于非交换映射的双目标无导数优化

褚明慧, 霍鑫<sup>†</sup>

(哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 针对目标函数梯度信息难以获取或计算成本高昂的双目标优化问题, 采用非交换映射设计一种不依赖梯度信息的双目标无导数优化算法. 该算法仅利用目标函数值信息, 基于非交换映射估计双目标优化问题的综合梯度下降方向. 此外, 为解决目标间的冲突权衡问题, 并避免过度优化单一目标, 通过最小化包含惩罚函数与正则项的修正代价函数, 提出一种冲突校正的双目标无导数优化算法. 基于 Lyapunov 函数证明了所提出算法对一类强凸目标函数的稳定性. 数值仿真结果表明, 与其他双目标无导数优化算法相比, 所提出算法在目标冲突权衡方面具有更好的性能, 能有效避免收敛至 Pareto 前沿端点, 为梯度信息难以获取的双目标优化问题提供了一种有效的无导数优化方案.

**关键词:** 无导数优化; 非交换映射; 冲突校正; 双目标优化; 梯度估计; Pareto 前沿

**中图分类号:** TP13 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2025.1271

**引用格式:** 褚明慧, 霍鑫. 基于非交换映射的双目标无导数优化 [J]. 控制与决策.

## Bi-objective derivative-free optimization based on noncommutative maps

CHU Ming-hui, HUO Xin<sup>†</sup>

(Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** Aiming at bi-objective optimization problems where gradient information is difficult to obtain or computationally expensive, this paper proposes a bi-objective derivative-free optimization algorithm based on noncommutative maps. The comprehensive gradient descent is approximated only using objective function values in the bi-objective optimization problems. Furthermore, to balance the trade-off between conflicting objectives and prevent over-optimizing some objective, a conflict-corrected bi-objective derivative-free optimization algorithm is proposed by minimizing a modified cost function that incorporates a penalty term and a regularization term. The stability of the proposed algorithm for a class of strongly convex objective functions is proven using Lyapunov functions. Numerical simulations demonstrate that compared to other bi-objective derivative-free optimization algorithms, the proposed algorithm exhibits superior performance in handling conflicting trade-off between objectives. It effectively prevents converging to endpoints of the Pareto front, providing an efficient derivative-free scheme for bi-objective optimization problems when gradient information is unavailable.

**Keywords:** derivative-free optimization; noncommutative maps; conflict-correction; bi-objective optimization; gradient approximation; Pareto front

## 0 引言

优化问题广泛存在于控制系统设计、参数整定、机器学习等科学研究和工程领域. 当目标函数的梯度信息因计算成本高昂、存在噪声或无法解析求取而难以获取或不可靠时, 传统的基于梯度的优化算法 (如梯度下降法、牛顿法等) 在此情况下便难以直接应用. 无导数优化是一种在梯度信息无法获取时

强大的优化方法, 近年来受到广泛关注<sup>[1,2]</sup>. 例如, 为了提高数值预报准确率, 文献 [1] 利用历史观测资料实现时空演变的模式误差的估计问题, 给出了一个解决最优控制问题的无导数优化方法. 针对带一般约束的无导数优化问题, 文献 [2] 通过建立约束违和函数提出了一种改进的无导数信赖域算法并证明算法的收敛性. 文献 [3] 和文献 [4] 分别提出了加速无

收稿日期: 2025-12-09; 录用日期: 2026-02-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62373128); 国家自然科学基金基础科学中心项目 (62188101).

责任编委: 巩敦卫.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: huoxin@hit.edu.cn.

导数优化算法以提高收敛速度. 文献 [5] 提出了基于非交换映射的无导数优化方法, 该方法通过梯度生成函数和非交换映射近似估计梯度信息.

以上研究主要侧重于解决单目标优化问题, 近年来许多学者针对多目标优化算法开展了广泛研究. 例如基于梯度的确定性方法, 以多梯度下降算法 (MGDA) 及其变体为代表<sup>[6-7]</sup>, 其优势在于收敛速度快、具有严格的数学理论推导. 然而, 该方法对梯度信息的依赖也使其难以应用于梯度信息难以获取或不存在的优化问题. 基于群体智能的随机方法以多目标进化算法为主流<sup>[8-9]</sup>, 这类方法无需梯度信息, 因此对问题模型的依赖性低, 在复杂系统优化中鲁棒性强、应用广泛. 但通常需要大量的函数评估, 计算成本较高. 文献 [10] 提出了一种基于信赖域的无导数优化算法, 该方法能有效地生成分布均匀的 Pareto 最优解集. 然而, 该方案需要在信赖域内构建精确的完全二次模型带来了巨大的计算负担. 文献 [11] 提出了一种基于海森矩阵的多目标无导数优化算法. 利用高斯平滑技术同时估计梯度和海森矩阵, 尽管二阶信息的引入提升了收敛性能, 但该方法需要估计海森矩阵, 这导致了昂贵的计算成本. 然而上述方案没有对目标冲突进行校正, 在一些初始点可能会导致过度优化某个目标.

据我们所知, 目前尚未有基于非交换映射的双目标优化研究, 受多目标优化算法的启发<sup>[12-13]</sup>, 本文针对文献 [5] 这一类无导数优化算法, 将基于非交换映射的单目标优化扩展到双目标优化, 构造适用于双目标优化的探索序列, 提出了一种基于非交换映射的双目标无导数优化方法. 针对现有方法容易收敛至 Pareto 前沿端点的问题, 通过最小化修正后的代价函数估计综合梯度下降方向, 同时完全避免了构建二次模型以及海森矩阵求逆计算, 提升了计算效率, 并从理论上证明了所提出的双目标无导数优化算法的稳定性. 最后, 通过数值仿真证明相较于其他双目标无导数优化算法, 所提出的算法可以更好地权衡双目标优化问题之间的冲突.

## 1 预备知识

### 1.1 无导数优化

当目标函数的梯度无法解析获得或计算代价过高时, 经典的梯度下降方法面临局限性. 无导数优化作为一种零阶方法, 为求解此类复杂优化问题提供了有效途径. 本文在文献 [5] 所提出的无导数优化框架下展开研究, 具体形式为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = M_k^{\sqrt{h}}(\mathbf{x}_k, J_1(\mathbf{x}_k)), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $M_k^{\sqrt{h}}(\mathbf{x}_k, J_1(\mathbf{x}_k))$  表示转移映射. 梯度下降算法通过设计转移映射  $M_k^{\sqrt{h}}$ , 使得对任意  $k \in \mathbb{N}_0$  与步长  $h \in \mathbb{R}_{>0}$ , 式 (1) 的  $m$  次复合映射为:

$$\mathbf{x}_{k+m} = (M_{k+m-1}^{\sqrt{h}} \circ \dots \circ M_k^{\sqrt{h}})(\mathbf{x}_k, J_1(\mathbf{x}_k)), \quad (2)$$

从而实现梯度下降方向的估计:

$$\mathbf{x}_{k+m} = \mathbf{x}_k - h \nabla J_1(\mathbf{x}_k) + \mathcal{O}(h^{3/2}), \quad (3)$$

此处  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)$  表示目标函数  $J_1$  在点  $\mathbf{x}_k$  处的近似梯度.

转移映射定义为:

$$\begin{aligned} M_k^{\sqrt{h}}(\mathbf{x}_k, J_1(\mathbf{x}_k)) = \\ \mathbf{x}_k + \sqrt{h} \alpha_1 \mathbf{s}_k(J_1(\mathbf{x}_k)) + \\ \sqrt{h} \alpha_2 \mathbf{s}_k(J_1(\mathbf{x}_k + \sqrt{h} \mathbf{s}_k(J_1(\mathbf{x}_k)))), \end{aligned} \quad (4)$$

且

$$\mathbf{s}_\ell(J_1(\mathbf{x}_k)) = f(J_1(\mathbf{x}_k)) \mathbf{u}_\ell + g(J_1(\mathbf{x}_k)) \mathbf{v}_\ell, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{s}_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  为评估映射,  $\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell \in \mathbb{R}^n$  是周期为  $m$  的探索序列,  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为梯度生成函数.

结合式 (2) 和 (4)-(5), 并取  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ,  $m = 4n$ , 可得:

$$\mathbf{x}_{k+m} = \mathbf{x}_k + h \{[f, g](J_1(\mathbf{x}_k))\} \nabla J_1(\mathbf{x}_k) + \mathcal{O}(h^{3/2}), \quad (6)$$

此处  $[f, g] := \frac{\partial g}{\partial J_1} f - \frac{\partial f}{\partial J_1} g$  表示  $f$  与  $g$  的李括号. 例如当  $f(J_1(x)) = \sin(J_1(x))$ ,  $g(J_1(x)) = \cos(J_1(x))$  时, 式 (6) 中花括号项为  $-1$ , 由此可得式 (3). 探索序列  $\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell$  和非交换映射的示意图如图 1 所示.

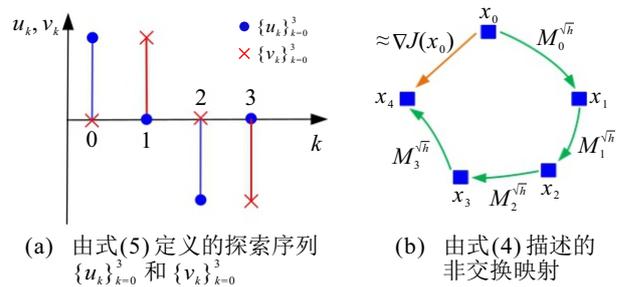


图1 探索序列和非交换映射示意图

### 1.2 多目标优化

本研究主要考虑双目标情形. 无约束双目标优化问题旨在最小化目标函数:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x})]^\top$$

为目标函数向量,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  为决策向量.

针对双目标优化问题, 给出如下假设.

**假设 1** 式 (7) 中每个目标函数  $J_i$  均满足  $C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  和强凸性, 即存在参数  $\mu_i > 0$  与  $L_H$ , 使得对所有  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  及  $i = 1, 2$  下式成立:

$$J_i(\mathbf{y}) \geq J_i(\mathbf{x}) + \nabla J_i(\mathbf{x})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{\mu_i}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2, \quad (8)$$

且对所有  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  满足:

$$\left\| \frac{\partial^2 J_i}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} \right\| \leq L_H. \quad (9)$$

**引理 1**<sup>[14]</sup> 若假设 1 成立, 则存在正常数  $\alpha_g$ , 使得对所有  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  及  $\mathbf{v}$  满足

$$\mathbf{v} \in \mathcal{X} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 v_i = 1, v_i \geq 0 \right\}, \quad (10)$$

下式均成立:

$$\mathbf{g}_v^\top(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{x}} \geq \alpha_g \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad (11)$$

其中  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{x}^*$  为 Pareto 前沿上的某一点, 且  $\mathbf{g}_v^\top(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^\top \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ .

## 2 双目标优化问题描述

针对双目标优化问题, 通常可将其转化为最小化目标函数加权和的形式:

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, k) = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{v}^\top \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)\|^2, \quad (12)$$

其中约束条件为:

$$\mathbf{v} \in \mathcal{X} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 v_i = 1 \right\}. \quad (13)$$

我们定义函数:

$$L(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{x}_k) = \|\hat{\mathbf{v}}_1 \nabla J_1(\mathbf{x}_k) + (1 - \hat{\mathbf{v}}_1) \nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2. \quad (14)$$

令其偏导数为零:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{x}_k)}{\partial \hat{\mathbf{v}}_1} &= \\ 2(\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k))^\top & \cdot \\ (\hat{\mathbf{v}}_1(\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k)) & + \nabla J_2(\mathbf{x}_k)) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

则可推导出:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_1(\mathbf{x}_k) &= \\ \frac{\nabla J_2(\mathbf{x}_k)^\top (\nabla J_2(\mathbf{x}_k) - \nabla J_1(\mathbf{x}_k))}{\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2} &= \\ \frac{\|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2 - \nabla J_2(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_1(\mathbf{x}_k)}{\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\|^2 - 2\nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) + \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

若  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k) \neq \nabla J_2(\mathbf{x}_k)$ , 则由于  $0 < \hat{\mathbf{v}}_1 < 1$ , 可得下式 (17):

$$v_1 = \begin{cases} 0, & \text{若 } J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) \geq \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2 \\ \frac{\nabla J_2(\mathbf{x}_k)^\top (\nabla J_2(\mathbf{x}_k) - \nabla J_1(\mathbf{x}_k))}{\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2}, & \\ \text{若 } \nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) < \|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\|^2, & \\ \text{且 } \nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) < \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2 & \\ 1, & \text{若 } J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) \geq \|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\|^2 \end{cases} \quad (17)$$

**注 1** 对于式 (17), 若  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) \geq \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2$  或  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) \geq \|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\|^2$ , 这意味着  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)$  与  $\nabla J_2(\mathbf{x}_k)$  之间的夹角为锐角, 则综合梯度倾向于收敛至 Pareto 前沿端点, 且该处梯度范数较小. 相反, 若  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) < \|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\|^2$  且  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)^\top \nabla J_2(\mathbf{x}_k) < \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|^2$ , 则说明  $\nabla J_1(\mathbf{x}_k)$  与  $\nabla J_2(\mathbf{x}_k)$  之间的夹角为钝角. 在此情况下, 当夹角趋近  $\pi$  时, 若  $\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\| \gg \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|$  或  $\|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\| \gg \|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\|$ , 则综合梯度亦将趋于收敛至 Pareto 前沿的端点 (即梯度范数较小的位置). 因此, 权重系数受梯度间夹角和梯度范数共同影响. 在此机制下, 若梯度夹角趋近于 0 或  $\pi$  且范数差异显著, 则易导致算法收敛至梯度范数较小的 Pareto 前沿端点.

定义最大冲突为

$$\begin{aligned} C &= \max_{\mathbf{d} \in \Phi} \left\langle \frac{1}{h} (J_i(\mathbf{x} + h\mathbf{d}) - J_i(\mathbf{x})), \mathbf{d} \right\rangle = \\ & \max_{\mathbf{d} \in \Phi} \left\langle \frac{\partial J_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{d} \right\rangle + \mathcal{O}(h) = \\ & - \min_{\mathbf{d} \in \Phi} \left\langle \frac{\partial J_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{d} \right\rangle + \mathcal{O}(h), \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\Phi = \{1, 2\}$ ,  $\mathbf{d}$  表示梯度搜索方向,  $\frac{\partial J_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  表示目标函数  $J_i$  在点  $\mathbf{x}$  处的梯度.

具有最大冲突的目标函数索引为

$$i^*(\mathbf{x}) = \arg \max_{i \in \Phi} \left\langle \nabla J_i(\mathbf{x}), \mathbf{d}(\mathbf{x}) \right\rangle + \mathcal{O}(h), \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_k) = \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^\top \hat{\mathbf{v}}(k), \quad (20)$$

$\hat{\mathbf{v}}(k)$  由式 (12) 定义.

为了最小化最大冲突或最大化最小下降方向, 优化目标为搜索如下梯度下降方向:

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m} \min_{i \in \Phi} \left\langle \frac{\partial J_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{d} \right\rangle. \quad (21)$$

## 3 主要结果

### 3.1 冲突校正算法

在本研究中, 设计一种冲突校正的正则化方法, 以权衡双目标间的冲突. 基于冲突校正的正则化方法, 式 (21) 的修正形式为:

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}_k) = \max_{\mathbf{d}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^m} \min_{i \in \Phi} \left( \frac{\partial J_i(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}, \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) \right) - \frac{1}{2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{P}(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)) \quad (22)$$

或

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}_k) = \max_{\mathbf{d}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^m} \min_{\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{X}} \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) - \frac{1}{2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{P}(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)), \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}^\top(\mathbf{x}_k) = \hat{\mathbf{v}}(k)^\top \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}_k), \quad (24)$$

式中  $\hat{\mathbf{v}}(k) \in \mathcal{X}$  由式 (12) 定义.

此外, 式 (22) 中的二次项  $-\frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{d}$  是一个  $L_2$  正则化项以防止搜索方向  $\mathbf{d}$  过大. 惩罚项  $\mathbf{P}(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}(\mathbf{x}_k))$  被设计用于调整冲突目标的权重, 定义如下:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)) = \lambda |\rho(J_1(\mathbf{x}_k), J_2(\mathbf{x}_k))| \times \frac{2}{\left( \frac{1}{1 + e^{-\kappa(\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\| - \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|)}} - 1 \right)} \times (\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k))^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k), \quad (25)$$

其中  $\lambda$  为正则化参数,  $\kappa$  为超参数. 式 (25) 使用余弦相似度  $\rho(J_i(\mathbf{x}), J_j(\mathbf{x}))$  用于评估目标函数间的相关性, 其定义为:

$$\rho(J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x})) = \frac{\nabla J_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla J_2(\mathbf{x})}{\|\nabla J_1(\mathbf{x})\| \|\nabla J_2(\mathbf{x})\|}, \quad (26)$$

其中  $\nabla J_1(\mathbf{x})$  和  $\nabla J_2(\mathbf{x})$  分别表示目标函数  $J_1$  和  $J_2$  在点  $\mathbf{x}$  处的梯度, 这些梯度的欧几里得范数分别记为  $\|\nabla J_1(\mathbf{x})\|$  和  $\|\nabla J_2(\mathbf{x})\|$ . 当  $\rho \approx 1$  时, 目标函数呈正相关; 当  $\rho \approx 0$  时, 目标函数不相关; 当  $\rho \approx -1$  时, 目标函数呈负相关, 表明二者存在冲突关系.

**注 2** 根据注 1 可知, 权重系数同时受梯度间夹角和梯度范数共同影响. 式 (25) 通过引入  $\lambda |\rho(J_1(\mathbf{x}_k), J_2(\mathbf{x}_k))|$  项, 当目标函数呈负相关或正相关时, 可增强惩罚强度. 式 (25) 中的项  $\frac{2}{\left( \frac{1}{1 + e^{-\kappa(\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\| - \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|)}} - 1 \right)}$  用于调节梯度搜索方向. 若  $\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\| - \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|$  增大, 则惩罚项将施加更强的惩罚作用. 式 (25) 中的项  $(\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k))^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)$  用于衡量目标函数  $J_1(\mathbf{x}_k)$  与  $J_2(\mathbf{x}_k)$  的梯度沿搜索方向  $\mathbf{d}(\mathbf{x}_k)$  的差异程度. 由于本文是双目标无导数优化, 正则化参数  $\lambda$  的范围应满足  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ .

由于式 (23) 关于  $\mathbf{d}$  呈凸性, 关于  $\hat{\mathbf{v}}$  呈线性, 故式 (23) 可改写为:

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{X}} \max_{\mathbf{d}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^m} L(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{d}, \lambda), \quad (27)$$

其中

$$L(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) - \frac{1}{2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{P}(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}(\mathbf{x}_k)) \quad (28)$$

由此可得

$$\frac{\partial L(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{d}, \lambda)}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_k) = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_k) = \lambda |\rho(J_1(\mathbf{x}_k), J_2(\mathbf{x}_k))| \times \left( \frac{2}{1 + e^{-\kappa(\|\nabla J_1(\mathbf{x}_k)\| - \|\nabla J_2(\mathbf{x}_k)\|)}} - 1 \right) \times (\nabla J_1(\mathbf{x}_k) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k)). \quad (30)$$

由式 (29) 可得

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}_k) = \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_k). \quad (31)$$

因此, 提出的双目标冲突校正算法为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - h \mathbf{d}^*(\mathbf{x}_k). \quad (32)$$

### 3.2 无导数冲突校正算法

针对目标函数的梯度不可导问题, 本文采用式 (3) 的无导数优化算法, 以近似估计综合梯度. 单目标优化问题的探索序列已在文献 [5] 第三节的 B 和 C 详细介绍. 限于篇幅, 此处不再赘述.

本研究将文献 [5] 中的无导数优化算法推广至双目标优化问题. 具体而言, 首先选取梯度生成函数  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $g_1$  和  $g_2$  (其定义见式 (38) 和 (39)), 参数满足  $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$ . 对于双目标优化问题的探索序列  $\{w_{\ell,1}\}_{\ell=0}^{m_1-1}$  和  $\{w_{\ell,2}\}_{\ell=0}^{m_2-1}$ , 若  $m_1 \neq m_2$ , 则令  $m_{\max} = \max(m_1, m_2)$  以确保探索序列长度的一致性. 最后, 重构  $m_{\max}$ -周期探索序列  $\{w_{\ell,1}\}_{\ell=0}^{m_{\max}-1}$  和  $\{w_{\ell,2}\}_{\ell=0}^{m_{\max}-1}$ .

以下引理给出了探索序列构建过程中的相关条件<sup>[5]</sup>.

**引理 2<sup>[5]</sup>** 若假设 1 成立, 则带有转移映射 (4) 的复合映射 (2) 其第  $k + m$  步的演化由下式给出:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+m} &= \mathbf{x}_k + \sqrt{h}(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{Y}(f(J(\mathbf{x}_k)), \\ &g(J(\mathbf{x}_k))) \times \mathbf{W} \mathbf{1} + \\ &h \tilde{\mathbf{Y}}(f(J(\mathbf{x}_k)), g(J(\mathbf{x}_k))) \mathbf{T}(\mathbf{W}) \times \\ &\mathbf{Y}(f(J(\mathbf{x}_k)), g(J(\mathbf{x}_k)))^\top \nabla J(\mathbf{x}_k) + \mathcal{O}(h^{3/2}), \end{aligned} \quad (33)$$

其中  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_0 \ \mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{m-1}] \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ ,  $\mathbf{w}_i = [\mathbf{u}_i^\top \ \mathbf{v}_i^\top]^\top$ , 是探索序列矩阵.  $\mathbf{T}(\mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  定义为

$$\mathbf{T}(\mathbf{W}) := \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_2 \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^\top + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^\top). \quad (34)$$

此外, 定义  $\mathbf{Y}(f(z), g(z)) := [f(z) \mathbf{I} \quad g(z) \mathbf{I}]$

$$\in \mathbb{R}^{n \times 2n}, \quad \tilde{\mathbf{Y}}(f(z), g(z)) := \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z) \mathbf{I} \quad \frac{\partial g}{\partial z}(z) \mathbf{I} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Y}(f(z), g(z)) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}.$$

如果存在探索序列矩阵  $\mathbf{W}$ , 和梯度生成函数  $f$  和  $g$ , 使得下式满足

$$\tilde{\mathbf{Y}}(f(J(\mathbf{x}_k)), g(J(\mathbf{x}_k))) \mathbf{T}(\mathbf{W}) \times \mathbf{Y}(f(J(\mathbf{x}_k)), g(J(\mathbf{x}_k)))^\top = -\mathbf{I}, \quad (35)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (36)$$

则式 (3) 成立.

**引理 3<sup>[5]</sup>** 令  $2\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 = 0$ ,  $\mathbf{T}_d$  是反对称矩阵, 则使用以下  $(\mathbf{T}_d, f, g)$  可以使得式 (35) 成立:

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} a\mathbf{Q} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & b\mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^\top, \quad (37)$$

$$f(z) = a^{-1/2} \sin(\sqrt{ab}z + \phi), \quad (38)$$

$$g(z) = b^{-1/2} \cos(\sqrt{ab}z + \phi), \quad (39)$$

其中  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$ .

此外,  $\mathbf{T}(\mathbf{W})$  定义如式 (34), 如果  $\mathbf{T}(\mathbf{W})$  满足 (36), 则  $\mathbf{T}(\mathbf{W})$  可以写作

$$\mathbf{T}(\mathbf{W}) = \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{W}^\top, \quad (40)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_2 & 0 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_2 & \vdots \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_2 & c_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (41)$$

其中  $c_1 = 2\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2$ ,  $c_2 = \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2$ . 引理的证明和更多细节见文献 [5].

根据式 (3), 我们获得近似估计梯度:

$$\nabla \hat{J}_1(\mathbf{x}_k) = \frac{\mathbf{x}_{k+m} - \mathbf{x}_k}{h} = \nabla J_1(\mathbf{x}_k) + \mathcal{O}(h^{1/2}), \quad (42)$$

及

$$\nabla \hat{J}_2(\mathbf{x}_k) = \frac{\mathbf{x}_{k+m} - \mathbf{x}_k}{h} = \nabla J_2(\mathbf{x}_k) + \mathcal{O}(h^{1/2}). \quad (43)$$

结合式 (30)、(42) 和 (43), 可得:

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_k) + \mathcal{O}(h^{1/2}). \quad (44)$$

结合式 (32)、(42) 和 (44), 提出一种不依赖精确梯度信息的双目标无导数优化算法:

$$\mathbf{x}_{k+m} = \mathbf{x}_k - h \hat{\mathbf{d}}^*(\mathbf{x}_k), \quad (45)$$

其中

$$\hat{\mathbf{d}}^*(\mathbf{x}_k) = \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_k) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_k), \quad (46)$$

$$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{v}}}^\top(\mathbf{x}_k) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, k)^\top \nabla \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_k), \quad (47)$$

式中  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, k)$  与  $\hat{\mathbf{R}}$  分别由式 (12) 与 (44) 定义, 且  $k = rm$ ,  $r \in \mathbb{N}_+$ .

**注 3** 针对目标函数的梯度不可导问题, 传统的梯度下降算法理论上不再适用. 本文采用式 (45) 的无导数优化算法, 以近似估计综合梯度. 这种方法适用于解决梯度缺失或计算量巨大的复杂优化问题.

### 3.3 稳定性证明

下面定理给出了算法 (45) 的稳定性条件.

**定理 1** 考虑算法 (45), 若假设 1 成立, 则对任意  $0 < \delta_2 < \delta_1 \in \mathbb{R}$  和  $\kappa > 0$ , 存在  $h^* \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\lambda^* \in \mathbb{R}_{>0}$  与  $N \in \mathbb{N}_0 > 0$ , 使得对于所有  $h \in (0, h^*)$ ,  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  以及初始点  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_{\delta_1}(\mathbf{x}^*)$  (其中  $\mathbf{x}^*$  为 Pareto 前沿上的某一点), 算法对所有  $k \geq N$  均满足  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{U}_{\delta_2}(\mathbf{x}^*)$ .

**证明**

**步骤 1** 令  $\hat{\mathbf{d}}^* = \hat{\mathbf{v}}(k)^\top \nabla \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_k)$ , 其中  $\hat{\mathbf{v}}(k)$  定义如下.

$$\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{X} = \{ \hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i = 1, \hat{v}_i \geq 0 \}, \quad (48)$$

以下给出证明的后续部分. 令  $\delta_0, \dots, \delta_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  满足  $0 \leq \delta_3 \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \delta_0$ , 定义  $\mathcal{U}_{\delta_0}(\mathbf{x}^*)$ ,  $\mathcal{U}_{\delta_1}(\mathbf{x}^*)$ ,  $\mathcal{U}_{\delta_2}(\mathbf{x}^*)$ ,  $\mathcal{U}_{\delta_3}(\mathbf{x}^*) \subseteq \mathbb{R}^n$  是以  $\mathbf{x}^*$  为中心的紧凸集. 考虑李雅普诺夫函数

$$V(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*)^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2. \quad (49)$$

详细推导如下所示.

**步骤 2** 定义如式 (49) 所示的李雅普诺夫函数  $V$ , 则存在充分小的  $h_1$ , 使得对所有  $h \in (0, h_1)$ , 当  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{U}_{\delta_0}(\mathbf{x}^*) \setminus \mathcal{U}_{\delta_3}(\mathbf{x}^*)$  时, 均有  $V(\mathbf{x}_{k+m}) - V(\mathbf{x}_k) < -\epsilon$  成立. 具体推导如下:

由引理 1 可知, 存在 Pareto 前沿上的某点  $\mathbf{x}^*$ , 使得

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x})^\top \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{v}}}^\top \tilde{\mathbf{x}} \geq \alpha_g \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad (50)$$

其中  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ .

结合式 (49) 与 (50) 可得

$$V(\mathbf{x}_{k+m}) - V(\mathbf{x}_k) \leq -h\alpha_g \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 + \mathcal{O}(h^{3/2}). \quad (51)$$

则存在充分小的  $h_1$ , 使得对所有  $h \in (0, h_1)$ , 均有

$$V(\mathbf{x}_{k+m}) - V(\mathbf{x}_k) \leq -\epsilon. \text{ on } \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3 \quad (52)$$

其中  $\mathcal{U}_{\delta_0}(\mathbf{x}^*) \setminus \mathcal{U}_{\delta_3}(\mathbf{x}^*) \supseteq \mathcal{L}$ , 且  $\mathcal{U}_{\delta_3}(\mathbf{x}^*) \supseteq \mathcal{L}_3$  为  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的子集. 由此得证.

**步骤 3** 对任意  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{U}_{\delta_1}(\mathbf{x}^*)$ , (其中  $k \geq 0$ ) 及任

意  $\ell \in [0, m)$ , 存在  $M_{k+\ell-1} \in \mathbb{R}$  使得

$$\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_{k+m} \in \mathcal{U}_{\delta_0}(\mathbf{x}^*) \quad (53)$$

具体推导如下.

对任意  $\mathbf{x}_k$  和  $\ell \in [0, m]$ , 存在  $M_{k+\ell-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  满足

$$V_{k+\ell} \leq V_k(\mathbf{x}_k) + M_{k+\ell-1} h^{3/2}, \quad (54)$$

其中  $J_1(\mathbf{x}_k, k) := \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_k)$  由式 (48) 定义,  $M_{k+\ell-1} h^{3/2} = \mathcal{O}(h^{3/2})$ , ( $M_{k+\ell-1}$  定义见文献 [5] 式 (48)). 因此, 存在充分小的  $h_2 > 0$ , 使得对任意  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{U}_{\delta_1}(\mathbf{x}^*)$ , 均有  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_{k+m} \in \mathcal{U}_{\delta_0}(\mathbf{x}^*)$  成立.

**步骤 4)** 对任意  $0 < \delta_2 < \delta_1 \in \mathbb{R}$ , 存在  $h_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ , 和  $N \in \mathbb{N}_0$ , 使得对所有  $h \in (0, h_3)$ , 及  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_{\delta_1}$ , 均有  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{U}_{\delta_2}$  ( $k \geq N$ ) 成立. 具体论证如下.

基于式 (52) 及步骤 3 的结论, 存在  $h \in \mathbb{R}_{>0}$  和最大迭代次数  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对所有  $h \in (0, \min\{h_1, h_2\})$  和  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_{\delta_1}(\mathbf{x}^*)$ , 均有  $\mathbf{x}_N \in \mathcal{U}_{\delta_3}(\mathbf{x}^*)$ .

类比步骤 3 的论证, 存在  $h_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ , 使得对所有  $h \in (0, h_3)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_{\delta_3}(\mathbf{x}^*)$ , 均有  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{U}_{\delta_2}(\mathbf{x}^*)$  ( $k \geq 0$ ) 成立.

综上, 存在  $h \in \mathbb{R}_{>0}$  和  $N \in \mathbb{N}_0$ , 使得对所有  $h \in (0, \min\{h_1, h_2, h_3\})$  和  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_{\delta_1}(\mathbf{x}^*)$ , 满足  $\mathbf{x}_k$  在  $N$  次迭代内收敛至  $\mathcal{U}_{\delta_2}(\mathbf{x}^*)$ .

证明成立.  $\square$

**注 4** 本文的收敛性证明要求目标函数是强凸的. 然而, 算法的实际实现并不依赖于这些假设. 在不满足上述假设的部分应用场景中, 例如非凸和非光滑函数, 该算法依然表现出良好的性能, 这一点已在后续仿真研究中得到验证. 在更宽松的条件下建立收敛保证是一个有意义且具有挑战性的课题, 但超出了本文的研究范畴.

### 3.4 收敛上界分析

为了进一步体现算法精度, 本文对算法 (45) 收敛上界给出如下分析. 由公式 (49) 和 (51) 可得

$$\|\mathbf{x}_{k+m} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq (1 - 2h\alpha_g) \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 + \mathcal{O}(h^{3/2}). \quad (55)$$

则

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq (1 - 2h\alpha_g)^{k/m} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{i=0}^{k/m-1} (1 - 2h\alpha_g)^i \mathcal{O}(h^{3/2}), \quad (56)$$

式中  $k = rm$ ,  $r \in \mathbb{N}_+$ .

取  $0 < h < \frac{1}{2\alpha_g}$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2h\alpha_g)^{k/m} = 0$ ,

$$\sum_{i=0}^{k/m-1} (1 - 2h\alpha_g)^i \mathcal{O}(h^{3/2}) = \mathcal{O}(h^{1/2}).$$

结合式 (56) 可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 = \mathcal{O}(h^{1/2}). \quad (57)$$

因此, 所提出算法的收敛误差上界为  $\mathcal{O}(h^{1/2})$ .

## 4 数值仿真

本节通过数值仿真, 将所提出的基于冲突校正的双目标无导数优化算法与其他双目标无导数优化算法进行对比, 以验证所提出算法的性能.

### 4.1 例 1

针对光滑双目标优化问题, 目标函数为

$$\begin{cases} J_1(x_1, x_2) = (x_1 + 5)^2 + (x_2 + 10)^2, \\ J_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2. \end{cases} \quad (58)$$

梯度生成函数 (38) 与 (39) 中的参数设置为

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{10}, a_2 = b_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}, \phi = 0, \text{ 探索序列矩阵 } \mathbf{T}_d \text{ 设置为}$$

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

算法参数设置为  $h = 0.01$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\kappa = 100$ . 探索序列长度为  $m = 13$ . 式 (4) 中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  取值为  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . 然而在权衡性能方面如图 2 所示, 可以看出所提出的算法可以有效权衡目标之间的冲突, 而基于 MGDA 的双目标无导数优化算法和双目标无导数优化算法<sup>[11]</sup>收敛至离初始位置较近的 Pareto 最优点, 导致对某一目标过度优化.

### 4.2 例 2

针对非光滑双目标优化问题, 目标函数为

$$\begin{cases} J_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + |x_2 - 5| + 1, \\ J_2(x_1, x_2) = 3x_2^2 + |x_1 + 10| + 2. \end{cases} \quad (59)$$

目标函数不可导点的集合为  $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 5 \text{ 或 } x_1 = -10\}$ . 算法的参数, 包括梯度生成函数、步长和探索序列等, 均与例 1 中的设置相同. 仿真结果如图 3 所示, 其中灰色区域代表双目标优化问题的 Pareto 最优解集. 可以看出, 尽管目标函数在某些 Pareto 最优点上不可导, 例如点  $(x_1, x_2) = (-10, 0)$  和  $(x_1, x_2) = (0, 5)$ . 基于 MGDA 的双目标无导数优化算法仍然可以收敛至这些 Pareto 最优点, 这是由于无导数优化方法是采用数值积分而非数值微分的方法. 然而, 基于 MGDA 的双目标无导数优化算法和双目标无导数优化算法<sup>[11]</sup>会因为初始条件过度优化某个目标, 导致收敛到 Pareto 最优解集的端点. 所

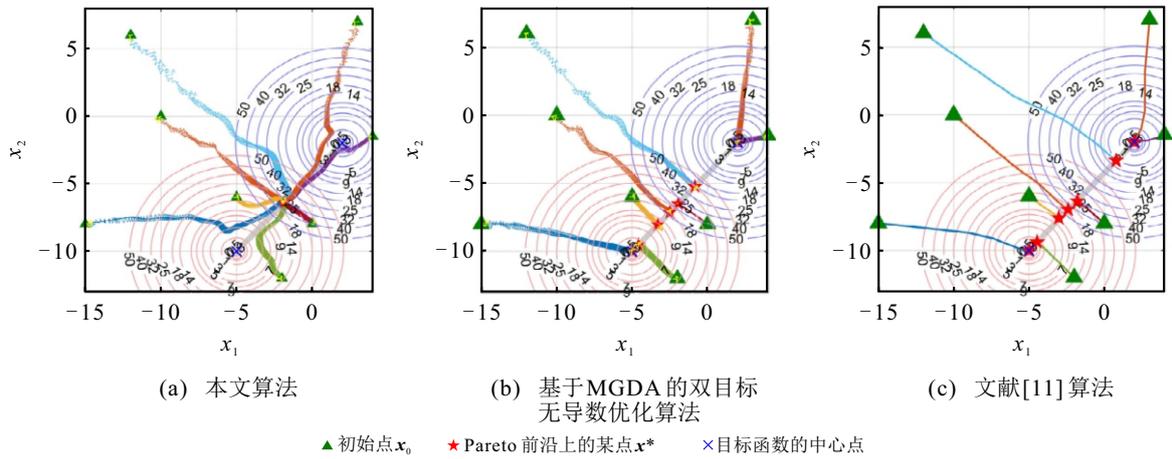


图2 例1 仿真结果.

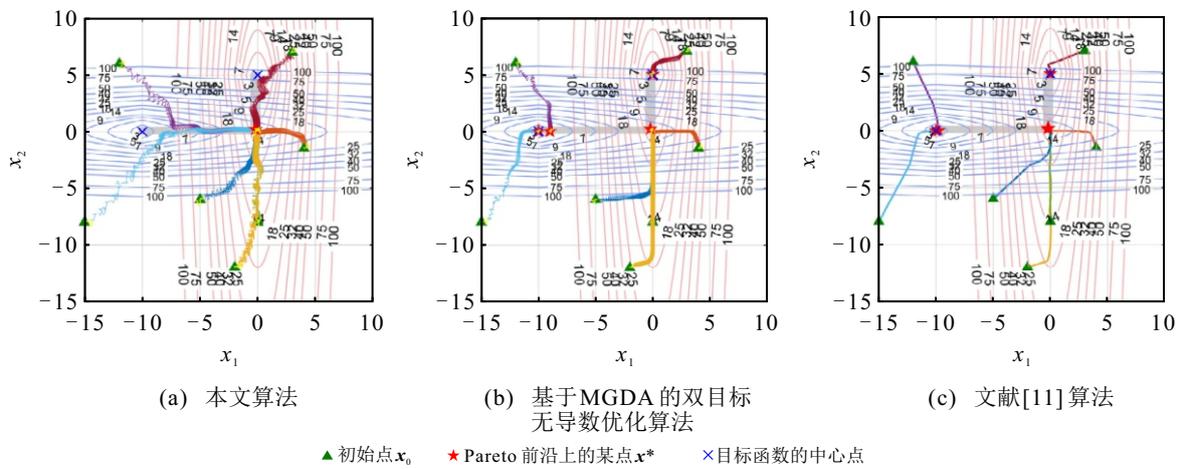


图3 例2 仿真结果.

提出的算法可以避免收敛至 Pareto 前沿的端点, 较好地权衡目标之间的冲突.

### 4.3 例3

针对非凸双目标优化问题, 目标函数 $J_2$ 是非凸的, 且包含多个局部极值点. 目标函数为

$$\begin{cases} J_1(x_1, x_2) = (x_1 + 5)^2 + (x_2 + 10)^2, \\ J_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + 0.5 \sin(3x_1) \cos(3x_2). \end{cases} \quad (60)$$

算法的参数, 包括梯度生成函数、步长和探索序列等, 均与例1中的设置相同. 仿真结果如图4所示, 灰色的区域代表 Pareto 最优解集, Pareto 最优解集的形状是非凸的. 可以看出, 所提出的算法可以防止过度优化某个目标, 更好地权衡目标之间的冲突. 然而, 当初始位置离某目标函数的中心点很近时, 基于MGDA的双目标无导数优化算法和双目标无导数优化算法<sup>[11]</sup>会收敛到 Pareto 最优解集的端点.

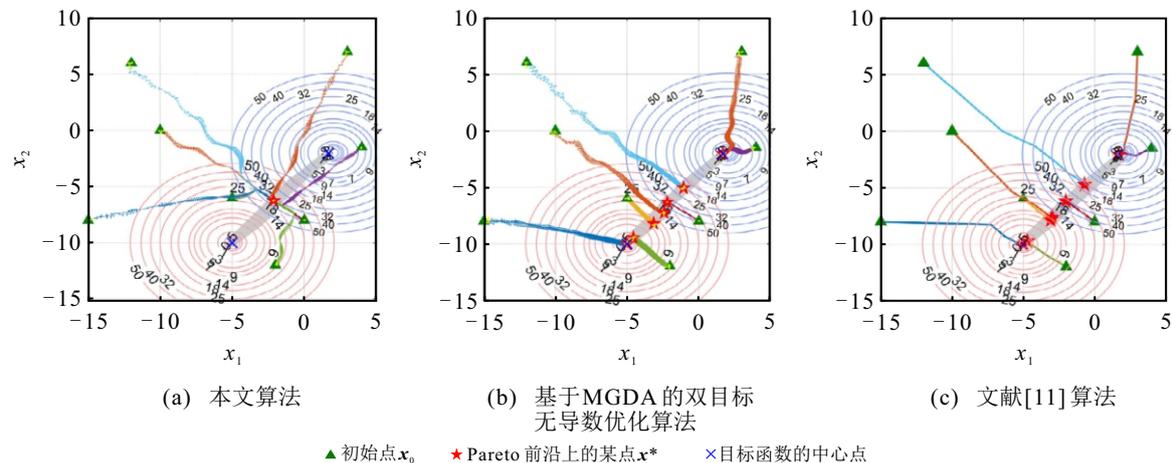


图4 例3 仿真结果.

## 4.4 例4

针对更高维度的双目标优化问题, 目标函数为

$$\begin{cases} J_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 10)^2 + \\ \quad (x_3 - 5)^2 + (x_4 - 10)^2, \\ J_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \\ \quad (x_3 + 2)^2 + (x_4 - 2)^2. \end{cases} \quad (61)$$

探索序列矩阵  $\mathbf{T}_d$  如式 (37) 所示, 式中  $\mathbf{Q}$  取

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

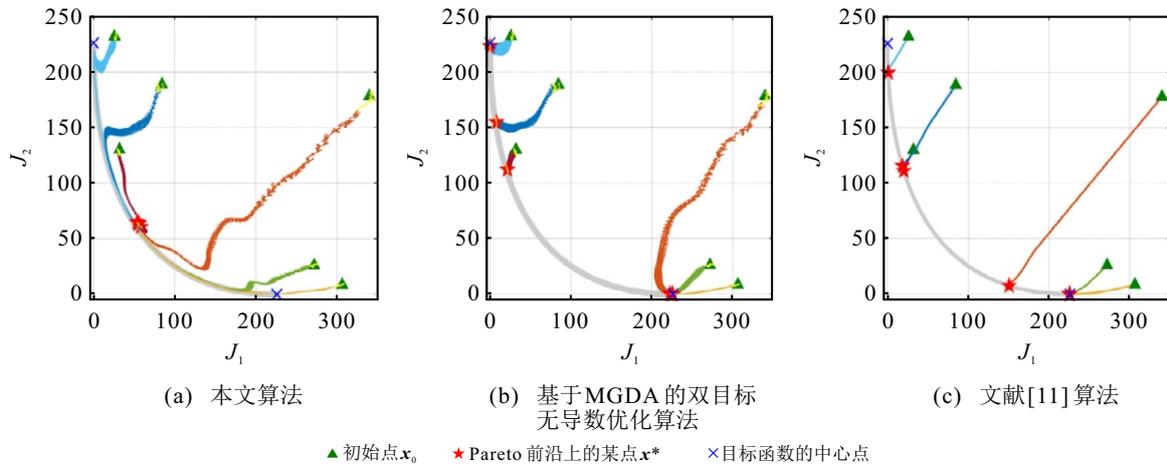


图5 例4 仿真结果.

**注5** 以上各算例中若  $\lambda$  的取值过小, 则本文所提冲突校正算法的冲突校正力度减弱, 因此各算例中参数  $\lambda$  的取值范围为  $0.3 \leq \lambda \leq 0.5$ . 此外, 各算例中参数  $\kappa$  的取值范围为  $1 \leq \kappa \leq 100$ , 以保证算法可靠的性能表现.

## 5 结论

本文提出了一种基于非交换映射的双目标无导数优化算法, 该算法克服了传统多梯度下降算法对精确梯度信息的依赖, 为梯度缺失场景下的优化提供了新的技术路径. 针对双目标间的冲突问题, 设计了一种基于修正代价函数的动态冲突校正策略, 自适应地平衡目标间的冲突. 数值仿真结果表明, 所提出的算法在目标权衡性能方面优于其他双目标无导数优化算法, 验证了其处理梯度缺失问题的有效性与优越性. 本研究的理论贡献在于严格证明了算法的稳定性, 在无导数优化领域具有一定理论研究价值. 未来的研究工作将从以下方面展开: 将本算法的理论框架推广到多目标优化问题和非凸、非光滑目标函数, 结合具体的工程应用场景开展实证研究.

则探索序列长度为  $m = 48$ . 算法的所有其他参数均与例1中的设置相同. Pareto 前沿满足

$$J_2 = (\sqrt{226} - \sqrt{J_1})^2, \quad J_1 \in [0, 226].$$

仿真结果如图5所示, 其中包含了不同的初始值, 灰色的线代表 Pareto 前沿. 本文将所提出的双目标无导数优化算法与其他双目标无导数优化算法进行对比. 可以观察到, 所提出的算法可以有效权衡目标之间的冲突, 而基于 MGDA 的双目标无导数优化算法和双目标无导数优化算法<sup>[11]</sup> 存在优化结果对初始点依赖性强的问题, 导致在某些初始点对某一目标过度优化.

## 参考文献 (References)

- [1] 黄启灿, 胡淑娟, 邱春雨, 等. 基于无导数优化方法的数值模式误差估计[J]. 物理学报, 2014, 63(14): 439-449.  
(Huang Q C, Hu S J, Qiu C Y, et al. Numerical model error estimation by derivative-free optimization method[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(14): 439-449.)
- [2] 卢晓宁, 刘红卫, 杨善学, 等. 带一般约束无导数优化问题的改进信赖域算法[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2018, 56(2): 273-280.  
(Lu X N, Liu H W, Yang S X, et al. Improved trust-region derivative-free algorithm for general constrained optimization problems[J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2018, 56(2): 273-280.)
- [3] Poveda J I, Li N. Robust hybrid zero-order optimization algorithms with acceleration via averaging in time[J]. Automatica, 2021, 123: 109361.
- [4] Gorbunov E, Dvurechensky P, Gasnikov A. An accelerated method for derivative-free smooth stochastic convex optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2022, 32(2): 1210-1238.
- [5] Feiling J, Belabbas M A, Ebenbauer C. Gradient approximation and multivariable derivative-free optimization based on noncommutative maps[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(12): 6381-

- 6396.
- [6] Désidéri J A. Multiple-gradient descent algorithm (MGDA) for multiobjective optimization[J]. *Comptes Rendus Mathématique*, 2012, 350(5/6): 313-318.
- [7] Kumar D, Gans N, Rotea M A. Multi-objective logarithmic extremum seeking for wind turbine power capture with load reduction[C]. American Control Conference. New Orleans, 2021: 533-538.
- [8] 张丽园, 刘建昌, 刘圆超, 等. 基于自适应响应选择的动态多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(12): 3689-3703.  
(Zhang L Y, Liu J C, Liu Y C, et al. A dynamic multi-objective optimization algorithm based on adaptive response selection[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(12): 3689-3703.)
- [9] 王飞梦, 孙靖, 戴红伟. 区间约束违反度引导的区间约束多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 4083-4092.  
(Wang F M, Sun J, Dai H W. An interval constraint violation degree guided interval constrained multi-objective evolutionary algorithm[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(12): 4083-4092.)
- [10] Ryu J H, Kim S. A derivative-free trust-region method for biobjective optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2014, 24(1): 334-362.
- [11] Chen R, Li Y Z, Sun X M, et al. Multiobjective optimization for turbofan engine using gradient-free method[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, 54(7): 4345-4357.
- [12] Chu M H, Huo X, Ma K M. Conflict-averse multi-objective extremum seeking and its application in wastewater treatment processes[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, 22: 13175-13186.
- [13] Xiao P Y, Ban H, Ji K Y. Direction-oriented multi-objective learning: Simple and provable stochastic algorithms[C]. *Advances in Neural Information Processing Systems*. New Orleans, 2023: 4509-4533.
- [14] Guay M, Dochain D. A multi-objective extremum-seeking controller design technique[J]. *International Journal of Control*, 2015, 88(1): 38-53.

### 作者简介

褚明慧 (1995-), 女, 博士生, 主要研究方向为无导数优化、极值搜索, E-mail: [minghuichu@stu.hit.edu.cn](mailto:minghuichu@stu.hit.edu.cn);

霍鑫 (1981-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为数据驱动控制、模式识别与故障诊断, E-mail: [huoxin@hit.edu.cn](mailto:huoxin@hit.edu.cn).