



有限域上多智能体系统的分布式协同控制研究综述

路则欢, 张志强, 孙元功

引用本文:

路则欢, 张志强, 孙元功. 有限域上多智能体系统的分布式协同控制研究综述[J]. 控制与决策, 2025, 40(2): 367–374.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1618>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

布尔控制网络的集成集可控

Ensemble set controllability of Boolean control networks

控制与决策. 2021, 36(9): 2187–2194 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1837>

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid

控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

基于一致性算法的多模式搅拌器微波加热系统温度均匀性优化

Temperature uniformity optimization of multi-mode stirrer microwave heating system based on consensus algorithm

控制与决策. 2021, 36(12): 2901–2909 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0986>

脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

有限域上多智能体系统的分布式协同控制研究综述

路则欢[†], 张志强, 孙元功

(济南大学 数学科学学院, 济南 250022)

摘要: 研究有限域上多智能体系统的一致性与可控性, 对包括传感器网络、机器人网络等在内的复杂系统的控制与应用具有广泛的应用价值. 首先综述有限域上多智能体系统的一致性, 从有无时滞及拓扑结构变化的角度, 梳理了达到一致性的代数判据与图论判据的异同以及联系; 其次论述了有限域上多智能体系统的可控性, 归纳总结了影响可控性的 5 个要素, 包括系统的模型、拓扑结构、领航者的选取、域的阶数以及可控性下标; 最后总结全文并提出潜在的研究方向.

关键词: 有限域; 多智能体系统; 一致性; 可控性; 目标可控; 拓扑结构

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1618

引用格式: 路则欢, 张志强, 孙元功. 有限域上多智能体系统的分布式协同控制研究综述[J]. 控制与决策, 2025, 40(2): 367-374.

A survey of distributed cooperative control of multi-agent systems over finite fields

LU Ze-huan[†], ZHANG Zhi-qiang, SUN Yuan-gong

(School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract: The study of consensus and controllability of multi-agent systems over finite fields is valuable to the control and application of various complex systems, including sensor networks and robot networks. Firstly, this survey investigates the consensus of multi-agent systems over finite fields, and algebraic criterion and graph theory criterion for achieving consensus are compared from the perspective of time delay and topological structure change. Then, the controllability of multi-agent systems over finite fields is considered. Five factors affecting controllability are introduced, including system model, topological structure, leader selection, domain order and controllability subscript. Finally, some potential future works are suggested.

Keywords: finite fields; multi-agent systems; consensus; controllability; targeted controllability; topological structure

0 引言

多智能体系统的分布式协同控制问题是复杂性科学领域中一个非常重要的研究课题, 近年来受到了物理科学^[1-2]、控制科学^[3-7]等诸多领域研究人员的广泛关注, 并已取得丰硕的研究成果^[1-9]. 多智能体系统不仅可以广泛应用于物理、军事、社会科学等学科, 还可以在生物种群的迁徙^[10]、电网间的耦合分析^[11]、人群移动网络分析^[12]等方面提供极有价值的数学模型和分析工具.

从数域的角度划分, 现有的多智能体系统的分布式协同控制研究, 可以分为复数域上的多智能体系统

和有限域上的多智能体系统. 有限域上的多智能体系统是一类特殊的多智能体系统. 在有限域网络中, 每个智能体的状态都从一个有限整数集中取值, 智能体的状态更新是自身状态值和从邻居接收到的状态值的加权求和, 并基于模运算法则进行运算^[13]. 这种模运算法则在姿态估计的相对测量以及其他应用中都有很大的优势^[13]. 在数字通信及无线传感器网络中, 信息传输通道中的通信带宽往往是有限的^[13]. 与此同时, 网络中单个智能体所拥有的接收、存储、处理和传输信息的能力都受到一定的限制. 因此, 将多智能体系统建模到一个有限的正整数集, 而不是实数

收稿日期: 2023-11-20; 录用日期: 2024-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61903154, 61873110); 山东省泰山学者特聘教授人才支持计划项目(ts20190938); 山东省自然科学基金项目(ZR2023MF072, ZR2023MF057).

责任编辑: 王龙.

[†]通讯作者. E-mail: luzehuan2011@163.com.

集上,具有较短的收敛时间和对通信噪声较强的适应能力^[13-15].

现有的有限域上多智能体系统的研究主要集中在一致性与可控性上.有限域上多智能体系统的一致性是指:智能体在局部合作与通信下,调整更新自己的状态,使得在有限时间内每个智能体的状态都等于某个固定值^[13].有限域上多智能体系统的可控性是指:在有限时间内,通过适当的外部控制输入,将系统状态从任意的初始状态驱动到任意的目标状态^[14].与可控性问题相比,在研究有限域上多智能体系统的一致性问题时,系统中没有带有外部控制输入的个体.此外,在控制目标上这两个问题也有明显的不同,有限域上多智能体系统的一致性问题要求在某个时间节点所有的智能体的状态都相同或者都等于某个值,可控性问题是要求在某个时间节点所有的个体的状态值都能够达到系统所期望的值.

相比于复数域上的多智能体系统,有限域上的多智能体系统能够在有限的存储容量和有限的通信带宽下对系统进行建模,并且对通信噪声有很强的抗干扰能力,在监视器网络的姿态估计以及数字通信中有很大的优势.但是,由于数域的不同,有限域上多智能体系统的分布式协同控制也面临诸多挑战,如代数不封闭、PBH(Popov-Belevitch-Hautus)判据不成立、复数域上关于一致性的判据不适用等^[13-16].虽然复数域上多智能体系统的分布式协同控制研究理论已经相当成熟,但考虑到有限域上多智能体系统的特殊性,复数域上多智能体系统的相关理论成果并不能直接应用到有限域上的多智能体系统中,所以应该研究符合有限域上多智能体系统特点的相关理论.

本文梳理了有限域上多智能体系统的分布式协同控制的相关成果.如图1所示,下文将分别从有限域上多智能体系统的一致性及可控性两个角度来概述有限域上多智能体系统分布式协同控制的相关理论成果及其研究现状.本文探究了目前该领域存在的主要挑战,并对该领域未来的发展趋势进行了展望.

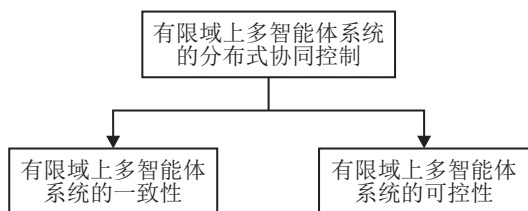


图1 有限域上多智能体系统的分布式协同控制

1 预备知识

集合 $\mathcal{F}$ 是一个域,指 $\mathcal{F}$ 上有加法运算“+”和乘法运算“ $\cdot$ ”,并且满足下面的条件^[12-13]:

- 1) 加法和乘法运算满足封闭性,即对于任意的 $a, b \in \mathcal{F}$,都有 $a + b \in \mathcal{F}$ 及 $a \cdot b \in \mathcal{F}$.
- 2) 加法和乘法运算满足结合律,即对于任意的 $a, b, c \in \mathcal{F}$,都有 $a + (b + c) = (a + b) + c$ 及 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- 3) 加法和乘法运算满足交换律,即对于任意的 $a, b \in \mathcal{F}$,都有 $a + b = b + a$ 及 $a \cdot b = b \cdot a$.
- 4) 存在加法和乘法运算的单位元,即对于任意的 $a \in \mathcal{F}$,存在 $0, 1 \in \mathcal{F}$,都有 $a + 0 = a$ 及 $a \cdot 1 = a$.
- 5) 加法和乘法运算满足分配律,即对于任意的 $a, b, c \in \mathcal{F}$,都有 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

在本文中,考虑一个特征为 q 的有限域 $\mathcal{F}_q = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$,其中 q 是素数(q 也称为有限域 $\mathcal{F}_q$ 的阶数).在 $\mathcal{F}_q$ 上定义的加法(+)和乘法($\cdot$)这两种运算分别是模 q 加法和模 q 乘法.

2 有限域上多智能体系统的一致性

有限域上多智能体系统的一致性概念由Pasqualetti等^[13]提出.对于一个有限域上的线性时不变(linear time invariant, LTI)系统

$$x(t+1) = Ax(t), \quad (1)$$

其中 $A \in \mathcal{F}_q^{n \times n}$ 为系统的邻接矩阵,Pasqualetti等利用转移图给出有限域上线性时不变多智能体系统达到一致的充要条件如下.

定理1^[13] 假设 $A1_n = 1_n$,在有限域 $\mathcal{F}_p$ 上系统(1)能够实现一致,当且仅当 $p_A(s) = s^{n-1}(s-1)$,其中 $p_A(s)$ 表示有限域 $\mathcal{F}_p$ 上邻接矩阵 A 的特征多项式.

利用该条件,文献[13]设计出监视器网络相对姿态估计算法.在复数域上,如果一个图是强连通的并且对应的邻接矩阵 A 是行随机的,则对应的线性时不变多智能体系统是可以实现一致性的.Pasqualetti等指出上述图论和矩阵条件不能保证有限域上线性时不变多智能体系统达到一致.此外,利用矩阵半张量积方法,文献[16]将有限域上线性时不变多智能体系统的输出一致性问题转化成集合镇定性问题,并基于输入输出真矩阵方法,获得输出状态反馈控制集合,以及计算该集合的控制算法.

在实际应用中,由于网络通信的复杂性和网络带宽的限制,智能体之间状态信息的传输、存储以及处理会存在滞后现象,时滞的存在可能造成系统性能的降低,甚至导致系统不稳定.因此,探究时滞对系统实

现一致性的影响显得尤为必要. 在研究有限域上时滞多智能体系统的一致性问题时, 目前的研究模型集中在线性时不变时滞多智能体系统^[17-18]和时滞切换多智能体系统^[19-20]上.

文献[17]分别研究了单时滞、多时滞及有界时变时滞下有限域上线性时不变时滞多智能体系统的一致性问题, 与复数域上的时滞多智能体系统不同的是, 有限域上线性时不变时滞多智能体系统的一致性不仅取决于系统矩阵对角线上的元素, 也取决于非对角线上的元素. 在信息的传输过程中, 时滞的产生往往是随机的, 大部分随机时滞会对系统产生影响, 造成系统不稳定. 因此, 研究带有随机时滞的有限域上多智能体系统的一致性问题, 更加符合实际应用. 针对这一点, 文献[18]引入模型

$$\eta_i(t+1) = \sum_{j \in U_i^{\text{in}} \cup \{i\}} a_{ij} \eta_j(t-d(t)).$$

其中: $\eta_i(t)$ 表示 t 时刻智能体 i 的状态, $d(t)$ 是时滞, $U_i^{\text{in}} = \{j \in V : (i, j) \in \mathcal{E}\}$ 是节点 i 的入度邻居集. 针对随机时滞下的线性时不变多智能体系统, 文献[18]给出了系统实现有限时间一致性的代数判据. 与文献[17]不同的是, 文献[18]给出了系统实现有限时间一致性的代数判据, 代数判据往往无法直观地反映多智能体系统内部节点的连接关系, 也很难给出网络结构对系统可控性的影响.

时滞切换多智能体系统指的是带有时滞的切换多智能体系统, 如果系统受到外部攻击造成节点的丢失以及连接边的断开或者在信息传输过程中, 时滞存在, 那么就可以用时滞切换系统来建模. 针对带有时滞的切换多智能体系统, 文献[19]给出了如下的系统模型:

$$\begin{aligned} x(t+1) = & C_{0,s(t)}x(t) + C_{1,s(t)}x(t-1) + \\ & C_{2,s(t)}x(t-2) + \dots + C_{\tau,s(t)}x(t-\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

文献[19]利用转移图给出系统(2)实现一致的图论判据如下.

定理2^[19] 在有限域 $\mathcal{F}_p$ 上, 时滞系统(2)能够实现一致, 当且仅当 $\mathcal{G}_D^*$ 恰好包含 p 个循环, 且所有循环都是围绕顶点 η_{1_n} 的单位循环, 其中 $\eta \in \mathcal{F}_p$.

在有限域上时滞切换多智能体系统的研究中, 系统模型还有一种形式^[20]为

$$\chi_i(t+1) = \sum_{j \in N_i^{\text{in}}(t) \cup \{i\}} a_{ij}^{\sigma(t)} \chi_j(t - \tau_{ij}), \quad (3)$$

其中 $\chi_i(t)$ 表示 t 时刻智能体 i 的状态. 基于矩阵半张

量积思想, 文献[20]针对有限域上的时变时滞切换多智能体系统, 建立了系统实现一致性的代数判据. 注意到文献[20]中系统的时滞是时变时滞, 文献[19]中系统是常时滞. 由于系统(3)不能写成文献[19]中系统(2)的形式, 如果利用转移图的方法很难得出系统(3)实现一致的图论判据.

文献[19-20]针对的都是一阶多智能体系统, 目前基于一般线性动态的多智能体系统一致性研究的相关文献还很少. 针对一般线性动态的多智能体系统, Xu等^[21]给出如下模型:

$$\delta(k+1) = (I_N \otimes A + (\bar{A} - \bar{D}) \otimes bK) \delta(k). \quad (4)$$

利用状态坐标变换, 文献[21]证明了系统(4)实现一致, 当且仅当 $\bar{\mathcal{G}}$ 是有向无环图, 并且 $A - d_i bK$ 是幂零阵. 在此基础上, 文献[22]研究了如下带有时滞的一般线性动态的多智能体系统:

$$\begin{aligned} \delta(t+1) = & (I_N \otimes A) \delta(t) + \sum_{k=0}^{\tau} (C_{\tau-k} \otimes bK) \delta(t-k). \end{aligned} \quad (5)$$

为了使时滞系统(5)达到一致, 在文献[21]的基础上, 文献[22]还增加了 $P_i(\lambda) \equiv \mu \lambda^\tau$ 这一条件, 其中 $P_i(\lambda)$ 是定义到每个智能体 i 的关于 λ 的多项式.

除了一致性问题之外, 同步性问题的多智能体系统的分布式协同控制的研究中也是一个重要的基本问题. 多智能体系统的同步性是指: 智能体在局部合作与通信下, 调整更新自己的状态, 使得在有限时间内每个智能体的状态都相等^[23]. 由于在实际的机器操纵臂网络中可能要求操纵臂足够大, 以使得到达相同的时变位置, 要求在有限时间内将每个机器操纵臂的状态都达到某个固定值变得不再适用. 因此, 研究同步性问题比一致性问题具有更广泛的意义. 基于转移图的思想, 文献[23]给出了有限域上线性时不变多智能体系统达到同步的充要条件. 主要结论可由如下定理给出.

定理3^[23] 假设 $A1_n = \alpha 1_n$, 其中 $\alpha \in \mathcal{F}_p \setminus \{0\}$. 在有限域 $\mathcal{F}_p$ 上, 系统(1)能够实现同步当且仅当 $p_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - \alpha)$, 其中 $p_A(\lambda)$ 表示有限域 $\mathcal{F}_p$ 上邻接矩阵 A 的特征多项式.

通过比较定理1和定理3可以得出, 有限域上多智能体系统的一致性问题与同步性问题明显是两个不同的问题. 此外, 文献[24]建立了有限域上的部分状态信息传输模型, 根据环境的限制调整信息的传输量, 在保证实现同步的同时, 有效降低外界环境的干扰.

随机现象广泛存在于电力网络和通讯网络中,随机网络可以看成是一类特殊的切换网络.文献[25]研究了有限域上随机切换网络的同步性问题,并给出了实现同步的代数条件.基于矩阵半张量积方法和代数状态空间表示方法,文献[26]将集群同步性问题转化成了集合稳定性问题,并在此基础上实现了多领航者集群同步.此外,文献[27]利用史密斯型和特征向量,给出了有限域上时滞多智能体系统达到同步的代数条件.

3 有限域上多智能体系统的可控性

现有的复数域以及有限域上多智能体系统可控性都是在领航者-跟随者拓扑结构下研究的.给定一个多智能体系统,首先依据有无外界控制输入,将多智能体系统中的智能体划分为领航者和跟随者,其中外界的控制输入可以将领航者的状态驱动到状态空间的任意状态.然后通过给定的每一个智能体更新自己状态的控制策略,将智能体的状态方程写成有限域上统一的系统形式,进而将该控制系统的可控性问题看作是多智能体系统的可控性问题^[14,28].

3.1 有限域上线性时不变多智能体系统的可控性

有限域上多智能体系统可控性的概念由Sundaram等^[28]提出.有限域上多智能体系统的可控性取决于以下几个因素:系统的模型、拓扑结构、领航者的选取、域的阶数和可控性下标^[14,28].现有的系统模型主要集中在时不变多智能体系统^[28-30]、切换多智能体系统^[31]以及时变多智能体系统^[14].拓扑结构的变化以及领航者的选取是影响复数域以及有限域上多智能体系统可控性的重要因素^[4-6,14,28].域的阶数 q 会影响系统的可控性,是有限域上多智能体系统的一种特殊现象,如图2所示.

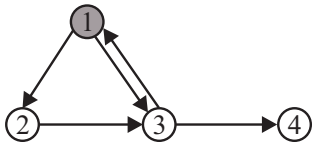


图2 包含4个节点的领航者-跟随者网络

考虑有限域上的多智能体系统

$$x(k+1) = -Lx(k) + BU^{\text{ex}}(k). \quad (6)$$

图2中的拓扑图在有限域 $\mathcal{F}_q$ 和复数域上对应的Laplacian矩阵分别是

$$-L_{q,b} = \begin{bmatrix} q - a_{13} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & q - a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & q - a_{31} - a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & q - a_{43} \end{bmatrix},$$

$$-L_b = \begin{bmatrix} -a_{13} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & -a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -a_{31} - a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & -a_{43} \end{bmatrix}.$$

令

$$a_{13} = a_{32} = a_{43} = 22, a_{21} = 3, a_{31} = 1,$$

$$B = e_{1,4} = [1, 0, 0, 0]^T.$$

经过计算可得

$$Q_{2,1} = [e_{1,4}, (-L_b)e_{1,4}, (-L_b)^2 e_{1,4}, (-L_b)^3 e_{1,4}],$$

$$-L_b = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

在复数域上,可以得出 $\text{rank}(Q_{2,1}) = 4$.图2在复数域上是可控的.

图2在有限域 $\mathcal{F}_7$ 和有限域 $\mathcal{F}_{11}$ 上的Laplacian矩阵分别是

$$-L_{7,b} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$-L_{11,b} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

令

$$Q_{2,2} = [e_{1,4}, (-L_{7,b})e_{1,4}, (-L_{7,b})^2 e_{1,4}, (-L_{7,b})^3 e_{1,4}] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

根据文献[32]中的行变换,可以得出

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{2,3} = [e_{1,4}, (-L_{11,b})e_{1,4}, L_{11,b}^2 e_{1,4}, (-L_{11,b})^3 e_{1,4}],$$

所以在有限域 $\mathcal{F}_7$ 上

$$\text{rank}(Q_{2,2}) = 3;$$

在有限域 $\mathcal{F}_{11}$ 上

$$\text{rank}(Q_{2,3}) = 4.$$

这样可以得出在有限域 $\mathcal{F}_{11}$ 上图2是可控的,但是在有限域 $\mathcal{F}_7$ 上拓扑图2是不可控的. 因此,域的阶数 q 会影响有限域上多智能体系统的可控性.

考虑有限域上的离散时不变系统

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k), \quad (7)$$

其中 $\tilde{A} \in \mathcal{F}_q^{n \times n}$, $\tilde{B} \in \mathcal{F}_q^{n \times m}$, 并且矩阵 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 中的一些元素为零元,其余的元素为不相关的自由参数变量. 系统(7)结构可控的充要条件是对于矩阵 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$,如果存在一组有限域上的非零参数值可以确保系统的可控性矩阵

$$C = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{\mu-1}\tilde{B}]$$

满足行满秩,该可控性称为有限域上线性时不变多智能体系统的结构可控性^[28],其中 μ 称为可控性下标. 文献[28]的定理2证明了当域的阶数 q 大于 $n-m+1$ 且拓扑图包含生成森林时(m 是生成森林中生成树的个数),有限域上线性时不变多智能体系统是结构可控的. 此外,文献[28]的定理4证明了当拓扑图是生成树并且该生成树至多有两个分支时,线性时不变多智能体系统在任何有限域上都是结构可控的.

两个定理的侧重点不同,相对于定理4,定理2的代数判据适用范围更广,其缺点在于该定理只能在阶数 q 大于 $n-m+1$ 的有限域上成立,无法推广到任意域上. 定理4可以在任意域上都成立,但是明显所需要的图论条件更加苛刻. 基于上述理由,线性时不变多智能体系统的可控性无法得出在任意域上都成立的具有一般意义的图论判据.

常用的判断线性时不变多智能体系统可控性的方法有两种,分别是可控性矩阵和PBH判据.

定义1 (复数域上的PBH判据)^[28] 系统(7)是不可控的,当且仅当存在一个复数 λ 使得

$$\text{rank}([\lambda I_n - \tilde{A}, \tilde{B}]) < n.$$

相对于可控性矩阵, PBH判据只需要求出系统矩阵的特征值,因而计算复杂度更低,适用范围更广. 但是, PBH判据只适用于判断复数域上系统的可控性. 有限域不满足代数封闭性,即有的多项式在有限域上不一定有根^[28]. 因此,基于可控性矩阵,研究简单、易操作的图论判据已经成为有限域上多智能体系统可控性发展的趋势^[28-31].

3.2 有限域上切换多智能体系统的可控性

考虑有限域上的离散时间切换多智能体系统

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}U^{\text{ex}}(k). \quad (8)$$

其中标量函数

$$\sigma(k) : \{0, 1, \dots\} \rightarrow \underline{M} \triangleq \{1, 2, \dots, m\}$$

是待设计的切换路径. 考虑离散时间切换多智能体系统(8),文献[31]首先指出即使每一棵生成树都是可控的并且可控性指标是 n ,也无法保证整个切换系统(8)可控.

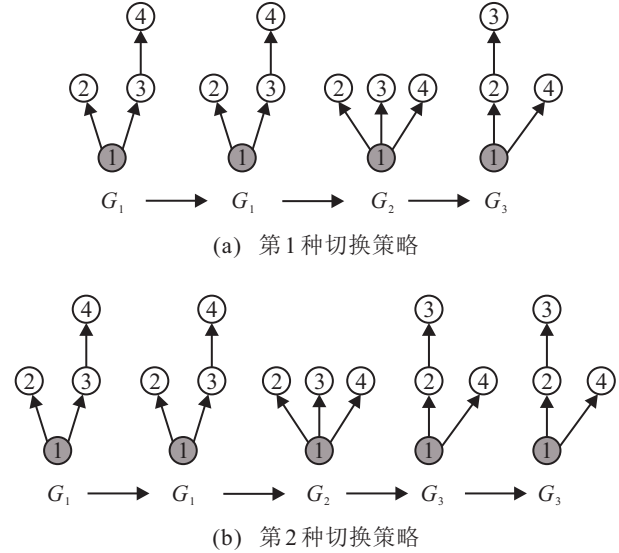


图3 两种不同的切换策略

对于有限域 $\mathcal{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的离散时间切换多智能体系统(8),其中 $n = 4$. 针对两种不同的切换策略,令

$$\sigma(0) = i_0, \sigma(1) = i_1,$$

$$\sigma(2) = i_2, \sigma(3) = i_3,$$

$$i_0 = i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3,$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = e_{1,4}.$$

A_1 、 A_2 、 A_3 是分别对应于图 G_1 、 G_2 和 G_3 的邻接矩阵. 图3(a)的切换路径是

$$G_1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3,$$

节点上自环的权重是

$$a_{11}(i_k) = 2, a_{22}(i_k) = 3, a_{33}(i_k) = 4,$$

$$a_{44}(i_k) = 1, k = 0, 1, 2, 3.$$

那么邻接矩阵 A_1 、 A_2 、 A_3 可以分别写成如下形式:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

令

$$Q_1 = [B_3, A_3 B_2, A_3 A_2 B_1, A_3 A_2 A_1 B_1],$$

通过计算可得,在有限域 $\mathcal{F}_7$ 上

$$\text{rank}(Q_1) = 3;$$

在有限域 $\mathcal{F}_{11}$ 上

$$\text{rank}(Q_1) = 4.$$

换一种切换策略,令

$$a_{11}(i_k) = 1, a_{22}(i_k) = 5,$$

$$a_{33}(i_k) = 2, a_{44}(i_k) = 6,$$

$$k = 0, 1, \dots, 4;$$

$$i_0 = i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 3;$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = e_{1,4}.$$

图3(b)的切换路径是

$$G_1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_3.$$

令

$$Q_3 = [B_3, A_3 B_3, A_3^2 B_2, A_3^2 A_2 B_1, A_3^2 A_2 A_1 B_1],$$

在有限域 $\mathcal{F}_7$ 上,通过计算可得

$$\text{rank}(Q_3) = 3.$$

基于上述分析,文献[31]得出,即使每一个切换子系统在第 n 步都可控,也不能保证离散时间切换多智能体系统(8)在第 n 步实现可控.因此,针对离散时间切换多智能体系统,可控性下标成为了影响可控性的第5个因素.文献[31]首先给出了离散时间切换多智能体系统 p 步可控的代数判据.基于上述代数判据,文献[31]建立了系统(8)可控的图论判据,结论显示即使每一个切换子系统都不可控(即每个切换子图包含不可达节点),通过合理的安排切换策略也能保证整个系统(8)可控.

3.3 有限域上时变多智能体系统的强目标可控性

区别于离散时间切换多智能体系统,时变多智能体系统不仅每一个切换子图可以任意变化,并且切换子图的总和也不是固定的.因此,研究时变多智能体系统具有更广泛的理论意义和应用价值.

有限域上的时变多智能体系统表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + BU^{\text{ex}}(k), \\ y(k) = H^T x(k). \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\mathcal{N}_T = \{c_1, c_2, \dots, c_p\} \subseteq \mathcal{N}$ 是目标节点集合.矩阵 $H \in \mathcal{F}_q^{n \times p}$ 定义为

$$H_{ij} = \begin{cases} 1, & i = c_j; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

与离散时间切换多智能体系统类似,可控性指标也是影响有限域上时变多智能体系统可控的重要因素.因此,文献[14]首先给出了有限域上时变多智能体系统在第 r 步强目标可控的代数判据.

引理1 有限域 $\mathcal{F}_q$ 上的多智能体系统(9)在第 $r \in \mathbb{N}$ 步是强目标可控的,当且仅当

$$\text{rank}(\mathcal{R}(0, r)) = p.$$

其中

$$\mathcal{R}(0, r) =$$

$$[H^T B, H^T A(r-1)B, \dots, H^T A(r-1) \dots A(0)B].$$

基于引理1,利用零驱动集、动态路、二分图等图论工具,文献[14]接着给出了有限域上时变多智能体系统在第 r 步强目标可控的图论判据.

相对于文献[28],文献[14]的图论判据不仅是一个充要条件,而且可以在任意域上都成立,因而可以应用到更一般的拓扑结构图.

4 研究展望

本文围绕有限域上多智能体系统的一致性与可控性问题进行归纳与总结.在经典的线性系统理论研究中,利用可控性矩阵是否满秩就能够判定出该系统是否可控.由于多智能体网络是有向的并且网络类型复杂多变,如果简单地套用经典大系统理论及其解耦技术研究多智能体系统的可控性,还可能得出某些相悖的情形和结论,因此许多现成的传统控制理论的结果和工具都不能直接利用^[33].

相对于经典的线性系统可控性问题,在多智能体系统可控性研究中的一个重要问题是,选择哪些智能体作为领航者以及如何选择最少的领航者,使得整个系统可控^[33]?由于PBH判据在有限域上不成立,利用可控性矩阵判断时不变、切换以及时变多智能体系统的可控性计算量非常大.此外,找到一个最小的领航者集合使得时不变多智能体系统(3)目标可控是一个NP困难问题^[34].由于拓扑结构的变化,如何找到一个最小的领航者集合使得切换以及时变多智能体系统目标可控将变得更加困难.因此,结合有限域数域的特点,最小的领航者集合问题是一个值得关注的方向.

目前有限域上多智能体系统的一致性与可控性

的研究仍处于发展阶段,但是现有的有限域上多智能体系统考虑的模型比较简单,没有考虑复杂模型对可控性的影响. 由于实际应用中的多智能体系统都是通过相互依赖或多重性互相耦合的,考虑这些多重性或相互依赖与其他形式的高阶动力学之间相互作用,能更好地理解复杂系统中的涌现等现象. 通过多层网络的建模可以更好地理解系统的典型复杂性框架. 多层网络在化学、生物学、工程学及人类动力学等领域有大量实际应用^[35],因此有限域上多层网络的集合一致性、可控性、结构可控性等也是下一步值得研究的方向.

参考文献(References)

- [1] 李阿明, 侯谷庚, 王龙. 时序网络构建的理论和办法[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1473-1490.
(Li A M, Hou G Y, Wang L. Theory and method for constructing temporal networks[J]. Control and Decision, 2023, 38(6): 1473-1490.)
- [2] Wang L, Xiao F. A new approach to consensus problems in discrete-time multiagent systems with time-delays[J]. Science China Information Sciences, 2007, 50(4): 625-635.
- [3] 衣鹏, 潘越, 王文远, 等. 基于博弈论的多车智能驾驶交互决策综述[J]. 控制与决策, 2023, 38(5): 1159-1175.
(Yi P, Pan Y, Wang W Y, et al. A review on interactive decision-making of multi-vehicle autonomous driving with a game theoretical perspective[J]. Control and Decision, 2023, 38(5): 1159-1175.)
- [4] Wang L, Jiang F C, Xie G M, et al. Controllability of multi-agent systems based on agreement protocols[J]. Science China Information Sciences, 2009, 52(11): 2074-2088.
- [5] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955.
- [6] Yu J Y, Wang L. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies[C]. Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) Held Jointly with 28th Chinese Control Conference. Shanghai, 2009: 2652-2657.
- [7] 任世超, 关永强, 谌煜. 有向符号网络的边能控性研究[J]. 控制理论与应用, 2023, 40(1): 74-82.
(Ren S C, Guan Y Q, Chen Yu. Edge controllability of directed signed networks[J]. Control Theory & Applications, 2023, 40(1): 74-82.)
- [8] 张志强, 王龙. 多智能体系统的事件驱动控制[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(8): 1051-1065.
(Zhang Z Q, Wang L. Event-triggered control for multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(8): 1051-1065.)
- [9] 纪志坚. 等价划分下多智能体系统能控性的一种判定方法[J]. 聊城大学学报: 自然科学版, 2023, 36(6): 1-8.
(Ji Z J. A method for determining the controllability of multi-agent systems under equitable partition[J]. Journal of Liaocheng University: Natural Science Edition, 2023, 36(6): 1-8.)
- [10] Couzin I D, Krause J, Franks N R, et al. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move[J]. Nature, 2005, 433: 513-516.
- [11] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks[J]. Nature, 2010, 464: 1025-1028.
- [12] Vespignani A. Complex networks: The fragility of interdependency[J]. Nature, 2010, 464(7291): 984-985.
- [13] Pasqualetti F, Borra D, Bullo F. Consensus networks over finite fields[J]. Automatica, 2014, 50(2): 349-358.
- [14] Lu Z H, Zhang Z Q, Ji Z J. Strong targeted controllability of multi-agent systems with time-varying topologies over finite fields[J]. Automatica, 2022, 142: 110404.
- [15] Lidl R, Niederreiter H. Finite fields[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [16] Yu M, Xia J W, Feng J E, et al. Leader-follower output consensus of multiagent systems over finite fields[J]. Neurocomputing, 2023, 550: 126495.
- [17] Li X X, Su H S, Chen M Z Q. Consensus networks with time-delays over finite fields[J]. International Journal of Control, 2016, 89(5): 1000-1008.
- [18] Li Y L, Li H T, Wang S L. Finite-time consensus of finite field networks with stochastic time delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(12): 3128-3132.
- [19] Li X, Chen M, Su H, et al. Consensus networks with switching topology and time-delays over finite fields[J]. Automatica, 2016, 68: 39-43.
- [20] Li Y, Li H, Ding X, et al. Leader-follower consensus of multiagent systems with time delays over finite fields[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(8): 3203-3208.
- [21] Xu X R, Hong Y G. Leader-following consensus of multi-agent systems over finite fields[C]. 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles, 2014: 2999-3004.
- [22] Zhu W, Cao J, Shi X, et al. Leader-following consensus of finite-field networks with time-delays[J]. Information Sciences, 2023, 149486.
- [23] Meng M, Li X X, Xiao G X. Synchronization of networks over finite fields[J]. Automatica, 2020, 115: 108877.
- [24] Zhang J, Lu J, Xing M, et al. Synchronization of finite

- field networks with switching multiple communication channels[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2021, 8(3): 2160-2169.
- [25] Lin L, Cao J D, Zhu S Y, et al. Synchronization analysis for stochastic networks through finite fields[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(2): 1016-1022.
- [26] Lin L, Cao J D, Liu X X, et al. Cluster synchronization of finite-field networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2024, 54(1): 635-640.
- [27] Zhu W J, Cao J D, Shi X L, et al. Synchronization of finite-field networks with time delays[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2022, 9(2): 347-355.
- [28] Sundaram S, Hadjicostis C N. Structural controllability and observability of linear systems over finite fields with applications to multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(1): 60-73.
- [29] Li Y L, Li H T. Controllability of multi-agent systems over finite fields via semi-tensor product method[C]. Proceedings of the 38th Chinese Control Conference. Guangzhou, 2019: 5606-5611.
- [30] Lu Z H, Zhang L, Wang L. Structural controllability of multi-agent systems with general linear dynamics over finite fields[C]. Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. Chengdu, 2016: 8230-8235.
- [31] Lu Z, Zhang L, Wang L. Controllability analysis of multi-agent systems with switching topology over finite fields[J]. Science China Information Sciences, 2019, 62(1): 12201.
- [32] Blahut R E. Algebraic codes for data transmission[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [33] 陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战[J]. 自动化学报, 2013, 39(4): 312-321.
(Chen G R. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(4): 312-321.)
- [34] van Waarde H J, Camlibel M K, Trentelman H L. A distance-based approach to strong target control of dynamical networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12): 6266-6277.
- [35] Della Rossa F, Pecora L, Blaha K, et al. Symmetries and cluster synchronization in multilayer networks[J]. Nature Communications, 2020, 11(1): 3179.

作者简介

路则欢(1986—), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为多智能体系统的可控性与一致性, E-mail: luzehuan2011@163.com;

张志强(1987—), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为多智能体系统的一致性, E-mail: zqzhang7@gmail.com;

孙元功(1975—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为混杂动态系统分析与控制, E-mail: ss_sunyg@ujn.edu.cn.