

控制与决策

Control and Decision

基于改进Fal函数的滤波器及扩张状态观测器研究

秦耀, 杨杰, 刘书云, 曾海金

引用本文:

秦耀, 杨杰, 刘书云, 等. 基于改进Fal函数的滤波器及扩张状态观测器研究[J]. *控制与决策*, 2025, 40(2): 684-692.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1642>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[Fal函数的改进及3种新型非线性扩张状态观测器](#)

Advanced fal function and three novel nonlinear extended state observers

控制与决策. 2021, 36(7): 1655-1662 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1652>

[基于PID参数整定的线性自抗扰控制参数整定](#)

Tuning of linear active disturbance rejection controllers based on PID tuning rules

控制与决策. 2021, 36(7): 1592-1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1408>

[输出误差约束下四旋翼无人机预定性能反步控制](#)

Prescribed performance backstepping control for quadrotor UAV with output error constraint

控制与决策. 2021, 36(5): 1059-1068 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1249>

[基于变速趋近律的Buck型变换器抗扰动控制](#)

Disturbance rejection control of Buck converters based on variable rate reaching law

控制与决策. 2021, 36(4): 893-900 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1073>

[基于向量集逆区间滤波的故障观测器设计](#)

Vector set inversion interval filtering based fault observer design

控制与决策. 2021, 36(12): 2973-2981 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0212>

基于改进Fal函数的滤波器及扩张状态观测器研究

秦耀^{1,2}, 杨杰^{1,2†}, 刘书云^{1,2}, 曾海金¹

(1. 江西理工大学 电气工程与自动化学院, 江西 赣州 341000;

2. 江西理工大学 永磁磁浮技术与轨道交通研究院, 江西 赣州 341000)

摘要: Fal函数是非线性扩张状态观测器(Fal_NESO)的核心单元,其构成的滤波器(FalFilter)对于控制系统的性能具有重要影响.通过对FalFilter和Fal函数的性能分析,提出一种在定义域内连续可导且只有一个待整定参数的CFal函数,并证明了由CFal函数构成滤波器(CFalFilter)和非线性扩张状态观测器(CFal_NESO)的可行性;然后,联合CFalFilter和CFal_NESO,得到一种带滤波器的新型观测器(CFalFilter-CFal_NESO),用于处理测量环节含噪声干扰的情况;最后,通过典型实例将CFal函数与两个改进的Fal函数进行对比实验.实验结果表明,在跟踪速度趋近条件下,CFalFilter滤波效果最佳;仅改变Fal函数参数,CFal_NESO能够更好地提取噪声环境中的信号状态,同时减小因观测器阶数增加而带来的参数整定困难;在不改变参数条件下,CFalFilter-CFal_NESO进一步提高了对带有测量噪声信号的状态跟踪性能.所提CFalFilter、CFal_NESO和CFalFilter-CFal_NESO对于大多数非线性、高阶系统的滤波和观测均能适用,具有重要的学术意义和实际应用价值.

关键词: 非线性扩张状态观测器; Fal函数滤波器; CFal函数; 收敛性; 稳定性; 新型观测器

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1642

引用格式: 秦耀,杨杰,刘书云,等.基于改进Fal函数的滤波器及扩张状态观测器研究[J].控制与决策,2025,40(2):684-692.

Research on filter and extended state observer based on improved Fal function

QIN Yao^{1,2}, YANG Jie^{1,2†}, LIU Shu-yun^{1,2}, ZENG Hai-jin¹

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China; 2. Institute of Permanent Magnet Levitation Technology and Rail Transport, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

Abstract: The Fal function is the core unit of the nonlinear extended state observer (Fal_NESO), and its constituent filter (FalFilter) also has an important influence on the performance of the control system. By analysing the performance of the FalFilter and the Fal function, a CFal function is proposed, which is continuously derivable in the definition domain and has only one parameter to be rectified, and the feasibility of constituting a filter (CFalFilter) and a nonlinearly extended state observer (CFal_NESO) from the CFal function is proved. Then, by combining the CFalFilter and the CFal_NESO, a new type of observer with a filter (CFalFilter-CFal_NESO) is obtained to deal with the case of noise interference in the measurement link. Finally, the CFal function is compared with the two improved Fal functions through typical examples, and the experimental results show that the CFalFilter has the best effect under the condition of convergence of tracking speed; by changing only the parameter of the Fal function, the CFal_NESO can better extract the state of the signal in the noisy environment, and at the same time, it also reduces the difficulty in parameter tuning due to the increase in the number of orders of the observer; without changing the parameter, the CFalFilter-CFal_NESO further improves the state tracking performance of the signal with measurement noise. The CFalFilter, CFal_NESO and CFalFilter-CFal_NESO proposed in this paper are applicable to the filtering and observation of most nonlinear and high-order systems, which are of great academic significance and practical application value.

Keywords: nonlinear extended state observer; Fal function filter; CFal function; convergence; stability; novel observer

收稿日期: 2023-11-25; 录用日期: 2024-06-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62063009).

责任编辑: 王燕舞.

†通讯作者. E-mail: yangjie@jxust.edu.cn.

0 引言

自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)是一种鲁棒性强、运算量相对较小的现代控制方法,广泛应用于含有非线性、时变以及未知扰动等因素的复杂、不确定系统的控制^[1-3],其核心思想是将系统不确定干扰或建模误差部分都归结为系统的“总扰动”,通过非线性扩张状态观测器(Fal_NESO)进行估计并给予控制补偿,使被控对象稳定,并具有较强的抗扰能力^[4-6]. Fal_NESO只需根据被控对象的输入和输出信息,配置特殊的非线性结构——Fal函数和观测器增益,就能对系统总扰动的扩张状态和整体进行辨识.

在Fal_NESO前加入滤波环节有助于增强系统对噪声的鲁棒性,提高状态估计的准确性.惯性滤波环节虽然对噪声具有抑制能力,但相位延迟会随着时间常数增加而增大,而Fal函数滤波器(FalFilter)通过非线性反馈的方式使输出迅速逼近输入,从而使该滤波器具有良好的滤波效果,且具有较快的跟踪速度^[7].同时,Fal函数也是构成Fal_NESO的核心单元,其特性直接影响其观测性能.由于Fal函数在拐点处具有不平滑特性,易产生抖振现象,待整定参数较多,且易出现因增益过大导致输出效果不佳的情况.针对Fal函数的不足而导致观测器和滤波器性能下降问题,文献[8]提出一种Faln函数应用于观测器,限制了大误差产生较大增益,但并未解决Fal函数拐点处不平滑易引起输出抖振的问题;文献[9]构建一种Galn函数应用于观测器,减少了待参数整定数量,但函数参数变化时,图像整体变化较大,且函数仍存在拐点;文献[10]提出一种ZFal函数应用于观测器,克服了Fal函数不平滑特性,减小了动态调节时输出的抖动,但误差较大时增益仍较大;文献[11]提出一种NFal函数应用于观测器,提高了系统的快速性和抗扰性,但函数形式过于复杂.大多数关于Fal函数的研究都是基于观测器进行的,针对Fal函数在滤波器和由Fal函数滤波器和观测器组成的新型观测器中的研究较少.

综合上述研究,本文提出一种在定义域内连续可导且只有一个待整定参数的CFal函数,对其构成的滤波器(CFalFilter)和非线性扩张状态观测器(CFal_NESO)进行分析,联合CFalFilter和CFal_NESO,得到一种新型观测器(CFalFilter-CFal_NESO),通过典型实例并结合两个改进的Fal函数进行对比实验,验证CFalFilter、CFal_NESO和CFalFilter-CFal_NESO的性能.

1 Fal函数滤波器分析及改进

Fal函数实际上是对控制工程界的一个经验知识:“大误差、小增益,小误差、大增益”的数学拟合.模糊控制、智能控制和变增益PID等方法,本质上都是基于这种经验知识,其表达式为

$$\text{Fal}(x, \alpha, \delta) = \begin{cases} \frac{x}{\delta^{1-\alpha}}, & |x| \leq \delta; \\ \text{sign}(x)|x|^\alpha, & |x| > \delta. \end{cases} \quad (1)$$

其中: x 为Fal函数变量, α 、 δ 为可调参数.

由Fal函数表达式可知:函数曲线过点(1, 1);参数 δ 决定函数线性区间的大小;参数 α 决定函数非线性区域的非线性程度;参数 δ 和 α 共同决定函数线性区域的斜率和极值.

1.1 Fal函数滤波器介绍

传统Fal函数滤波器结构如图1所示.

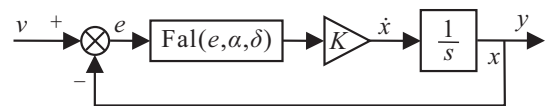


图1 FalFilter结构

用状态方程形式可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = K\text{Fal}(e, \alpha, \delta), \\ e = v - x, \\ y = x. \end{cases} \quad (2)$$

其中: v 为输入信号, K 为比例系数, y 为FalFilter的输出信号.

由图1和文献[7]可知,FalFilter结构与单闭环非线性比例控制系统类似, K 值越大,跟踪速度越快,但滤波效果会变差. α 为0~1之间的常数,其值越小跟踪速度越快,但滤波效果会变差. δ 为0~1之间的常数,其值越大滤波效果越好,但会降低跟踪速度.FalFilter系统的最大稳态误差范围为 $|x| \leq 1$.

1.2 Fal函数滤波器的改进

根据Fal函数的设计原则^[12],提出改进Fal函数的功能目标:1)关于原点对称,且处处连续可导;2)待整定参数尽可能少;3)当误差接近0时,Fal函数系统采用较小增益的非线性结构来放大,使控制输出尽可能平缓;4)Fal函数系统在稳态误差范围内控制精度尽可能高,在误差较大时保持较小的系统增益.

综合上述分析,构建一种在定义域内连续可导的CFal函数,CFal(x, r)函数表达式如式(2).其中: x 为CFal函数变量; y_1 、 y_2 、 y_3 为构成CFal函数的3部分函数; r 为圆函数 y_1 的可调半径,且有 $r > 1$; a 、 b 为过点(0, 0)和(1, 1)所表示圆函数 y_1 的圆心坐标; r_c 、 θ 、

$\Delta x_c, \Delta y_c, x_c, y_c$ 为构成CFal函数的中间变量.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (\sqrt{2r^2 - 1} + 1)/2; \\ b = (\sqrt{2r^2 - 1} - 1)/2; \\ r_c = 0.014; \\ \theta = \arctan(b/a); \\ \Delta x_c = r_c \cos(\pi/2 - \theta); \\ \Delta y_c = r_c \sin(\pi/2 - \theta); \\ x_c = 1 + \Delta x_c; \\ y_c = 1 - \Delta y_c; \\ y_1 = \sqrt{r^2 - (x - \text{sign}(x)a)^2} - b; \\ y_2 = \sqrt{r_c^2 - (x - \text{sign}(x)x_c)^2} + y_c; \\ y_3 = 1 + r_c - \Delta y_c; \\ \text{sign}(x)(y_1), |x| \leq 1; \\ \text{sign}(x)(y_2), 1 < |x| < x_c; \\ \text{sign}(x)(y_3), |x| \geq x_c. \end{array} \right. \quad (3)$$

根据CFal函数和Fal函数表达式,有如下关系:

$$\text{sign}[\text{Fal}(x, \alpha, \delta)] = \text{sign}[\text{CFal}(x, r)]. \quad (4)$$

由式(4)可知,Fal函数与CFal函数收敛方向相同,当满足 $\delta^\alpha < \text{sign}(\delta)(y_1)$ 时,区间 $|x| < 1$ 上每一点,均有 $\dot{x} = -\text{CFal}(x, r)$ 收敛快于 $\dot{x} = -\text{Fal}(x, \alpha, \delta)$ ^[13].

分别取 $r = 1.01, 1.41, 2.01, 4.01$ 时,CFal函数图像如图2所示.

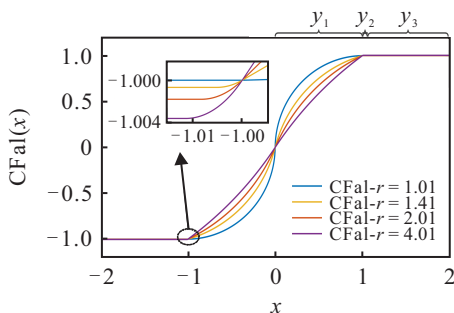


图2 CFal函数特性曲线

由图2和CFal函数表达式可知,该函数为关于原点对称的奇函数,以 x 的正平面域为例进行分析.CFal函数由3部分函数组成,分别记作 y_1, y_2, y_3 ,其中 y_1 作用域为 $x \leq 1$,表示分别过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 两点,半径为 r 的圆弧; y_3 作用域为 $x > 1$,函数为一接近1的常值; y_2 则是在 $x = 1$ 附近对 y_1 和 y_3 进行平滑处理,使得CFal函数连续可导.

根据所提改进Fal函数的功能目标,在误差较大时保持较小的系统增益,对应于CFal函数的第3部分

函数 y_3 ,其输出由坐标 $(1 + \Delta x_c, 1 + r_c - \Delta y_c)$ 决定,根据其表达式关系可知,当 $\theta = \pi/4$ 时, y_2 与 y_3 交点横纵坐标均达到最大,当 $r_c = 0.1$ 时,CFal函数第3部分 $y_3 = 1.03$,并且随着 r_c 的减小, y_3 无限接近于1.为方便后续的证明,固定 $r_c = 0.014$,此时 $y_3 = 1.004 \approx 1$.

当 $r_c = 0.014$ 时, $\Delta x_{c\max} < 0.01$,基于此,在证明CFalFilter稳定性时忽略 y_2 ,CFalFilter输出记为 $y = \text{CFalFilter}(v, K, r)$.

假设系统为

$$\dot{x} = w(x, t) + u. \quad (5)$$

其中: $w(x, t)$ 为系统未知噪声干扰, u 为控制量.

假设 $|w(x, t)| \leq w_0 < K$,取CFalFilter系统控制量 $u_{\text{CFal}}(x) = -K\text{CFal}(x, r)$.下面从控制反馈的角度来证明CFalFilter稳定性.定义Lyapunov函数

$$V = x^2. \quad (6)$$

联立式(3)、(5)和(6),可得:

当 $|x| > 1$ 时

$$\dot{V} = 2x\dot{x} =$$

$$\begin{aligned} & -2xK\text{sign}(x)\left(1 - \frac{w(x, t)}{K\text{sign}(x)}\right) \leq \\ & -2|x|K\left(1 - \frac{w_0}{K\text{sign}(x)}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

满足 $\dot{V} = 2x\dot{x} < 0$.

当 $|x| \leq 1$ 时

$$\dot{V} = 2x\dot{x} =$$

$$\begin{aligned} & 2x(-K\text{sign}(x)(y_1) + w(x, t)) = \\ & -2|x|K\left(y_1 - \frac{w(x, t)}{K\text{sign}(x)}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

当 $b + \frac{w(x, t)}{K\text{sign}(x)} < 0$ 时,不等式 $\dot{V} = 2x\dot{x} < 0$ 恒成立;当 $b + \frac{w(x, t)}{K\text{sign}(x)} \geq 0$ 时,有

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_1) - \frac{w(x, t)}{K\text{sign}(x)} > 0, \\ r^2 - \left(b + \frac{w(x, t)}{K\text{sign}(x)}\right)^2 > (x - \text{sign}(x)a)^2. \end{array} \right. \quad (9)$$

进一步得出式(9)的解为

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{r^2 - b - \left(\frac{w(x, t)}{K}\right)^2} - a < \\ x < \sqrt{r^2 - \left(b - \frac{w(x, t)}{K}\right)^2} - a, \\ a - \sqrt{r^2 - \left(b + \frac{w(x, t)}{K}\right)^2} < \\ x < a + \sqrt{r^2 - \left(b + \frac{w(x, t)}{K}\right)^2}. \end{array} \right. \quad (10)$$

由CFal函数表达式和CFalFilter系统定义可知, $a > 1$ 且 $|w(x, t)| \leq w_0 < K$,则

$$\begin{cases} \left(\sqrt{r^2 - \left(b - \frac{w(x, t)}{K}\right)^2}\right)_{\min} > b; \\ \left(-\sqrt{r^2 - \left(b + \frac{w(x, t)}{K}\right)^2}\right)_{\max} < -b. \end{cases} \quad (11)$$

当满足 $\dot{V} = 2x\dot{x} < 0$ 时, x 取值范围为

$$\begin{cases} -1 < x < \sqrt{r^2 - \left(b + \frac{w_0}{K}\right)^2} - a, \\ a - \sqrt{r^2 - \left(b + \frac{w_0}{K}\right)^2} < x < 1. \end{cases} \quad (12)$$

当 $|x| < 1$,满足式(12)时,控制量 $u_{CFal}(x)$ 使系统具有李雅普诺夫稳定性,并且将系统的稳态误差限制在 $|x| \leq \left|a - \sqrt{r^2 - \left(b + \frac{w_0}{K}\right)^2}\right|$ 范围内,其最大稳态误差范围为 $|x| < 1$.

综合上述对CFal函数和CFalFilter的理论分析,CFal函数符合Fal函数的设计原则并达到所提4个功能目标,相较于FalFilter,构造的CFalFilter同样具有较好的收敛性和稳定性.

2 带滤波器的新型扩张状态观测器设计

2.1 非线性扩张状态观测器介绍

Fal_NESO是ADRC的核心部分,能够对系统扰动的扩张状态和整体进行辨识.考虑二阶系统扩张状态后方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = \dot{f}(x_1, x_2, w(t), t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (13)$$

其中: x_1, x_2 为原二阶系统的状态变量; $x_3 = f(x_1, x_2, w(t), t)$ 为系统的扩张状态,表示系统所受内外扰动的总和.

假设系统所受总扰动 $f(x_1, x_2, w(t), t)$ 可微分,则该二阶系统的Fal_NESO表达式为

$$\begin{cases} \varepsilon = z_1 - y, \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}\varepsilon, \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}\text{Fal}(\varepsilon, \alpha_1, \delta_1), \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}\text{Fal}(\varepsilon, \alpha_2, \delta_2). \end{cases} \quad (14)$$

其中: y 为系统实际输出, z_1, z_2 为Fal_NESO跟踪系统实际输出及其微分信号, z_3 为Fal_NESO对系统扰动估计信号, $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 为Fal_NESO增益.

由文献[8]可知,Fal_NESO稳态误差为 $|\varepsilon| < 1$.

2.2 非线性扩张状态观测器的改进

将式(3)表示的CFal函数代替式(14)中的Fal函数,构建非线性扩张状态观测器(CFal_NESO)为

$$\begin{cases} \varepsilon = z_1 - y, \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}\varepsilon, \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}\text{CFal}(\varepsilon, r_1), \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}\text{CFal}(\varepsilon, r_2). \end{cases} \quad (15)$$

与文献[8]对Fal_NESO的收敛条件分析过程同理,可得:当CFal_NESO参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 满足下式关系时,才能使CFal_NESO稳定:

$$\beta_{01}\beta_{02} - \beta_{03} > 0. \quad (16)$$

令式(13)中状态 $\dot{x}_3 = \dot{f}(x_1, x_2, w(t), t) = w_0(t)$,且 $|w_0|_{\max} < \beta_{03}$.当观测系统稳定时,观测误差趋近于0,此时 $\text{CFal}(x, r) = \text{sign}(x)(y_1)$,则结合式(13)和(15)可得观测误差方程

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \beta_{01}e_1, e_1 = \varepsilon; \\ \dot{e}_2 = e_3 - \beta_{02}\text{CFal}(e_1, r), e_2 = z_2 - x_2; \\ \dot{e}_3 = w_0 - \beta_{03}\text{CFal}(e_1, r), e_3 = z_3 - x_3. \end{cases} \quad (17)$$

当 $e_1 \rightarrow 0^+$ 时,误差表达式为

$$\begin{cases} e_2 = \beta_{01}e_1, \\ e_3 = \beta_{02}(\sqrt{r^2 - (e_1 - a)^2} - b), \\ w_0 = \beta_{03}(\sqrt{r^2 - (e_1 - a)^2} - b). \end{cases} \quad (18)$$

当 $w_0 = 0$ 时,误差 $e_1 = 0$;当 $w_0 = \beta_{03}$ 时,误差 e_1 最大.由式(18)可得

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sqrt{r^2 - \left(\frac{w_0}{\beta_{03}} + b\right)^2} + a < \\ &= -\sqrt{r^2 - (1 + b)^2} + a = \\ &= a - b = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

当 $e_1 \rightarrow 0^-$ 时,同理可得,当 $w_0 = -\beta_{03}$ 时,误差 e_1 最大,为

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{r^2 - \left(b - \frac{w_0}{\beta_{03}}\right)^2} - a > \\ &= \sqrt{r^2 - (b + 1)^2} - a = \\ &= b - a = -1. \end{aligned} \quad (20)$$

结合式(19)和(20)可知,CFal_NESO的最大稳态误差范围 $|e_1| < 1$,与Fal_NESO最大稳态误差范围趋近.对比CFal函数分析可知,采用CFal函数代替Fal函数构造非线性扩张状态观测器不会改变收敛性和最大稳态误差范围.

2.3 新型扩张状态观测器设计

结合 Fal 函数滤波器和非线性扩张状态观测器构成的新型观测器,能够综合利用它们各自在处理非线性系统和高斯噪声环境下的优势,提高状态估计的准确性和系统的鲁棒性.文献[14]通过对线性扩张状态观测器的频带特性分析可知,随着观测器增益的增加,观测器的跟踪速度加快,但同时高频带增益随之增加,噪声放大作用越来越明显.而线性观测器是非线性观测器的一种特殊形式,即令 Fal 函数中参数 $\alpha = 1$,因此 Fal_NESO 中也存在相同的情况.

针对此问题,在观测器输入环节分别引入一阶惯性滤波(Inertial-Filter)环节 $\frac{1}{(Ts+1)}$ 和 CFalFilter 进行预滤波,其频带特性曲线如图3所示.

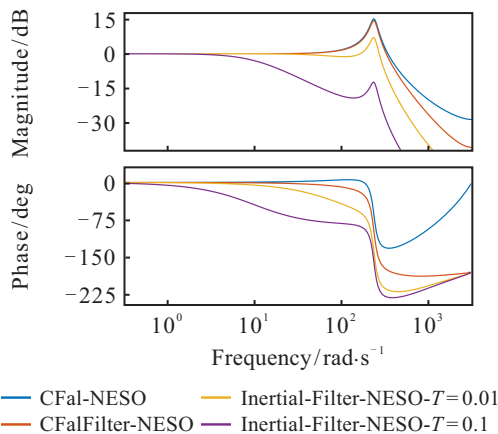


图3 新型观测器的频带特性曲线

由图3可知,引入一阶惯性滤波环节后,时间常数 T 越大,CFal_NESO 对噪声的抑制能力越强,但同时造成的相位延时越严重;而引入 CFalFilter,非线性反馈使得滤波器输出信号迅速逼近输入信号,使得 CFal_NESO 具有良好的滤波效果,且跟踪速度较快.

综合上述分析,采用 CFalFilter 和 CFal_NESO 相结合的形式,得到一种新型扩张状态观测器(CFalFilter_CFal_NESO),其一般形式如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = \text{CFalFilter}(y, K, r_0), \\ \varepsilon = z_1 - y_0, \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}\varepsilon, \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}\text{CFal}(\varepsilon, r_1), \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}\text{CFal}(\varepsilon, r_2). \end{cases} \quad (21)$$

通过适当地调整 CFalFilter 和 CFal_NESO 的参数,即可使 z_1 、 z_2 分别估计系统状态值 x_1 、 x_2 , z_3 估计系统扰动值 x_3 .

3 仿真实例

结合上述对 CFal 函数代替 Fal 函数构造滤波器和非线性扩张状态观测器的理论分析,通过离散化仿

真实例分别验证 CFalFilter、CFal_NESO 和 CFalFilter-CFal_NESO 的输出性能.

3.1 Fal 函数滤波器仿真实验

搭建 CFalFilter 离散化仿真系统,仿真周期为 0.001 s,输入幅值为 1.5 的阶跃信号,含均值为 0,均方差为 0.003 的高斯白噪声.令参数 $K = 22$,取 $r = 1.01, 1.41, 2.01, 4.01$,CFalFilter 输出曲线如图4所示.

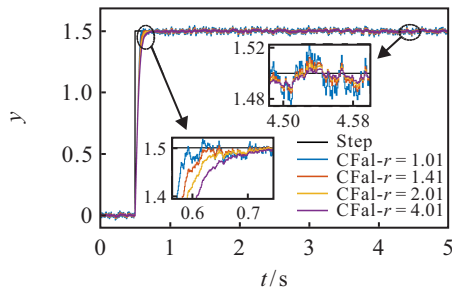


图4 CFalFilter 输出曲线(r 变化)

由图4可知,参数 r 越小时,CFalFilter 跟踪速度越快,但对噪声信号的滤波效果会变差,反之同理.

令参数 $r = 1.41$,取 $K = 17, 22, 27, 32$,CFalFilter 输出曲线如图5所示.

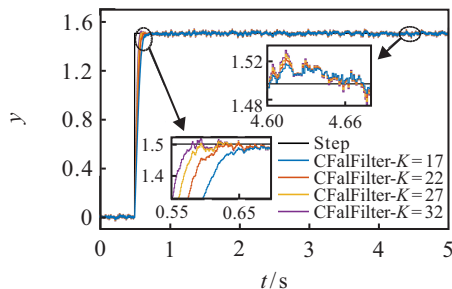


图5 CFalFilter 输出曲线(K 变化)

由图5可知,随着参数 K 的增加,CFalFilter 跟踪速度加快,但对噪声信号的滤波效果会变差,反之同理.因此,在 CFalFilter 应用时,需要根据实际情况在参数 K 与 r 之间做一个综合考虑.

为了验证本文所提 CFal 函数的优越性,引入文献[8]中的 Faln 函数和文献[9]中的 Galn 函数进行对比,其表达式分别如下:

$$\text{Faln}(x, \alpha, \delta) = \begin{cases} \frac{x}{\delta^{1-\alpha}}, & |x| \leq \delta; \\ \text{sign}(x)|x|^\alpha, & \delta < |x| < 1; \\ \text{sign}(x), & |x| > 1. \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{Galn}(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & |x| \leq 1; \\ \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}, & x > 1; \\ -\frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}, & x < -1. \end{cases} \quad (23)$$

由式(22)和(23)构成的滤波器记为 FalnFilter 和 GalnFilter.给定输入信号是幅值为 1.5 的阶跃信号,

选择FalFilter参数为 $K = 20, \alpha = 0.3, \delta = 0.01$. 保持滤波器跟踪速度趋近, 设定参数如下: CFalFilter: $K = 22, r = 1.06$; FalnFilter: $K = 22, \alpha = 0.3, \delta = 0.01$; GalnFilter: $K = 28, \sigma = 0.5$. 4种Fal函数滤波器输出 y 和控制量 u 输出曲线如图6所示.

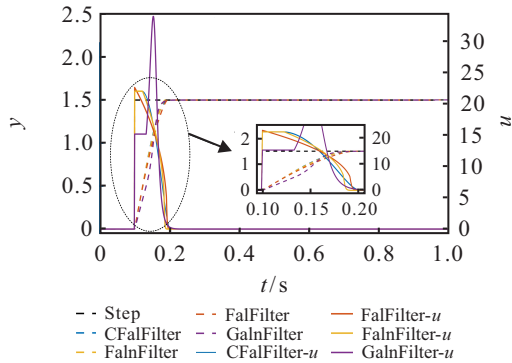


图6 4种Fal函数滤波器输出和控制量 u 输出曲线

由图6可知, 4种滤波器都能较好地跟踪输入信号, 但跟踪过程存在差异. 可将Fal函数滤波器视为被控对象是一个积分环节的单闭环非线性比例控制系统, 从控制角度分析, 当系统误差 $|e| > 1$ 时, CFalFilter、FalnFilter和GalnFilter控制量输出均为恒定值, 即Fal函数输出与比例 K 的乘积; 当系统误差 $|e| \approx 1$ 时, FalnFilter和GalnFilter控制量输出均会发生突变, GalnFilter控制量会突增, 且控制量最大值大于 K , FalnFilter控制量开始单调减小, 而CFalFilter和FalnFilter控制量不会发生突变; 当系统误差 $|e| < 1$ 时, FalFilter和FalnFilter在 $|e| = \delta$ 处Fal函数发生线性段和非线性段的切换, 会导致控制量不平顺地急剧下降, 虽然GalnFilter控制量不会突变, 但过程中控制量变化范围较大, 而CFalFilter控制输出则是单调平顺下降, 直至系统稳定. 对照图6输出结果, 以 $e \geq 0$ 为例, Fal函数滤波器控制输出过程中性能变化如表1所示. 其中: $u_{e>1}$ 为误差 $e > 1$ 时控制量变化范围; $u_{e<1}$ 为误差 $e < 1$ 时控制量变化范围; x_e 为控制量突变点; $k_{e<1}$ 为误差 $e < 1$ 时控制量变化率.

表1 Fal函数滤波器控制输出过程中性能变化

滤波器	$u_{e>1}$	$u_{e<1}$	x_e	$k_{e<1}$
FalFilter	$1.13K \sim K$	$K \sim 0$	$e = \delta$	\searrow
FalnFilter	K	$K \sim 0$	$e = 1, \delta$	\searrow
GalnFilter	$0.54K$	$1.21K \sim 0$	$e = 1$	$\nearrow \searrow$
CFalFilter	K	$K \sim 0$	-	\searrow

综合上述分析可知, CFalFilter能够在保持跟踪速度趋近的前提下, 控制量输出无突变, 并且以较平滑的控制速率使误差 e 趋于0, 既解决了Fal函数的拐点不平顺以及控制量突变而导致系统性能下降问题,

又提高了控制器的可靠性.

进一步测试4种Fal函数滤波器在噪声情况下的输出效果, 同样以高斯白噪声信号作为噪声进行测试, Fal函数滤波器输出如图7所示, 系统输出 y 与输入信号 v 误差的ITAE和最大稳态误差见表2.

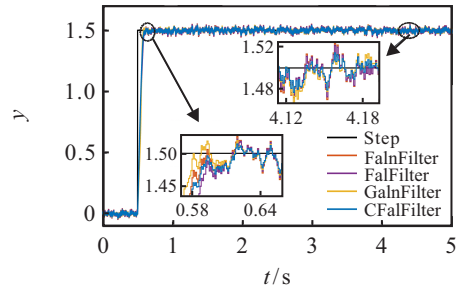


图7 输入含噪声时4种Fal函数滤波器输出曲线

表2 4种Fal函数滤波器主要性能指标

滤波器	ITAE	最大稳态误差
FalFilter	118.91	0.056
FalnFilter	118.14	0.059
GalnFilter	114.23	0.042
CFalFilter	104.27	0.039

由图7可知, 4种滤波器均具有良好的滤波效果. 结合表2分析可知, CFalFilter在跟踪给定信号时, 最大稳态误差为0.039, ITAE性能指标为104.27, 相比于FalFilter、FalnFilter和GalnFilter, ITAE性能提升了12.31%、11.74%和8.71%, 最大稳态误差性能提升了30.35%、33.89%和7.14%. 表明采用CFal函数替换Fal函数构造滤波器能达到更好的滤波效果.

3.2 非线性扩张状态观测器仿真实验

下面分析Fal、Faln、Galn和CFal函数在非线性和非线性扩张状态观测器中的应用, 分别记为Fal_NESO、Faln_NESO、Galn_NESO和CFal_NESO. 考虑二阶非线性对象^[15]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -10x_1^3 - x_1 - 2 \cos x_1 + v_x; \\ y = x_1 + v_y. \end{cases} \quad (24)$$

其中: x_1 、 x_2 为系统内部状态, y 为系统输出, $v_x = 1.5 \sin(10t)$ 为内扰, v_y 为输出环节噪声.

将上述非线性对象的扰动扩张为一个新的状态变量 $x_3 = -10x_1^3 - x_1 - 2 \cos x_1 + v_x$, 并将非线性对象近似离散化, 可分别搭建4种非线性扩张状态观测器的离散化模型, 仿真周期为0.001 s, 系统的内外扰动可以通过计算分别得出. 根据文献[16]提出的方法, 观测器增益为 $\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 3000, \beta_{03} = 30000$; 配置观测器Fal函数参数: $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.25, \delta_1 =$

$\delta_2 = 0.005$; Galn函数参数: $\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0.25$; CFal函数: $c_1 = 1.5, c_2 = 1.09$. 3种观测器输出曲线见图8.

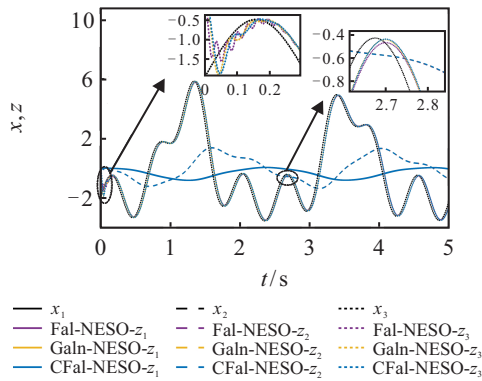


图8 3种观测器输出曲线

稳态时, 观测器跟踪误差 $\varepsilon \rightarrow 0$, Fal_NESO和Faln_NESO输出曲线表现出高度重合. 观测器估计扰动项 z_3 与Fal函数输出成正比例关系, Fal_NESO和Faln_NESO在Fal函数切换点 $\varepsilon = 0.005$ 处的不平稳切换容易产生图8所示的抖振现象, 而CFal函数和Galn函数在误差 $\varepsilon < 1$ 内连续可导, 能够很大程度抑制抖振.

考虑测量环节噪声干扰时, 引入均值为0、均方差为0.003的高斯白噪声, 3种观测器输出 z_1, z_2, z_3 曲线如图9~图11所示, 主要性能指标见表3.

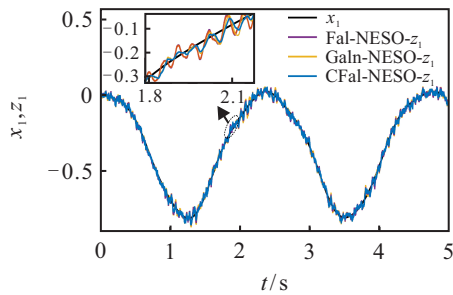


图9 3种观测器输出 z_1 曲线

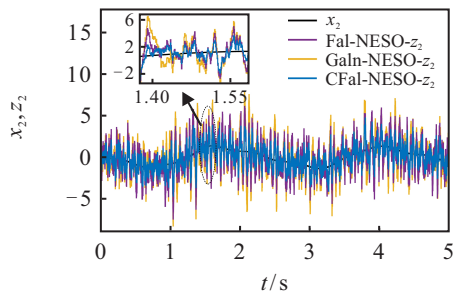


图10 3种观测器输出 z_2 曲线

表3 3种观测器主要性能指标

观测器	ITAE			最大稳态误差
	z_1, x_1	z_2, x_2	z_3, x_3	
Fal_NESO	79.13	7 003.35	152 184.98	0.071
Galn_NESO	84.76	8 280.66	303 434.47	0.079
CFal_NESO	68.18	4 333.66	76 689.51	0.059

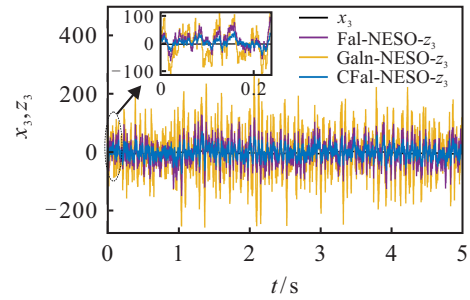


图11 3种观测器输出 z_3 曲线

针对本文实验对象, 噪声对系统输出 y 影响有限, 能够保证观测器的跟踪误差 $\varepsilon < 1$, 因此在系统含测量噪声情况下, Fal_NESO和Faln_NESO输出曲线也表现出高度重合. 由图9~图11可知, 3观测器均具有良好的观测性能, 并具有一定的滤波效果. 结合表3分析可知, CFal_NESO输出 z_1, z_2, z_3 与系统状态 x_1, x_2, x_3 误差的ITAE和最大稳态误差性能指标相比于Fal_NESO分别提高了13.84%、38.12%、49.61%和16.9%; 相比于Galn_NESO分别提高了19.56%、47.67%、61.65%和74.73%. 这表明由CFal函数构造的观测器性能最佳.

3.3 新型观测器仿真实验

不改变FalFilter和Fal_NESO参数, 在3.2小节的基础上对4种Fal函数构成的新型观测器进行测试, 分别记为FalScheme、FalnScheme、GalnScheme和CFalScheme. 4种新型观测器的输出如图12所示.

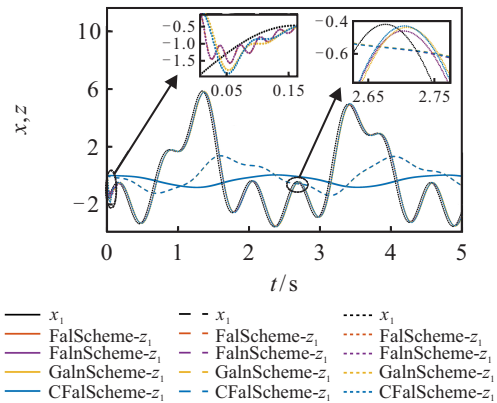


图12 4种新型观测器输出曲线

由新型观测器表达式和图12可知, 新型观测器中引入了FalFilter, 导致通过的信号产生滞后, 使得新型观测器输出信号略微滞后于传统观测器. FalScheme和FalnScheme仍会造成输出项 z_3 的抖振, GalnScheme和CFalScheme能保持较好的输出效果, 但GalnScheme输出更加滞后于CFalScheme.

同样引入 v_y 为高斯白噪声对新型观测器性能进行测试. 4种新型观测器输出 z_1, z_2, z_3 曲线如图13~图15所示, 主要性能指标见表4.

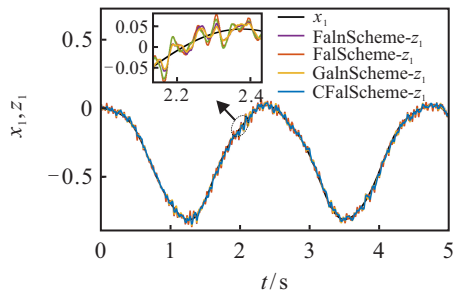


图 13 4种新型观测器输出 z_1 曲线

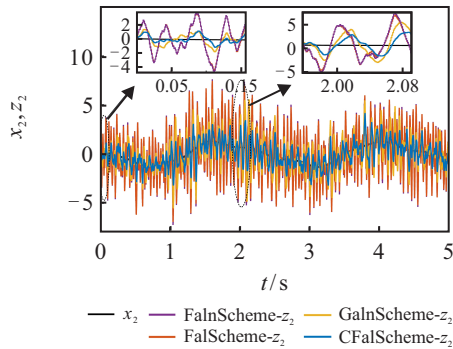


图 14 4种新型观测器输出 z_2 曲线

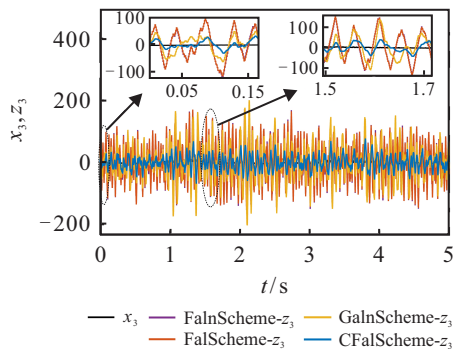


图 15 4种新型观测器输出 z_3 曲线

表 4 4种新型观测器主要性能指标

新型观测器	ITAE			最大稳态误差
	z_1, x_1	z_2, x_2	z_3, x_3	
FalScheme	84.41	9 444.56	248 518.61	0.067
FalnScheme	86.01	9 637.51	250 404.22	0.068
GalnScheme	69.09	5 949.11	222 433.27	0.051
CFalScheme	61.23	3 675.73	85 301.41	0.047

由图13~图15可知,4种新型观测器的输出性能存在一定差异.结合表3和表4可知,相比于传统结构的观测器,新型观测器的输入项由原本的对象输出变为滤波器输出,因此新型观测器的扰动估计也包括滤波器部分,会使得新型观测器输出扰动项 z_3 的性能指标与传统结构的观测器差异较大.综合来看,FalScheme和FalnScheme输出观测值的ITAE指标均在增加,而GalnScheme和CFalScheme输出的跟踪项 z_1 和微分项 z_2 的ITAE值减小,说明由Galn和CFal函数构成的新型观测器输出 z_1 、 z_2 质量的提高

超过了滤波器带来的影响,使得观测器整体性能得到进一步提升.相比于GalnScheme,CFalScheme输出 z_1 、 z_2 、 z_3 与系统状态 x_1 、 x_2 、 x_3 误差的ITAE和最大稳态误差性能指标分别提高了11.38%、38.21%、61.65%和7.84%.

综合第3节对Fal函数滤波器、非线性扩张状态观测器和新型观测器的对比性能分析可知,CFal函数综合了Fal、Faln和Galn函数的优势,即在误差较大时保持较小的输出增益,在稳态误差范围内采用较小增益的非线性结构来放大,且输出平缓,使其构造的滤波器、观测器和新型观测器在测量环节含噪声干扰情况下性能都得到明显提升.

4 结论

本文提出了一种在定义域内连续可导且仅有一个待整定参数的CFal函数,并证明了所提CFal函数代替Fal函数构造滤波器和非线性扩张状态观测器的可行性;基于频域特性曲线分析了Fal函数滤波器联合非线性扩张状态观测器对噪声的抑制性能,并得到一种处理测量环节噪声的新型观测器;最后结合典型的对象,分别对所提CFal函数构成的滤波器、非线性扩张状态观测器和新型观测器进行离散化仿真实验.结果表明,相比于Fal、Faln和Galn函数而言,由CFal函数构造的滤波器、非线性扩张状态观测器和新型观测器性能整体得到提升,而且参数整定更加简单.基于CFal函数构造的滤波器、非线性扩张状态观测器和新型观测器不仅适用于本文实验对象,对于大多数非线性、高阶系统的滤波和观测均具有适用性.

参考文献(References)

[1] 李醒飞,王凡,拓卫晓,等.基于NOB的线性自抗扰控制在惯性参考单元中的应用[J].控制与决策,2024,39(2):483-489.
(Li X F, Wang F, Tuo W X, et al. Application of linear active disturbance rejection control based on NOB in inertial reference unit[J]. Control and Decision, 2024, 39(2): 483-489.)

[2] 苏春波,汪成文,苑永亮,等.阀控电液伺服压力脉冲实验自抗扰控制方法[J].控制与决策,2024,39(6):1927-1935.
(Su C B, Wang C W, Yuan Y L, et al. Active disturbance rejection control method for valve-controlled electro-hydraulic servo pressure-pulse system[J]. Control and Decision, 2024, 39(6): 1927-1935.)

[3] 韩小霞,谢建,冯永保,等.基于模型信息的电静液作动器降阶线性自抗扰控制[J].控制与决策,2023,38(3):681-689.
(Han X X, Xie J, Feng Y B, et al. Reduced order linear active disturbance rejection control based on model information of electro-hydrostatic actuator[J]. Control

- and Decision, 2023, 38(3): 681-689.)
- [4] 高阳, 吴文海, 高丽. 高阶不确定非线性系统的线性自抗扰控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(2): 483-491.
(Gao Y, Wu W H, Gao L. Linear active disturbance rejection control for high-order nonlinear systems with uncertainty[J]. Control and Decision, 2020, 35(2): 483-491.)
- [5] 王佑, 吴振龙, 薛亚丽, 等. 高阶大惯性系统的线性自抗扰控制器设计[J]. 控制与决策, 2023, 38(4): 999-1007.
(Wang Y, Wu Z L, Xue Y L, et al. Design of linear active disturbance rejection controller for high-order large inertia system[J]. Control and Decision, 2023, 38(4): 999-1007.)
- [6] Zhong S, Huang Y, Guo L. An ADRC-based PID tuning rule[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(18): 9542-9555.
- [7] 王宇航, 姚郁, 马克茂. Fal函数滤波器的分析及应用[J]. 电机与控制学报, 2010, 14(11): 88-91.
(Wang Y H, Yao Y, Ma K M. Analysis and application of Fal function filter[J]. Journal of Electrical Machines and Control, 2010, 14(11): 88-91.)
- [8] 陈志旺, 张子振, 曹玉洁. 自抗扰fal函数改进及在四旋翼姿态控制中的应用[J]. 控制与决策, 2018, 33(10): 1901-1907.
(Chen Z W, Zhang Z Z, Cao Y J. Fal function improvement of ADRC and its application in quadrotor aircraft attitude control[J]. Control and Decision, 2018, 33(10): 1901-1907.)
- [9] 杨文奇, 卢建华, 姜旭, 等. 基于改进ESO的四旋翼姿态自抗扰控制器设计[J]. 系统工程与电子技术, 2022, 44(12): 3792-3799.
(Yang W Q, Lu J H, Jiang X, et al. Design of quadrotor attitude active disturbance rejection controller based on improved ESO[J]. System Engineering and Electronic Technology, 2022, 44(12): 3792-3799.)
- [10] 周振雄, 杨建东, 曲永印, 等. 基于自抗扰控制器的磁悬浮平台水平推力控制[J]. 机械工程学报, 2008, 44(9): 193-199.
(Zhou Z X, Yang J D, Qu Y Y, et al. Horizontal thrust control of magnetic suspension platform based on active disturbance rejection controller[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(9): 193-199.)
- [11] 刘宝莹, 李明秋, 杨俊威. 基于改进型自抗扰的四旋翼飞行器姿态控制[J]. 指挥控制与仿真, 2021, 43(2): 98-102.
(Liu B Y, Li M Q, Yang J W. Attitude control of quadrotor aircraft based on improved ADRC[J]. Command Control & Simulation, 2021, 43(2): 98-102.)
- [12] 于洪国, 康忠健, 陈瑶. 基于双曲正切函数的二阶时变参数扩张状态观测器[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(4): 530-534.
(Yu H G, Kang Z J, Chen Y. Time-varying parameter second-order extended state observer based on hyperbolic tangent function[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(4): 530-534.)
- [13] 蒲明, 刘鹏, 熊皓. Fal函数的改进及3种新型非线性扩张状态观测器[J]. 控制与决策, 2021, 36(7): 1655-1662.
(Pu M, Liu P, Xiong A. Advanced fal function and three novel nonlinear extended state observers[J]. Control and Decision, 2021, 36(7): 1655-1662.)
- [14] 袁东, 马晓军, 曾庆含, 等. 二阶系统线性自抗扰控制器频带特性与参数配置研究[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1630-1640.
(Yuan D, Ma X J, Zeng Q H, et al. Research on frequency-band characteristics and parameters configuration of linear active disturbance rejection control for second-order systems[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(12): 1630-1640.)
- [15] 宋金来, 甘作新, 韩京清. 自抗扰控制技术滤波特性的研究[J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 110-112.
(Song J L, Gan Z X, Han J Q. Study of active disturbance rejection controller on filtering[J]. Control and Decision, 2003, 18(1): 110-112.)
- [16] 韩京清. 扩张状态观测器参数与菲波纳奇数列[J]. 控制工程, 2008, 202: 13.
(Han J Q. Expansion of state observer parameters with Fibonacci series[J]. Control Engineering, 2008, 202: 13.)

作者简介

秦耀(1998—), 男, 博士生, 主要研究方向为自抗扰控制理论与应用, E-mail: 912283363@qq.com;

杨杰(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为磁悬浮系统、轨道交通控制, E-mail: yangjie@jxust.edu.cn;

刘书云(1996—), 男, 助教, 硕士, 主要研究方向为磁悬浮系统控制, E-mail: 1404187598@qq.com;

曾海金(1999—), 男, 助教, 硕士, 主要研究方向为现代控制理论与应用, E-mail: 2162586736@qq.com.