

# 非等阶离散非线性灰色多变量预测模型及应用

党耀国<sup>†</sup>, 周心炎, 王俊杰, 许泽东, 尹凤凤

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

**摘要:** 为进一步提高含分数阶的灰色多变量预测模型的拟合预测精度, 提出一种新的非等阶离散非线性灰色多变量预测模型 (DLFDGM). 该模型通过两项核心设计实现突破: 为系统特征序列与各影响因素序列分别配置独立的分数阶累加阶数, 使模型能根据驱动项各自的数据波动性与记忆性特征自适应优化处理; 引入幂函数形式的非线性项  $\beta k^\delta$ , 以刻画驱动因素对预测结果影响的边际效应递减或规模加速等非线性动力学规律. 对该模型的建模机理、参数估计、递推时间响应式等进行研究, 并讨论模型参数几种特殊取值下的退化性质. 最后将该模型应用于江苏省港口货物吞吐量的预测问题中, 结果显示: 拟合精度为 1.05%, 预测精度为 1.91%, 所提模型拟合和预测的精度均显著优于对比模型.

**关键词:** 分数阶累加; 离散灰色预测模型; 非线性函数; 港口货物吞吐量预测

中图分类号: N941.5 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2025.1354

引用格式: 党耀国, 周心炎, 王俊杰, 等. 非等阶离散非线性灰色多变量预测模型及应用 [J]. 控制与决策.

## Non-equal-order discrete nonlinear grey multivariable prediction model and its application

DANG Yao-guo<sup>†</sup>, ZHOU Xin-yan, WANG Jun-jie, XU Ze-dong, YIN Feng-feng

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** To further improve the fitting and forecasting accuracy of high-order grey multivariable prediction models, this paper proposes a novel non-uniform fractional-order nonlinear grey multivariable prediction model (DLFDGM). This model achieves two key innovations: independent fractional accumulation orders are assigned to the system characteristic sequence and each influencing factor sequence, enabling the model to adaptively optimize data processing according to the distinct fluctuation patterns and memory characteristics of each driving variable; a nonlinear term in the form of an exponential function,  $\beta k^\delta$ , is introduced to capture the marginal diminishing or scale acceleration effects of driving factors on the prediction outcomes, reflecting nonlinear dynamic behaviors. The modeling mechanism, parameter estimation, and time response equations of the proposed model are thoroughly investigated, along with discussions on its degenerative properties under specific parameter settings. The model is then applied to predict the cargo throughput of ports in Jiangsu Province, yielding a fitting accuracy of 1.05% and a forecasting accuracy of 1.91%. The results demonstrate that both fitting and prediction performance of the proposed model significantly outperform those of comparative models.

**Keywords:** fractional order; discrete grey prediction model; particle swarm optimization algorithm; freight volume prediction

## 0 引言

GM(1,N) 模型是经典的灰色多变量预测模型, 能反映相关影响因素对系统运行行为的影响<sup>[1]</sup>. 为了提高 GM(1,N) 模型的预测性能, 文献 [2] 将欧勒多

项式引入模型中, 提出了一种新的模型. 文献 [3] 提出了一种新型的 AGMC(1,N) 多变量灰色模型. 由于 GM(1,N) 模型结构简单且缺乏非线性结构, 无法为非线性系统实现令人满意的结果. 因此, 研究人员

收稿日期: 2025-12-30; 录用日期: 2026-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (72271120, 72571136, 72001107); 教育部人文社会科学研究一般项目规划基金项目 (24YJA630087); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目 (KYCX25\_0647).

责任编辑: 董久祥.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: iamdangy@163.com

提出了许多提升性能的非线性灰模型. 文献 [4] 提出可解释累积和算子并明晰其物理意义, 由此改进非线性灰色 Bernoulli 模型, 强化非线性拟合能力. 文献 [5] 提出季节性混频灰色预测模型 SMFGM(1,N), 同时增设非线性项刻画时间因素的非线性作用. 文献 [6] 结合双参数变权缓冲算子构建 AGRM(1,1) 模型, 强化对非线性波动数据的拟合预测能力. 然而连续灰色模型经常受到其微分方程和差分方程不匹配的影响, 这会导致模型转换过程中的精度误差<sup>[7]</sup>. 为了解决这个问题, 文献 [8] 提出了离散多变量灰色模型 DGM(1,N). 在过去的几十年里, DGM(1,N) 模型引发了广泛的学术关注, 并且从不同的角度开发了各种创新模型. 文献 [9] 提出离散 FPDGM(1,1,N) 模型, 通过分数阶多项式生成更贴合实际的时间响应序列. 文献 [10] 将灰度指数纳入 DGM(1,N) 模型, 提出了一个新构建的离散灰度预测模型. 文献 [11] 提出了不等累积以有效利用数据的差分信息, 建立了不等相邻离散灰色模型. 文献 [12] 考虑了冲击和累积时滞效应, 提出了一种新的离散灰色多变量预测模型. 文献 [13] 考虑到政策冲击对新能源汽车销量的影响, 提出了含政策影响的新离散灰色预测模型. 然而研究发现, 传统的 1 阶累加 (1-AGO) 并不能完全体现在非平稳数据集中强调新信息的原则<sup>[14]</sup>. 为了解决这个问题, 文献 [15] 在灰色模型中引入了分数阶累积生成运算 (FAGO), 阐明了 1-AGO 确实是 FAGO 的一个特例. 通过严格的数学证明和大量的数值实验, FAGO 已被证实是一种可以减少传统灰色模型误差的方法<sup>[16]</sup>. 文献 [17] 对 FAGO 及其逆算子的定义进行了系统研究, 并结合粒子群优化算法求解变量的分数阶, 将灰色预测模型从 1-AGO 扩展到 FAGO, 丰富了多变量灰色预测模型的基础理论. 文献 [18] 建立了一个分数阶累积灰色卷积积分模型, 该模型通过在 GMC(1,N) 中将一阶累加改为分数阶累加来提高预测性能. 文献 [19] 在互逆的分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的基础上, 建立分数阶算子 GM(1,1) 模型. 文献 [20] 针对 GM(1,1) 幂模型时间响应式由离散估计到连续预测所存在的固有误差, 建立离散灰色 GM(1,1) 幂模型, 并将该模型扩展为分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型. 文献 [21] 基于矩阵扰动理论, 研究利用累积法估计 GM(1,1) 模型参数时解的稳定性问题. 此外, 文献 [22] 将 FAGO 与 NGBM(1,1) 联系起来, 构建了一种新型的分数阶灰色模型, 并通过实证分析验证了提出的改进灰色模型的有效性. 在此基础上, 又有学者们将分数阶数从“正实数域”扩展到“全体实数域”, 构造了一系列灰色预测模型. 文献 [23] 提出分数阶

离散灰色模型 (FDGM). 文献 [24] 针对传统灰色模型对复杂非线性指数序列的适配局限, 构建分数阶多项式驱动的自适应灰色预测模型 GMFP(1,1,N), 通过非整数阶指数多项式函数提升模型非线性适应性. 文献 [25] 提出了一种新的可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型. 文献 [26] 提出了一种新的结构自适应分数阶离散灰色预测模型. 文献 [27] 引入了一种新的分数级自适应灰色切比雪夫多项式伯努利模型. 文献 [28] 提出了一种混合累积方法, 将分数阶累积和新信息优先积累技术相结合, 为两者分配权重, 并开发了混合累积灰色模型 (HAGM). 文献 [29] 将实数域灰色生成算子引入 NGM(1,N) 模型, 建立了新的多维灰色预测模型.

上述研究在很大程度上改善了传统灰色预测模型的模拟和预测性能. 然而, 现有模型大多对系统项和驱动项采用相同的分数阶数进行处理, 忽视了多源驱动变量内在动力学特征的异质性. 文献 [30] 的研究表明, 在实际经济系统中, 不同驱动变量往往具有不同的数据生成机理和演化规律. 文献 [31] 认为对多源异构数据采用统一分数阶处理, 会导致部分变量的特征信息过度平滑, 而另一些变量的噪声却被放大, 最终降低整体预测精度. 例如, GDP 数据通常呈现较为稳定的增长趋势, 具有较强的长期记忆性; 而进出口总额数据则受国际贸易环境、政策调整等外部因素影响, 表现出高频波动与阶段性特征; 固定资产投资数据可能呈现政策驱动的脉冲式增长模式. 文献 [32] 指出当具有不同时间序列特性的变量被采用相同的分数阶进行信息提取时, 模型无法同时优化捕捉各类变量的本质特征, 导致信息失真和预测偏差. 此外, 现实世界的经济系统普遍具有非线性动态特性, 而传统的线性模型难以有效捕捉变量间复杂的非线性交互关系.

基于上述情况, 考虑在传统灰色分数阶累加模型基础上, 引入非等阶分数阶和非线性函数, 提出一个新的非等阶离散非线性灰色多变量预测模型. 该模型针对系统项与驱动项的差异化数据特征匹配对应阶数, 既充分考量驱动项数据变化的影响、适配系统的不确定性, 又通过引入非线性函数将模型拓展为非线性预测模型, 满足建模对象的非线性要求. 最后将所提模型应用于江苏省的港口货物吞吐量预测案例中, 取得了良好的预测结果.

## 1 模型构建

### 1.1 DLFDM 模型建立与求解

本文以传统的灰色离散分数阶累加模型为基础, 对系统项和驱动项的分数阶数进行差异性设计, 并引入非线性函数, 构建了非等阶离散非线性灰色多

变量预测模型 DLFDM.

**定义 1**<sup>[33]</sup> 设原始序列  $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ , 灰色生成算子的阶数  $r \in R$ ,  $X_R^{(r)} = (x_R^{(r)}(1), x_R^{(r)}(2), \dots, x_R^{(r)}(n))$ , 其中,

$$x_R^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma(k+r-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i),$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

则称公式 (1) 为序列  $X^{(0)}$  的  $r$  阶实数域灰色生成算子, 简称为  $r$ -RGO( $r$ -order real number field generation operator); 称  $x_R^{(r)}$  为原始序列  $X^{(0)}$  的  $r$ -RGO 生成新序列.

**定义 2** 设  $X_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n))$  为系统行为序列, 影响因素序列为  $X_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n))$ ,  $X_i^{(0)}$  的  $r_i$  阶累加生成序列为  $X_i^{(r_i)} = (x_i^{(r_i)}(1), x_i^{(r_i)}(2), \dots, x_i^{(r_i)}(n))$ ,  $r_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$ , 则称

$$x_1^{(r_1)}(k) + \beta_1 x_1^{(r_1)}(k-1) = \sum_{i=2}^N \beta_i x_i^{(r_i)}(k) + \beta_{N+1} k^\delta + \beta_{N+2} \quad (2)$$

为非等阶离散非线性灰色多变量预测模型, 简称 DLFDM 模型. 其中  $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为分数阶累加阶数,  $\beta_1$  为发展系数,  $\beta_i$  为驱动系数,  $\beta_i x_i^{(r_i)}(k)$  为驱动项,  $\beta_{N+1} k^\delta$  为非线性修正项,  $\beta_{N+2}$  为灰色作用量.

非线性修正项通常用于描述系统发展系数的非线性变化规律. 幂函数形式  $k^\delta$  具有极强的单调性调节能力. 当  $\delta = 1$  时, 退化为线性关系, 对应经典灰色模型; 当  $\delta > 1$  时, 表示系统呈现加速增长, 适用于描述爆发性增长的数据; 当  $0 < \delta < 1$  时, 表示系统呈现减速增长, 适用于描述受资源限制的饱和增长. 因此, 引入幂函数  $k^\delta$  能够灵活刻画预测结果受驱动因素影响时存在的“边际效应递减”或“规模效应”等非线性动力学特征, 这是线性模型无法捕捉的. 相比于指数函数  $e^x$ , 幂函数在处理正定数据时数值稳定性更好, 不易出现数值溢出, 且参数  $\delta$  的阶数更直观. 相比于高阶多项式  $x^2, x^3$ , 幂函数通过参数  $\delta$  的连续变化能涵盖更广泛的非线性形态, 且不会引入过多的震荡, 更适合小样本预测.

**定理 1** 设序列  $X_1^{(0)}, X_i^{(0)}, X_i^{(n)}$  如定义 2 所述, 序列  $X_1^{(r_1)}$  为  $X_1^{(0)}$  的  $r_1$  阶累加生成序列,  $X_i^{(r_i)}$  为影响因素序列的  $r_i$  阶累加生成序列, 则参数列  $\hat{\mathbf{P}} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N+2}]^T$  的参数估计满足:

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}, \quad (3)$$

其中:

$\mathbf{B} =$

$$\begin{bmatrix} -x_1^{(r_1)}(1) & x_2^{(r_2)}(2) & \dots & x_N^{(r_N)}(2) & 2^\delta & 1 \\ -x_1^{(r_1)}(2) & x_2^{(r_2)}(3) & \dots & x_N^{(r_N)}(3) & 3^\delta & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_1^{(r_1)}(n-1) & x_2^{(r_2)}(n) & \dots & x_N^{(r_N)}(n) & n^\delta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [x_1^{(r_1)}(2), x_1^{(r_1)}(3), \dots, x_1^{(r_1)}(n)]^T.$$

**证明** 根据最小二乘法,

$$\mathbf{S} = \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}}\|^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}}), \quad (4)$$

当  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = 0$  且  $\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \hat{\mathbf{P}}^2}$  为正定矩阵时, 误差平方和  $\mathbf{S}$  取最小值.

根据公式 (4), 得到

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \frac{\partial [(\mathbf{Y} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}})]}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = -2\mathbf{B}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \hat{\mathbf{P}}^2} = 2\mathbf{B}^T \mathbf{B}.$$

显然矩阵  $\mathbf{B}$  为列满秩矩阵, 并且  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  是对称矩阵, 根据正定矩阵的充分必要条件, 可得  $\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \hat{\mathbf{P}}^2}$  为正定矩阵. 因此, 当  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = 0$  时,  $\mathbf{S}$  取得最小值. 此时:  $\mathbf{B}^T \mathbf{Y} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}\hat{\mathbf{P}}$ , 化简可得:  $\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}$ .

定理得证.

**定理 2** DLFDM 模型如定义 2 所述, 则当  $k = 2, \dots, n$  时, DLFDM 模型的时间响应式:

$$\hat{x}_1^{(r_1)}(k) = (-\beta_1)^{k-1} x_1^{(r_1)}(1) + \sum_{j=2}^k (-1)^j \beta_1^{k-j} \sum_{i=2}^k \beta_i x_i^{(r_i)}(i) + \beta_{N+1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \beta_1^{j-1} (k-j+1)^\delta + \beta_{N+2} \frac{1 - (-\beta_1)^{k-1}}{1 + \beta_1}. \quad (5)$$

DLFDM 模型的最终还原式:

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma(k-r_1-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(-r_1)} \hat{x}_1^{(r_1)}(i), \quad (6)$$

注:  $\hat{x}_1^{(r_1)}(1) = x_1^{(0)}(1), \hat{x}_1^{(0)}(1) = x_1^{(0)}(1)$ .

**证明** 当  $k = 2$  时, 根据式 (2)、式 (5) 可得:

$$\hat{x}_1^{(r_1)}(2) = (-\beta_1)^{2-1} x_1^{(r_1)}(1) + \sum_{j=2}^k (-1)^j \beta_1^{2-j} \sum_{i=2}^k \beta_i x_i^{(r_i)}(i) + \beta_{N+1} \sum_{j=1}^{2-1} (-1)^{j+1} \beta_1^{j-1} (2-j+1)^\delta + \beta_{N+2} \frac{1 - (-\beta_1)^{2-1}}{1 + \beta_1}. \quad (7)$$

假设  $k = m$  时, 式 (5) 也成立, 可得:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(r_1)}(m) = & (-\beta_1)^{m-1} x_1^{(r_1)}(1) + \\ & \sum_{j=2}^k (-1)^j \beta_1^{m-j} \sum_{i=2}^k \beta_1 x_i^{(r_i)}(i) + \\ & \beta_{N+1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \beta_1^{j-1} (m-j+1)^\delta + \\ & \beta_{N+2} \frac{1 - (-\beta_1)^{m-1}}{1 + \beta_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(2),当 $k = m + 1$ 时,可得

$$\begin{aligned} x_1^{(r_1)}(m+1) + \beta_1 x_1^{(r_1)}(m) = & \sum_{i=2}^N \beta_i x_i^{(r_i)}(m+1) + \\ & \beta_{N+1} (m+1)^\delta + \beta_{N+2}. \end{aligned} \quad (9)$$

将式(8)代入式(9),可得:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(r_1)}(m+1) = & (-\beta_1)^{m+1-1} x_1^{(r_1)}(1) + \\ & \sum_{j=2}^k (-1)^j \beta_1^{m+1-j} \sum_{i=2}^k \beta_i x_i^{(r_i)}(i) + \\ & \beta_{N+1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \beta_1^{j-1} (m+1-j+1)^\delta + \\ & \beta_{N+2} \frac{1 - (-\beta_1)^{m+1-1}}{1 + \beta_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

定理得证.

## 1.2 超参数求解

本节介绍DLFDGM模型的参数优化.累加阶数 $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和非线性参数 $\delta$ 对于模型的拟合和预测效果至关重要.为了计算最优参数,本文选取粒子群智能算法,将平均绝对百分比误差作为评估模型精度的指标,算法详细参数设置如表1所示.建立如下约束优化问题:

$$\min f(r_i, \delta) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left| \frac{\hat{x}_1^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right|, \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{x}_1^{(r_1)}(k) = (-\beta_1)^{k-1} x_1^{(r_1)}(1) + \\ \quad \sum_{j=2}^k (-1)^j \beta_1^{k-j} \sum_{i=2}^k \beta_1 x_i^{(r_i)}(i) + \\ \quad \beta_{N+1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \beta_1^{j-1} (k-j+1)^\delta + \\ \quad \beta_{N+2} \frac{1 - (-\beta_1)^{k-1}}{1 + \beta_1}; \\ \hat{x}_1^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma(k+r-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} \hat{x}_1^{(r_1)}(i); \\ k = 2, 3, \dots, m. \end{cases} \quad (12)$$

## 1.3 模型的性质

DLFDGM模型表现出极佳的退化兼容属性,在特定参数设置下可以转化为多个经典灰色预测模型:

表1 粒子群算法参数信息

参数名称	具体设置
粒子种群规模	100
最大迭代次数	150
惯性权重	0.9线性递减至0.4
学习因子	C1=2.0, C2=2.0
参数维数	5
参数搜索范围	[-5, 5]

**性质1** 当 $N = 1, r_1 = 1, \delta = 0$ 时,DLFDGM模型退化为DGM(1,1)模型,该模型的基本形式为 $x_1^{(1)}(k) + \beta_1 x_1^{(1)}(k-1) = \beta_2$ ;

**性质2** 当 $N = 1, r_1 = 1, \delta = 1$ 时,DLFDGM模型退化为NDGM(1,1)模型,该模型的基本形式为 $x_1^{(1)}(k) + \beta_1 x_1^{(1)}(k-1) = \beta_2 k + \beta_3$ ;

**性质3** 当 $N = 1, r_1 = -1$ 时,DLFDGM模型退化为DPGM模型,该模型的基本形式为 $x_1^{(1)}(k) + \beta_1 x_1^{(1)}(k-1) = \beta_2 k^\gamma + \beta_3$ ;

**性质4** 当 $N > 1, r_i = r, \delta = 0$ 时,DLFDGM模型退化为CFDGM(1,N)模型,该模型的基本形式为 $x_1^{(r)}(k) + \beta_1 x_1^{(r)}(k-1) = \sum_{i=2}^N \beta_i x_i^{(r)}(k) + \mu$ ;

**性质5** 当 $N > 1, r_1 = 1, \delta = 0$ 时,DLFDGM模型退化为DGM(1,N)模型,该模型的基本形式为 $x_1^{(1)}(k) + \beta_1 x_1^{(1)}(k-1) = \sum_{i=2}^N \beta_i x_i^{(r)}(k) + \beta_{N+1}$ .

上述5种模型均为DLFDGM模型的拓展形式,可通过对DLFDGM模型进行参数调整直接推导得出,充分印证了所提模型的广泛适用性.该模型既保留了传统灰色模型在小样本、不完全信息场景下的核心优势,又显著提升了对非线性数据的适配能力与处理精度.针对复杂、多变量、非线性系统的动态预测任务,其优势尤为突出.同时,DLFDGM模型具备自适应特性,能够实时调整累加阶数以响应系统动态变化,可直接应用于各类实时监控与预测场景.

## 1.4 模型评估准则及建模步骤

本文选取绝对百分比误差、平均绝对百分比误差和均方根误差三个评估标准来检验模型的建模效果,三个指标均是数值越低,精度越高,并给出如表2所示的MAPE精度检验标准.三个评估准则的具体计算公式如下:

表2 MAPE的精度等级

MAPE	< 10%	10% - 20%	20% - 50%	> 50%
等级	优	良	合格	差

(1) 绝对百分比误差 (APE):

$$APE = \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \quad (13)$$

(2) 平均绝对百分比误差 (MAPE):

$$MAPE = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \quad (14)$$

(3) 均方根误差 (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n (\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k))^2} \quad (15)$$

其中  $\hat{x}^{(0)}(k)$  表示估计数据,  $x^{(0)}(k)$  表示真实数据.

结合上述推导过程, 总结 DLFDM 模型的建模步骤并绘制如图 1 所示的步骤流程图:

步骤 1: 选取数据. 确定系统行为序列  $X_1^{(0)} =$

$(x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n))$ , 通过灰色关联方法筛选主要影响因素, 确定影响因素序列  $X_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n))$ , 并建立 DLFDM 模型.

步骤 2: 参数寻优. 建立平均绝对百分比误差最小的目标函数, 并基于粒子群智能算法求解最优分数阶数  $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和最优非线性参数  $\delta$ .

步骤 3: 结构参数估计. 将最优参数带入建立的模型并通过最小二乘法求解得到结构参数  $\hat{P}$ .

步骤 4: 拟合和模型性能评估. 根据公式 (6) 计算模型的拟合值, 并根据公式 (13-15) 评估模型的精度.

步骤 5: 预测系统行为序列. 对江苏省港口货物吞吐量进行预测, 并采用消融实验和鲁棒性检验对模型稳定性和准确性进行检验.

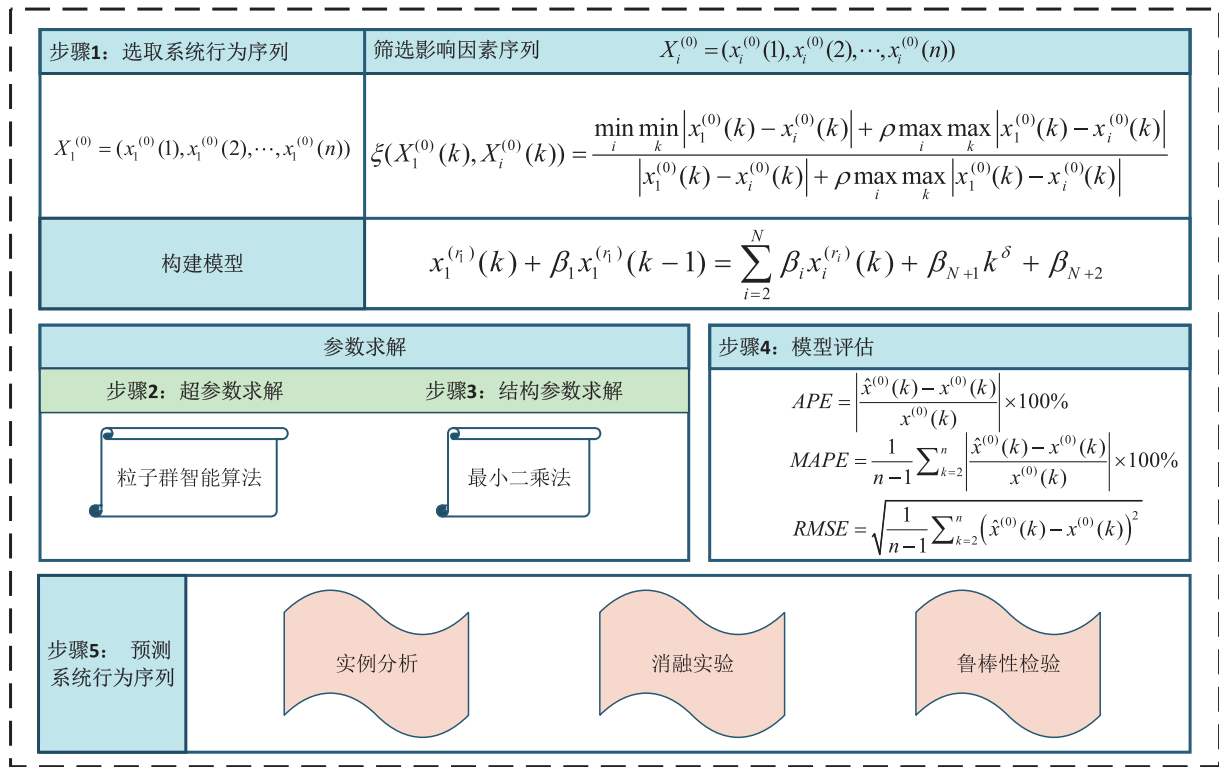


图1 DLFDM 模型步骤流程图

## 2 案例分析

货运作为现代物流体系的核心环节, 其重要性不言而喻, 是保障国民经济持续健康发展的重要支撑, 也是连接区域间经济交流的关键纽带. 因此准确把握货运量的未来发展态势, 对于完善区域交通基础设施规划、优化物流资源配置、保障产业链供应链稳定具有重要现实意义. 但是港口货运数据易受到各种不确定因素影响, 本文对江苏省港口货物吞吐量进行分析和预测以验证模型的有效性和适用性, 所用原始数据均来源于:《2024 年中国统计年鉴》. 选取 2004 年至 2023 年期间江苏省年度港口货物吞吐

量数据作为数据集.

### 2.1 影响因素筛选

如表 3 所示, 由于影响港口货物吞吐量的因素较多, 因此需要计算各影响因素与系统变量之间的灰色关联度并进行排序以筛选主要影响因素, 并作为 DLFDM 模型的驱动项. 江苏省港口货物吞吐量数据为系统变量  $X_1^{(0)}$ , 将表 3 中的影响因素指标设定为  $X_i^{(0)}$ ,  $i = 2, 3, 4, \dots, 7$ , 使用灰色关联度  $\xi(X_1^{(0)}, X_i^{(0)}) (i = 2, 3, \dots, 7)$  计算  $X_1^{(0)}$  和  $X_i^{(0)}$  的关联程度<sup>[34]</sup>.

$$\xi(X_1^{(0)}(k), X_i^{(0)}(k)) = (\min_i \min_k |x_1^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)| + \rho \max_i \max_k |x_1^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)|) / (|x_1^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)| + \rho \max_i \max_k |x_1^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)|), \quad (16)$$

$$\xi(X_1^{(0)}, X_i^{(0)}) = \frac{1}{n} \xi(X_1^{(0)}(k), X_i^{(0)}(k)), \quad (17)$$

其中,  $\rho$ 称为分辨系数, 通常取 $\rho = 0.5$ ,  $\xi(X_1^{(0)}(k), X_i^{(0)}(k))$ 为 $X_1^{(0)}$ 与 $X_i^{(0)}$ 在 $K$ 点的灰色关联系数. 利用公式(16)可以计算灰色关联系数, 根据公式(17)可计算 $X_1^{(0)}$ 与 $X_i^{(0)}$ 的灰色关联度. 通常灰色关

表3 江苏省货运量影响因素指标

影响因素指标	简化符号	指标单位
GDP	$X_2$	亿元
人均GDP	$X_3$	元
人均可支配收入	$X_4$	元
固定资产投资	$X_5$	亿元
进出口总额	$X_6$	亿美元
码头泊位	$X_7$	个

联度越大, 表示序列间的关联性越强.

根据表4可知, 影响因素与港口货物吞吐量关联度顺序为 $X_6 > X_4 > X_3 > X_2 > X_5 > X_7$ . 将关联度阈值设定为0.80, 则选定进出口总额 $X_6$ 、人均可支配收入 $X_4$ 、人均GDP $X_3$ 为主要影响因素.

表4  $X_1^{(0)}$ 与 $X_i^{(0)}$ 的灰色关联度

关联度	$\xi(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$	$\xi(X_1^{(0)}, X_3^{(0)})$	$\xi(X_1^{(0)}, X_4^{(0)})$	$\xi(X_1^{(0)}, X_5^{(0)})$	$\xi(X_1^{(0)}, X_6^{(0)})$	$\xi(X_1^{(0)}, X_7^{(0)})$
数值	0.7462	0.8107	0.8699	0.6234	0.8744	0.5794

## 2.2 江苏省港口货物吞吐量预测

选取的是江苏省2004年至2023年的港口货物吞吐量年度数据进行案例分析, 利用2004年至2019年数据构建模型, 2020年至2023年数据用于检验模型预测性能.

为了验证模型的有效性, 选取灰色模型FMGM、SGM和VCFNDGM, 机器学习模型BPNN, 统计学模型ARIMA模型来进行综合比较. FMGM是传统等阶分数阶模型, SGM是非等阶分数阶连续模型, VCFNDGM是一致分数阶非线性离散模型, 与灰色预测模型对比能够更直观地展现本文模型在预测精度、适应性等方面的提升, 验证本文所引入的非

等阶分数阶与非线性修正项对灰色模型性能的提升作用; BPNN是人工智能领域中最广泛应用的非线性预测模型之一, ARIMA是时间序列预测领域的经典线性模型, 与之对比可以验证本文所提非等阶分数阶灰色模型在非线性和刻画上的优势, 同时凸显本文模型“小样本建模”的独特价值. 对比模型覆盖机器学习、统计、灰色预测三大类方法, 确保实验对比的全面性与客观性.

模型求解的参数如表5所示, 将得到的参数带入到DLFDGM模型中可以得到表达式:  $x_1^{(1.69)}(k) + 0.28x_1^{(1.69)}(k-1) = 0.08x_2^{(-2.30)}(k) + 10.39x_3^{(1.90)}(k) + 1.39x_4^{(-2.88)}(k) + 6441.66k^{2.26} + 97777.61$ .

表5 模型参数值

参数	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$\delta$
数值	0.28	0.08	10.39	1.39	6441.66	97777.61	1.69	-2.30	1.90	-2.88	2.26

六个模型计算得出的江苏省港口货物吞吐量的拟合和预测数据结果如表5所示.

从表6可以看出DLFDGM模型的APE值低于其他模型且波动较小. 对比其它模型, MAPE和RMSE值在拟合和预测集上效果最好, 分别是1.05%和1.91%, 表明该模型有较强的适用性. 图2描述的是粒子群算法求解DLFDGM模型时适应度函数收敛图以及种群多样性指标变化图. 迭代前期适应度快速下降, 50次左右趋于稳定, 不再波动, 最终找到了稳定的最优解. 同时种群多样性在迭代前期快速下降, 后期维持在较低水平但有小幅波动, 既保证了种

群向最优解聚集, 又避免完全陷入局部最优, 说明所提模型准确性较高, 粒子群算法性能较好.

为了进一步看出所提模型的优越性, 绘制了图3 DLFDGM模型及5个对比模型的MAPE误差图和图4的箱型图. 可以看出, 本文所提模型生成的结果最贴合原始数据的趋势, VCFNDGM模型在拟合和预测阶段均偏差较大. BPNN模型拟合阶段精度较好, 但是预测阶段偏差很大, 可能存在过拟合情况. ARIMA模型预测阶段精度好, 但是拟合阶段偏差较大, 由于该模型不考虑影响因素的变化趋势, 预测精度好可能是偶然现象. FMGM模型在拐点处误差较

表6 江苏省港口货物吞吐量拟合和预测值误差对比

年份	原始值	DLFDGM		FMGM		SGM		VCFNDGM		BPNN		ARIMA	
		预测值	APE(%)	预测值	APE(%)	预测值	APE(%)	预测值	APE(%)	预测值	APE(%)	预测值	APE(%)
2004	63420	63420	0.00	63420	0.00	63420	0.00	63420	0.00	65817	3.78	63484	0.10
2005	75548	75370	0.24	100003	32.37	75493	0.07	58094	23.10	78753	4.24	76472	1.22
2006	86359	86519	0.19	106314	23.11	71110	17.66	80760	6.48	82271	4.73	83606	3.19
2007	72788	72788	0.00	113529	55.97	94931	30.42	81647	12.17	85053	16.85	77772	6.85
2008	116305	116297	0.01	119610	2.84	116603	0.26	72994	37.24	106766	8.20	97483	16.18
2009	132787	132784	0.00	129236	2.61	124665	6.12	129610	2.39	131607	0.89	105003	20.92
2010	158977	160159	0.74	140419	11.67	154506	2.81	146666	7.74	169734	6.77	169011	6.31
2011	180683	177047	2.01	153700	14.93	180211	0.26	176643	2.24	185963	2.92	184826	2.29
2012	195417	200431	2.57	168795	13.62	198827	1.74	202801	3.78	199865	2.28	197026	0.82
2013	213987	212713	0.60	185120	13.49	213987	0.00	219468	2.56	211919	0.97	225128	5.21
2014	226049	224649	0.62	202997	10.20	226686	0.28	238881	5.68	223437	1.16	221948	1.81
2015	233289	233373	0.04	221882	4.89	235830	1.09	245809	5.37	235118	0.78	250055	7.19
2016	241487	238392	1.28	241371	0.05	240005	0.61	247565	2.52	238114	1.40	238617	1.19
2017	256976	254380	1.01	261545	1.78	254918	0.80	248874	3.15	256393	0.23	255941	0.40
2018	258469	270985	4.84	283013	9.50	270308	4.58	255993	0.96	260466	0.77	260562	0.81
2019	283111	278715	1.55	304606	7.59	280643	0.87	258304	8.76	283635	0.19	275180	2.80
拟合	MAPE	<b>1.05%</b>		13.64%		4.51%		8.28%		3.51%		6.15%	
	RMSE	<b>3964</b>		21665		8084		15488		5416		13720	
2020	296553	328258	2.69	328258	10.69	276773	6.67	288315	2.78	296778	0.08	289994	2.21
2021	320836	353032	1.87	353032	10.04	315116	1.78	287439	10.41	277571	13.48	305450	4.80
2022	324327	379835	2.23	379835	17.11	310364	4.31	312206	3.74	289912	10.61	323669	0.20
2023	351138	406930	0.85	406930	15.89	320586	8.70	316527	9.86	360859	2.77	329395	6.19
预测	MAPE	<b>1.91%</b>		13.43%		5.36%		6.70%		6.74%		3.08%	
	RMSE	<b>6341</b>		45375		19700		25140		28066		11933	

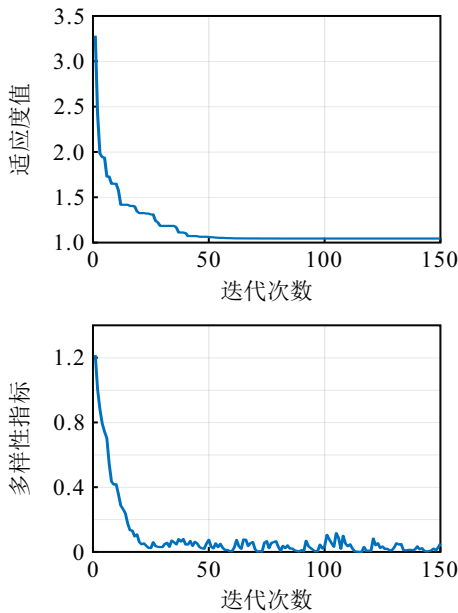


图2 最优适应度值和种群多样性变化图

大,这归因于该模型对不同驱动项采用相同的分数阶处理,而本文模型考虑了驱动项的数据特征对于模型预测的影响,采用了多分数阶去处理数据,可见对于多源异构数据采用非等阶分数阶处理的必要性;DLFDGM模型和SGM模型APE值分布较为集中,但是SGM模型的边界值更大,这是因为连续模型在

模型求解时存在转换误差.

### 2.3 消融实验

本节将构建消融实验对模型优化的必要性进行验证. DLFDGM模型消去 $r_1, r_i$ 和 $\delta$ 项退化为DGM(1, N)模型,简称M1;DLFDGM模型消去 $r_i$ 和 $\delta$ 项退化为CFDGM模型,简称M2,实验结果如表7所示.

由表7数据可见,DLFDGM模型在整体拟合与预测任务中表现最优,其MAPE值在拟合阶段和预测阶段分别仅为1.05%和1.91%,显著低于模型M1和M2的对应值.尽管如此,我们也观察到在个别年份中,退化模型的APE值低于DLFDGM模型,这种现象源于经济数据的复杂波动特性.由于DLFDGM模型通过非等阶分数阶与非线性项增强了整体拟合能力,为了捕捉全局数据特征,在少数特殊节点可能会产生误差.但值得注意的是,这种局部现象并不影响DLFDGM模型的全局优越性——从时间序列整体视角看,该模型在16个拟合年份中有11年表现最佳,特别是对于2007年的数据拐点,DLFDGM模型的APE几乎为零,而M1和M2模型则出现显著偏差;在4个预测年份综合表现最优,且误差分布更为集中.这充分证明,非等阶分数阶机制能够有效适应系统项与驱动项的异质性数据特征,

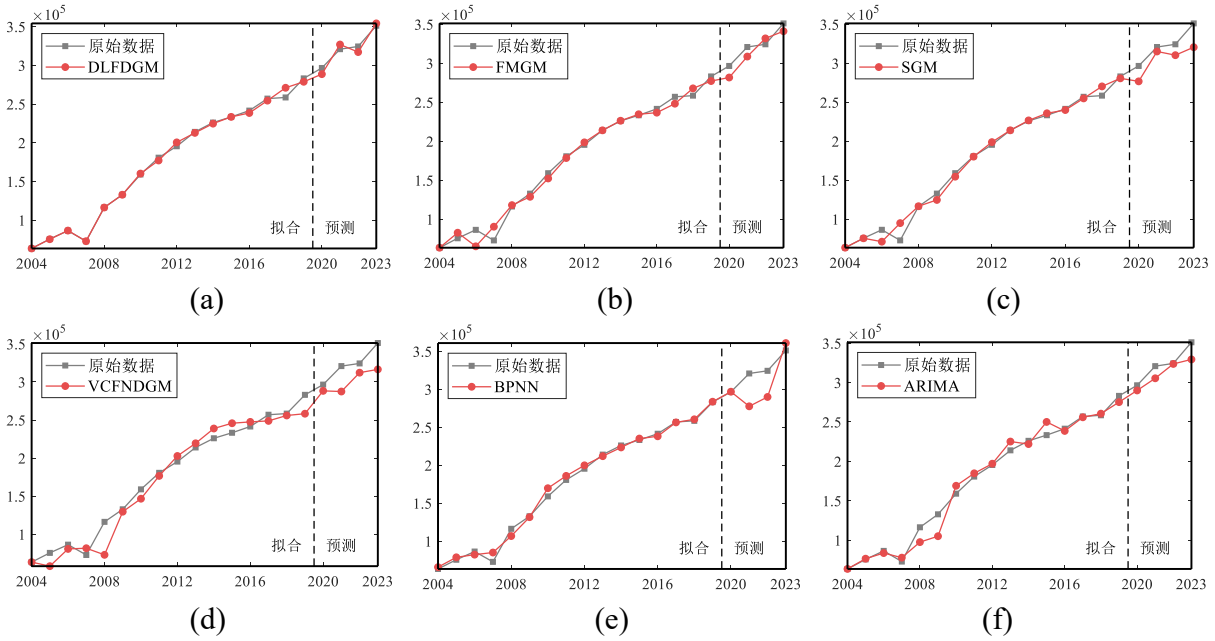


图3 DLFDGM 模型及对比模型 MAPE 误差图

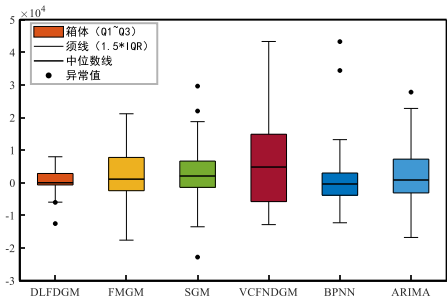


图4 拟合数据与系统数据绝对误差箱型图

而非线性修正项则显著提升了模型对复杂动态系统的捕捉能力. 消融实验的结果不仅验证了本文所提模型各项改进的必要性与有效性, 也揭示了在多变量预测中考虑数据异质性的重要意义.

### 2.4 鲁棒性检验

本文构建的 DLFDGM 模型采用粒子群智能算法求解参数, 但智能算法在应对复杂不确定性、非线性问题时, 可能因最优参数取值存在差异, 导致模型每次运行后的拟合值与预测值不尽相同, 进而影响读者对结果准确性与有效性的认可度. 为此, 本节将从两个角度验证 DLFDGM 模型的可靠性与鲁棒性, 具体内容如下:

(1) 蒙特卡洛仿真模拟: 在蒙特卡洛真实验中, 对 DLFDGM 模型进行 100 次基于粒子群算法的参数寻优, 得到 100 组最优 MAPE 值, 并依据该结果绘制如图 5 所示的最优目标函数值的频数分布图. 由图 5 可知, DLFDGM 模型的最优 MAPE 值波动范围仅为 [1.05%, 1.13%], 其中 78 次实验结果均为 1.05%; 且 100 次模拟中频数最高的 MAPE 值与表 6 中的对应结果完全一致. 这表明粒子群算法的寻优稳定性

表7 消融实验结果

年份	原始值	M1		M2		DLFDGM	
		预测值	APE(%)	预测值	APE(%)	预测值	APE(%)
2004	63 420	63 420	0.00	63 420	0.00	63 420	0.00
2005	75 548	72 938	3.46	70 299	6.95	75 370	0.24
2006	86 359	78 006	9.67	84 801	1.80	86 519	0.19
2007	72 788	90 242	23.98	101 291	39.16	72 788	0.00
2008	116 305	115 245	0.91	102 731	11.67	116 297	0.01
2009	132 787	128 336	3.35	130 187	1.96	132 784	0.00
2010	158 977	155 763	2.02	157 330	1.04	160 159	0.74
2011	180 683	183 203	1.39	181 690	0.56	177 047	2.01
2012	195 417	199 807	2.25	193 862	0.80	200 431	2.57
2013	213 987	213 632	0.17	206 560	3.47	212 713	0.60
2014	226 049	222 733	1.47	220 793	2.33	224 649	0.62
2015	233 289	231 657	0.70	233 577	0.12	233 373	0.04
2016	241 487	237 852	1.51	240 790	0.29	238 392	1.28
2017	256 976	253 603	1.31	258 557	0.62	254 380	1.01
2018	258 469	271 075	4.88	276 099	6.82	270 985	4.84
2019	283 111	278 140	1.76	273 643	3.34	278 715	1.55
拟合	MAPE		3.92%		5.40%		<b>1.05%</b>
	RMSE		6 634		10 086		<b>3 964</b>
2020	296 553	278 128	6.21	290 304	2.11	288 583	2.69
2021	320 836	306 640	4.42	328 578	2.41	326 849	1.87
2022	324 327	326 527	0.68	344 244	6.14	317 104	2.23
2023	351 138	340 959	2.90	346 866	1.22	354 134	0.85
预测	MAPE		3.55%		2.97%		<b>1.91%</b>
	RMSE		12 742		11 335		<b>6 341</b>

良好, 模型结果波动范围小, 进一步印证了本文模型的准确性与可重复性.

(2) 添加噪声测试模型抗干扰能力: 在数据中添加噪声以检验模型预测稳定性, 核心是通过模拟真实场景中的随机干扰, 测试模型的抗干扰能力. 本节选用通用的高斯噪声模拟连续波动, 高斯噪声原理:

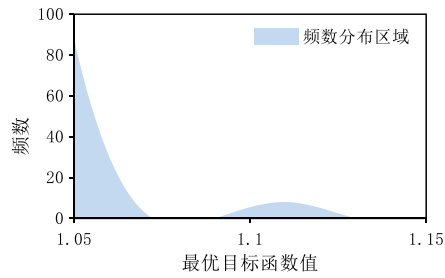


图5 粒子群算法寻优的最优 MAPE 值

在原始数据上叠加服从正态分布的随机值,公式为:带噪声数据=原始数据+ $\varepsilon$ ×原始数据标准差×随机正态变量( $\varepsilon$ 为噪声强度).弱噪声对应的强度系数 $\varepsilon \in [0.02, 0.05]$ ,中噪声对应的强度系数 $\varepsilon \in [0.08, 0.15]$ ,强噪声对应的强度系数 $\varepsilon \in [0.2, 0.3]$ .分别选用弱、中、强噪声组对比无噪声组,每组的噪声加在系统项数据,结果如表8所示:弱噪声和中噪声组的MAPE值发生了轻微波动,拟合和预测的MAPE值都小于5%.无噪声干扰到中等噪声干扰的情况下,模型拟合MAPE值的波动范围为[1.05%-4.93%],预测MAPE值的波动范围为[1.31%-3.36%],两组波动范围均比较小.强噪声组MAPE值波动较大,但是拟合和预测的MAPE值也小于10%,说明了DLFDGM模型具有较强的适用性.

表8 添加噪声下拟合和预测 MAPE 值

噪声等级	MAPE(拟合)	MAPE(预测)
无 $\varepsilon = 0$	1.05%	1.91%
弱 $\varepsilon = 0.03$	3.58%	1.31%
中 $\varepsilon = 0.1$	4.93%	3.36%
强 $\varepsilon = 0.25$	9.67%	6.99%

### 3 结论

本文提出了非等阶离散非线性灰色多变量模型,该模型结合了灰色关联方法去筛选并确定影响因素,然后使用粒子群智能算法求解最优参数增强模型准确性.与传统的等阶分数阶灰色预测模型不同,通过引入非等阶分数阶,即根据系统项与驱动项不同的数据特征生成相应的阶数,可以让模型更好地考虑到驱动项数据特征变化对模型的影响.同时能够更好地适应数据的不确定性特征,并添加了非线性函数将模型拓展为非线性预测模型,进而能够更好地捕捉数据变化的拐点.并且对该模型的建模机理、参数估计、递推时间响应式等进行研究,讨论模型参数几种特殊取值下该模型的性质,并基于上述步骤绘制了建模流程图.研究表明: DGM(1,1)模型、NDGM(1,1)模型、CFDGM(1,N)模型、DPGM模型、DGM(1,N)模型等均是本文所提模型的特殊形式,体

现了模型的兼容性,扩大了灰色预测理论的应用范围.最后,将本文所提模型应用于江苏省的港口货物吞吐量预测问题中,并且将模型拟合和预测的结果与现有灰色分数阶模型、机器模型和统计模型作对比.结果表明,DLFDGM模型在拟合和预测的性能都显著优于其它对比模型,验证了模型的有效性和适用性.

然而,DLFDGM模型虽然在江苏省港口货物吞吐量预测案例中表现出色,但仍存在一定的局限性.城市或者区域的货运量数据可能还受到周围地区的影响,未来的研究可以考虑将空间距离项和经济距离项融合构建一个空间效应项嵌入灰色模型中,弥补当前模型仅关注时间维度、忽略空间关联的不足,提升模型对时空序列数据的适配能力.同时探索空间效应与灰色预测模型的耦合机制,提升模型在复杂时空场景下的应用能力与推广价值.

### 参考文献 (References)

- [1] 刘思峰. 灰色系统理论及其应用[M]. 第10版. 北京: 科学出版社, 2024.  
(Liu S F. Grey system theory and its applications[M]. The 10th edition. Beijing: Science Press, 2024.)
- [2] 丁圆苹, 党耀国, 王俊杰. 欧勒多项式驱动的自适应多变量灰色预测模型及应用[J]. 中国管理科学, 2025, 33(12): 185-199.  
(Ding Y P, Dang Y G, Wang J J. Adaptive multivariable grey prediction model driven by Euler polynomials and its application[J]. Chinese Journal of Management Science, 2025, 33(12): 185-199.)
- [3] Wang M, Wang W, Wu L F. Application of a new grey multivariate forecasting model in the forecasting of energy consumption in 7 regions of China[J]. Energy, 2022, 243: 123024.
- [4] 杨璐, 徐秋慧, 谢乃明. 可解释非线性灰色 Bernoulli 模型及其在结构疲劳寿命预测中的应用[J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2833-2840.  
(Yang L, Xu Q H, Xie N M. Physics-preserving nonlinear grey Bernoulli model and applications to fatigue life prediction[J]. Control and Decision, 2025, 40(9): 2833-2840.)
- [5] 苟小义, 米传民, 曾波, 等. 多频率信息协同下的季节性混频灰色预测模型及其应用[J]. 控制与决策, 2025, 40(4): 1163-1171.  
(Gou X Y, Mi C M, Zeng B, et al. Seasonal mixing grey prediction model and its application under collaboration of multiple frequency information[J]. Control and Decision, 2025, 40(4): 1163-1171.)
- [6] 徐宁, 秦邱皓, 王天宇, 等. 基于自适应调节的灰色滚动预测模型及对碳排放趋势预测[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3409-3417.  
(Xu N, Qin Q H, Wang T Y, et al. Grey rolling model based on self-adaptive adjustment and forecasting

- tendency of carbon emission[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(12): 3409-3417.)
- [7] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [8] 谢乃明, 刘思峰. 多变量离散灰色模型及其性质[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(6): 143-150. (Xie N M, Liu S F. Research on the discrete grey model of multi-variables and its properties[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2008, 28(6): 143-150.)
- [9] 许泽东, 党耀国, 杨德岭. 含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2023, 38(12): 3578-3584. (Xu Z D, Dang Y G, Yang D L. Discrete grey forecasting model with fractional order polynomial and its application[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(12): 3578-3584.)
- [10] Ding S, Xu N, Ye J, et al. Estimating Chinese energy-related CO<sub>2</sub> emissions by employing a novel discrete grey prediction model[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2020, 259: 120793.
- [11] Tu L P, Chen Y. An unequal adjacent grey forecasting air pollution urban model[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 99: 260-275.
- [12] Wang J J, Wang Z F, Zhou H M, et al. Considering the impact and accumulative time-delay effects of the battery technology innovation and subsidy policy for predicting the new energy vehicle sales[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2026, 212: 111674.
- [13] Wang J J, Ding X Y, An Y M, et al. Forecasting new energy vehicle sales with grey model incorporating impact of policies[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2026, 151: 116462.
- [14] Yin F F, Zeng B. A novel multivariable grey prediction model with different accumulation orders and performance comparison[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 109: 117-133.
- [15] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [16] Zeng B, Yu L A, Liu S F, et al. Unification of grey accumulation operator and the inverse operator and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2021, 41(10): 2710-2720.
- [17] Meng W, Zeng B. Research on fractional order operators and grey prediction model[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [18] Wu L F, Gao X H, Xiao Y L, et al. Using a novel multivariable grey model to forecast the electricity consumption of Shandong Province in China[J]. *Energy*, 2018, 157: 327-335.
- [19] 孟伟, 刘思峰, 方志耕, 等. 基于互逆分数阶算子的 GM(1,1) 阶数优化模型[J]. *控制与决策*, 2016, 31(4): 661-666. (Meng W, Liu S F, Fang Z G, et al. GM(1,1) with optimized order based on mutual fractional operators[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(4): 661-666.)
- [20] 杨保华, 赵金帅. 分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2015, 30(7): 1264-1268. (Yang B H, Zhao J S. Fractional order discrete grey GM(1,1) power model and its application[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(7): 1264-1268.)
- [21] 吴利丰, 刘思峰, 刘健. 灰色 GM(1,1) 分数阶累积模型及其稳定性[J]. *控制与决策*, 2014, 29(5): 919-924. (Wu L F, Liu S F, Liu J. GM(1,1) model based on fractional order accumulating method and its stability[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(5): 919-924.)
- [22] Li X M, Zhou S W, Zhao Y F. Onshore and offshore wind power generation forecasting using a novel flexible time-varying fractional nonlinear grey model[J]. *Energy Conversion and Management*, 2023, 297: 117695.
- [23] Li Y, Ren H T, Liu J J. A novel fractional multivariate grey prediction model for forecasting hydroelectricity consumption[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2024, 14(3): 507-526.
- [24] 樊学秀, 江可申, 覃素平, 等. 分数阶多项式驱动的自适应灰色模型在碳排放预测中的应用[J]. *控制与决策*, 2026, 41(1): 143-152. (Fan X X, Jiang K S, Qin S P, et al. An adaptive grey prediction model driven by fractional-order polynomial and its application in carbon emission forecasting[J]. *Control and Decision*, 2026, 41(1): 143-152.)
- [25] 沈琴琴, 杨林云, 曹阳. 可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型及应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(9): 2797-2806. (Shen Q Q, Yang L Y, Cao Y. Variable conformable fractional nonlinear discrete grey multivariate model and its applications[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(9): 2797-2806.)
- [26] 孟伟, 曾波. 基于互逆分数阶算子的离散灰色模型及阶数优化[J]. *控制与决策*, 2016, 31(10): 1903-1907. (Meng W, Zeng B. Discrete grey model with inverse fractional operators and optimized order[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(10): 1903-1907.)
- [27] Wang Y, Ye L L, Yang Z S, et al. A novel structure adaptive fractional discrete grey forecasting model and its application in China's crude oil production prediction[J]. *Expert Systems with Applications*, 2022, 207: 118104.
- [28] Zhao X M, Ma X, Cai Y B, et al. Application of a novel hybrid accumulation grey model to forecast total energy consumption of Southwest Provinces in China[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2023, 13(4): 629-656.
- [29] 尹凤凤, 曾波, 余乐安, 等. 多维灰色模型阶数差异性优化与结构拓展研究[J]. 系统工程理论与实践, 2023, 43(7): 2166-2178. (Yin F F, Zeng B, Yu L A, et al. Research on the orders differential optimization and structural expansion of multidimensional grey model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2023, 43(7): 2166-2178.)

- [30] 刘连义, 刘思峰, 吴利丰. 基于离散时间灰色幂模型的新能源汽车销售量预测[J]. *中国管理科学*, 2024, 32(1): 106-114.  
(Liu L Y, Liu S F, Wu L F. New energy vehicle sales forecast based on discrete time grey power model[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2024, 32(1): 106-114.)
- [31] Xu Z C, Xie N M, Diao H K. Lithium-ion battery state of health monitoring based on an adaptive variable fractional order multivariate grey model[J]. *Energy*, 2023, 283: 129167.
- [32] Ma X, He Q P, Li W P, et al. Time-delayed fractional grey Bernoulli model with independent fractional orders for fossil energy consumption forecasting[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2025, 155: 110942.
- [33] 曾波, 余乐安, 刘思峰, 等. 灰色累加算子与灰色累减算子的统一及其应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2021, 41(10): 2710-2720.  
(Zeng B, Yu L A, Liu S F, et al. Unification of grey accumulation operator and the inverse operator and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2021, 41(10): 2710-2720.)
- [34] 韦保磊, 谢乃明. 广义灰色关联分析模型的统一表述及性质[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(1): 226-235.  
(Wei B L, Xie N M. Unified representation and properties of generalized grey relational analysis models[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2019, 39(1): 226-235.)

### 作者简介

党耀国 (1964-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论、数量经济, E-mail: [iamdangyg@163.com](mailto:iamdangyg@163.com);

周心炎 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为灰色系统理论, E-mail: [2080229700@qq.com](mailto:2080229700@qq.com);

王俊杰 (1988-), 男, 副教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论、数量经济, E-mail: [wangjj@nuaa.edu.cn](mailto:wangjj@nuaa.edu.cn);

许泽东 (1989-), 男, 博士生, 主要研究方向为灰色系统理论, E-mail: [xzd361296@nuaa.edu.cn](mailto:xzd361296@nuaa.edu.cn);

尹凤凤 (1989-), 女, 博士生, 主要研究方向为灰色预测理论及其应用, Email: [2021336029@email.ctbu.edu.cn](mailto:2021336029@email.ctbu.edu.cn).