

基于分层混合统计相似度的鲁棒自适应卡尔曼滤波

王国庆, 于明龙, 朱兆磊, 马磊, 杨春雨[†]

(中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221116)

摘要: 在统计相似度框架内研究非高斯噪声系统的鲁棒状态估计问题. 针对现有框架忽略噪声向量不同维数统计特性差异导致估计精度受限的缺陷, 提出分层混合统计相似度的概念, 以提升局部度量捕捉高阶统计特性的自适应能力. 在此基础上, 通过最大化分层混合相似度的杰森不等式下限获得近似最优后验估计. 为进一步提升算法对于噪声方差的自适应能力, 进一步利用矩阵相似度, 在分层混合统计相似度的框架下通过固定点迭代策略交替求解代价函数的下界, 实现系统状态和不准确的预测协方差和量测噪声协方差矩阵的联合估计. 目标跟踪的仿真实验表明, 所提出算法与同类算法相比具有更好的估计精度和鲁棒性.

关键词: 卡尔曼滤波; 统计相似度; 非高斯噪声; 鲁棒状态估计; 自适应算法; 目标跟踪

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2026.0003

引用格式: 王国庆, 于明龙, 朱兆磊, 等. 基于分层混合统计相似度的鲁棒自适应卡尔曼滤波 [J]. 控制与决策.

A novel robust adaptive kalman filter based on hierarchical mixture statistical similarity measure

WANG Guo-qing, YU Ming-long, ZHU Zhao-lei, MA Lei, YANG Chun-yu[†]

(School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: This paper investigates robust state estimation for systems with non-Gaussian noise within the statistical similarity measure framework. To address the limitation of existing approaches, which often overlook the differences in noise vector elements and their impact on estimation accuracy, we first introduce the concept of hierarchical mixture statistical similarity measure (HMSSM), which effectively enhances the adaptive capability of local metrics to capture higher-order statistical properties. Building upon this, the optimal posterior estimate is approximated by maximizing Jensen's lower bound of HMSSM. To further enhance the adaptability of noise covariance, we introduce matrix similarity into the framework. Within the HMSSM framework, the system state together with the inaccurately predicted covariance and measurement covariance matrices are jointly estimated by optimizing the lower bound of the defined combination of cost functions through alternating fixed-point iterations. Simulation experiments for target tracking show that our proposed algorithm delivers superior estimation accuracy and robustness compared to similar algorithms.

Keywords: Kalman filter; statistical similarity measure; non-Gaussian noise; robust state estimation; adaptive algorithm; target tracking

0 引言

以卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF) 为代表的状态估计算法是目标跟踪、协同定位、故障诊断、信息融合等领域的核心技术. 然而在水下、地下、室内等复杂应用环境以及复杂电磁干扰以及对抗环境下^[1-5], 显著的非高斯噪声会导致面向高斯噪声假设设计的状态估计算法性能下降, 如何提高状态估计算法在

非高斯噪声下的估计性能是本领域的重要研究内容.

针对非高斯噪声系统, 一类策略是构建鲁棒代价函数, 设计相应的状态估计器. 例如, 借助 M 估计的思想, 文献 [6] 构建基于 Huber 函数的代价函数获得基于 Huber 的 KF 算法 (Huber KF, HKF). 利用相关熵度量定义代价函数, 通过求导其极值可以获得一系列的最下的最大相关熵 KF (Maximum Correntropy

收稿日期: 2026-01-02; 录用日期: 2026-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62373362, U24A20272, 62573418); 中国博士后科学基金项目 (2025T180480); 江苏高校青蓝工程项目 (号?).

责任编委: 张丹.

[†]通信作者. E-mail: chunyuang@cumt.edu.cn.

KF, MCKF)^[7-10], 通过引入新的调整系数来改变滤波增益实现对于非高斯噪声的抑制. 然而, HKF 和 MCKF 均是基于距离思想抑制偏离高斯分布的数据的影响, 虽然具有较好的普适性, 但是并未充分利用噪声的统计特性, 因此此类估计算法的性能仍有提升空间.

另外一种策略是对于非高斯噪声采用特定的分布进行建模, 并利用迭代优化等方式进行分布参数等隐变量求解. 文献 [11] 采用学生 t 分布建模具有厚尾特性的非高斯噪声, 利用变分贝叶斯 (Variation Bayesian, VB) 方法推导基于学生 t 分布的鲁棒 KF (Robust Student's t based KF, RSTKF). 在此基础上, 文献 [12] 利用伽马分布对学生 t 分布的自由度参数进行建模, 进一步提高了 RSTKF 的估计精度. 此外, 文献 [13] 提出了基于多元拉普拉斯分布的 KF, 避免了自由度参数的选择, 具有更好的估计精度. 然而, 实际中的噪声通常具有非平稳性. 尽管已有研究尝试通过引入伯努利分布以实现简单的模型切换, 或采用更复杂的模型对噪声分布进行建模, 但过多的噪声参数往往会带来显著的计算负担.

针对非高斯系统的状态估计问题, 尽管上述 HKF, MCKF, RSTKF 都可以获得比标准 KF 更好的估计精度, 但是如果能在同一框架下实现两类策略的优势融合, 则有望进一步提高估计效果. 基于该思想, 文献 [14] 提出了一种基于统计相似度 (Statistical Similarity Measure, SSM) 的状态估计方法, 将 HKF, MCKF 和 RSTKF 三种算法纳入到同一框架中, 进一步提升了估计精度. 由于 SSM 框架的估计精度依赖预选的名义噪声协方差矩阵, 在实际应用中, 真实的噪声协方差矩阵可能具有时变特性, 这会导致预选的名义噪声协方差矩阵不准确, 影响估计精度. 因此, 文献 [15] 再次框架下进一步提出了自适应离群鲁棒状态估计器 (Adaptive Outlier-Robust State Estimator, AORSE), 通过构建基于 SSM 的混合代价函数, 同时估计噪声协方差矩阵和状态向量. 值得注意的是, 在状态空间模型中, 不同维度的状态变量和测量变量往往各不相同, 为进一步提升 AORSE 的鲁棒性, 文献 [16] 提出了一种多重离群鲁棒卡尔曼滤波 (Multiple-Outlier-Robust KF, MORKF), 通过最大化基于多维统计相似度的代价函数, 有效提升了不同维度下的估计性能. 尽管 AORSE 和 MORKF 在应对噪声干扰和状态变量差异性方面具有较好的效果, 然而, 这两种方法分别侧重于噪声建模或状态耦合问题, 导致其在复杂多维时变非高斯噪声环境中的估计精度和稳定性仍受限制^[17-20].

在水下、井下、具有多路径效应的城市环境等复

杂多维时变非高斯噪声环境中, 现有方法通常侧重于特定类型的噪声进行建模, 导致其在面对复杂非高斯噪声时滤波精度下降, 针对上述问题, 本文引入一种分层混合相似度 (Hierarchical Mixture Statistical Similarity Measures, HMSSM), 提出一种新的基于分层混合统计相似度的鲁棒自适应卡尔曼滤波 (Robust Adaptive KF based on HMSSM, HMSSMRAKF). 本文主要贡献有三: 1) 提出一种新的分层混合统计相似度, 进一步提高了相似度函数对于不同维度噪声差异的适应能力; 2) 在 HMSSM 框架下引入矩阵统计相似度, 实现系统状态与协方差矩阵的联合自适应估计; 3) 构建了基于 HMSSM 的混合代价函数, 通过最大化其下界, 得到了代价函数的解析解. 目标跟踪实验表明, 所提出的方法较现有方法具有更好的估计效果.

1 基础理论

1.1 分层混合统计相似度

给定两个随机变量 α 和 β , 现有的统计相似度基于特定的相似度函数 $f(\cdot)$ 定义误差矢量 $\epsilon = \alpha - \beta$, 其表达式可以表示为:

$$\begin{aligned} s(\alpha, \beta) &= \mathbb{E}_{\alpha, \beta} [f(\|\alpha - \beta\|^2)], \\ &= \iint_{\alpha, \beta} f(\|\alpha - \beta\|^2) q(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $q(\alpha, \beta)$ 表示向量对 (α, β) 的联合概率密度函数 (Probability Density Function, PDF).

将误差向量的协方差信息 Σ 考虑在内, SSM 可以进一步表示为:

$$s(\alpha, \beta) = \iint_{\alpha, \beta} f(\|\mathbf{S}_{\Sigma}(\alpha - \beta)\|^2) q(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (2)$$

其中, \mathbf{S}_{Σ} 表示为误差协方差矩阵的均方根分解阵.

为增强在复杂变化的噪声场景下 SSM 度量的适应能力, 本文定义的 HMSSM 如下:

$$\begin{aligned} s_F(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \eta_1 \iint_{\alpha, \beta} f_1(\|\mathbf{B}_{\Sigma, i}(\alpha - \beta)\|^2) dq(\alpha, \beta) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \eta_2 \iint_{\alpha, \beta} f_2(\|\mathbf{B}_{\Sigma, i}(\alpha - \beta)\|^2) dq(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{B}_{\Sigma, i}$ 为逆均方根分解矩阵的列向量, η_1 和 η_2 表示相似度函数的权重因子, 满足 $\eta_1 + \eta_2 = 1$. $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 表示不同的相似度函数, 具体表达式为:

$$f_1(\epsilon) = \kappa^2 \exp\left(\frac{d - \epsilon}{2\kappa^2}\right), \quad (4)$$

$$f_2(\epsilon) = -\sqrt{(\omega + d)(\omega + \epsilon)}, \quad (5)$$

其中, κ 表示核带宽大小, d 表示估计向量的维度,

ω 表示自由度参数.

本文所提出的 HMSSM 通过引入权重因子构造复合结构的相似度函数, 能够在复杂动态非高斯噪声下获得更好的效果.

1.2 问题描述

考虑如下线性加性噪声系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (6)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (7)$$

其中, k 表示离散时间, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$ 为量测量, $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 分别为已知的状态转移矩阵和量测矩阵, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$ 分别为非高斯的过程和量测噪声向量, 且其标称噪声方差矩阵分别为 $\tilde{\mathbf{Q}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}_k$. 特别的, 两个噪声向量在不同维数上的非高斯特性时变且变化趋势各异. 上述复杂非高斯噪声对于现有的状态估计方法提出了挑战, 为此本文接下来在统计相似度框架下引入新的度量设计鲁棒代价函数, 在此基础上进行估计算法设计.

2 主要工作

2.1 基于 HMSSM 的鲁棒卡尔曼滤波

本文提出的鲁棒卡尔曼滤波算法 HMSSMRKF 同样包含时间更新和量测更新步骤. 假设已经得到上一时刻的后验估计结果为高斯分布, 则预测状态向量 $\mathbf{x}_{k|k-1}$ 和预测误差协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 分别为:

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1|k-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \tilde{\mathbf{Q}}_k, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$ 和 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 分别表示上一时刻的后验状态估计向量和后验误差协方差矩阵.

基于所提出的 HMSSM, 算法的量测更新可以通过最大化以下代价函数来获得

$$q^*(\mathbf{x}_k) = \arg \max_{\mathbf{x}_k} \{J(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)\}, \quad (10)$$

其中代价函数具体表示为

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^n \eta_l \int f_{l,x}([\mathbf{T}_{k,i}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})]^2) q(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k + \\ & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^m \eta_l \int f_{l,z}([\mathbf{U}_{k,j}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)]^2) q(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

其中, $f_x(\cdot)$ 和 $f_z(\cdot)$ 分别表示状态向量和量测量的相似度函数. $\mathbf{T}_{k,i}$ 和 $\mathbf{U}_{k,j}$ 分别为逆平方根矩阵 $\mathbf{S}_{k|k-1}$ 和 \mathbf{S}_{R_k} 的列向量, 即

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T, \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{S}_{R_k} \mathbf{S}_{R_k}^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} = [\mathbf{T}_{k,1}^T, \mathbf{T}_{k,2}^T, \dots, \mathbf{T}_{k,n}^T]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{S}_{R_k}^{-1} = [\mathbf{U}_{k,1}^T, \mathbf{U}_{k,2}^T, \dots, \mathbf{U}_{k,m}^T]^T. \quad (14)$$

由于 $q(\mathbf{x}_k)$ 精确的 PDF 服从非高斯特性, 其准确的闭式解难以描述, 这将导致代价函数难以求解. 借鉴高斯近似卡尔曼滤波的思想, 将后验 PDF $q(\mathbf{x}_k)$ 近似为高斯分布, 即

$$q(\mathbf{x}_k) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k). \quad (15)$$

将 (10) 式的右侧记为 Δ , 利用 Jensen 不等式可以进一步逼近代价函数下限, 即

$$\begin{aligned} \Delta \geq & \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^n \eta_l f_{l,x} \left(\int [\mathbf{T}_{k,i}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})]^2 q(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \right) + \\ & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^m \eta_l f_{l,z} \left(\int [\mathbf{U}_{k,j}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)]^2 q(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \right). \end{aligned} \quad (16)$$

定义辅助矩阵 \mathbf{A}_k 和 \mathbf{B}_k 以及如下辅助变量:

$$\mathbf{A}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k + (\boldsymbol{\mu}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\mu}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T, \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_k = (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k)(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k)^T + \mathbf{H}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{H}_k^T, \quad (18)$$

$$\alpha_{l,k,i} = -2 \dot{f}_{l,x}(\mathbf{T}_{k,i} \mathbf{A}_k \mathbf{T}_{k,i}^T), \quad (19)$$

$$\beta_{l,k,j} = -2 \dot{f}_{l,z}(\mathbf{U}_{k,j} \mathbf{B}_k \mathbf{U}_{k,j}^T). \quad (20)$$

将 (16) 代入到 (10) 中, 同时基于后验 PDF 的高斯假设, 最大化问题进一步转化为:

$$\{\boldsymbol{\mu}_k^*, \boldsymbol{\Sigma}_k^*\} \approx \arg \max_{\{\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k\}} J(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k), \quad (21)$$

其中, $\boldsymbol{\mu}_k^*$ 表示最优后验状态向量, $\boldsymbol{\Sigma}_k^*$ 表示最优后验协方差矩阵. 近似代价函数 $J(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) = & \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^n \eta_l f_{l,x}(\mathbf{T}_{k,i} \mathbf{A}_k \mathbf{T}_{k,i}^T) + \\ & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^m \eta_l f_{l,z}(\mathbf{U}_{k,j} \mathbf{B}_k \mathbf{U}_{k,j}^T). \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{命题 1} \quad \text{令 } \Lambda_{\boldsymbol{\mu}_k}(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) = \frac{\partial J(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)}{\partial \boldsymbol{\mu}_k} = 0,$$

最优后验状态向量 $\boldsymbol{\mu}_k^*$ 可表示为:

$$\tilde{\mathbf{K}}_k^* = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* \mathbf{H}_k^T + \tilde{\mathbf{R}}_k^*)^{-1}, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\mu}_k^* = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \tilde{\mathbf{K}}_k^* (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (24)$$

其中, 修正预测误差协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^*$ 和修正量测噪声协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_k^*$ 分别表示为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* = \mathbf{S}_{k|k-1} (\boldsymbol{\Psi}_{x_k}^*)^{-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T, \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k^* = \mathbf{S}_{R_k} (\boldsymbol{\Psi}_{z_k}^*)^{-1} \mathbf{S}_{R_k}^T, \quad (26)$$

其中, 加权矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_{x_k}^*$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_{z_k}^*$ 表示为:

$$\begin{aligned} \Psi_{x_k}^* = & \text{diag}(-2 \sum_{l=1}^2 \eta_l \dot{f}_{l,x}(\mathbf{T}_{k,1} \mathbf{A}_k^* \mathbf{T}_{k,1}^T), \dots, \\ & -2 \sum_{l=1}^2 \eta_l \dot{f}_{l,x}(\mathbf{T}_{k,n} \mathbf{A}_k^* \mathbf{T}_{k,n}^T)), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{z_k}^* = & \text{diag}(-2 \sum_{l=1}^2 \eta_l \dot{f}_{l,z}(\mathbf{U}_{k,1} \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k,1}^T), \dots, \\ & -2 \sum_{l=1}^2 \eta_l \dot{f}_{l,z}(\mathbf{U}_{k,m} \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k,m}^T)), \end{aligned} \quad (28)$$

其中, 辅助矩阵 \mathbf{A}_k^* 和 \mathbf{B}_k^* 及辅助变量 $\alpha_{l,k,i}^*$ 和 $\beta_{l,k,j}^*$ 可表示为:

$$\mathbf{A}_k^* = \Sigma_k^* + (\boldsymbol{\mu}_k^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\mu}_k^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_k^* = (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k^*)(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k^*)^T + \mathbf{H}_k \Sigma_k^* \mathbf{H}_k^T, \quad (30)$$

$$\alpha_{l,k,i}^* = -2 \dot{f}_{l,x}(\mathbf{T}_{k,i} \mathbf{A}_k^* \mathbf{T}_{k,i}^T), \quad (31)$$

$$\beta_{l,k,j}^* = -2 \dot{f}_{l,z}(\mathbf{U}_{k,j} \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k,j}^T). \quad (32)$$

证明 关于 $\boldsymbol{\mu}_k$ 的雅可比矩阵 $\Lambda_{\boldsymbol{\mu}_k}(\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k)$ 可表示如下:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\boldsymbol{\mu}_k}(\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) = & \\ & - \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^n \eta_l \alpha_{l,k,i}^* \mathbf{T}_{k,i}^T \mathbf{T}_{k,i} (\boldsymbol{\mu}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \\ & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^m \eta_l \beta_{l,k,j}^* \mathbf{U}_{k,j}^T \mathbf{U}_{k,j} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k). \end{aligned} \quad (33)$$

进一步化简, 可得:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\boldsymbol{\mu}_k}(\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) = & \\ & - \mathbf{S}_{k|k-1}^T \Psi_{x_k} \mathbf{S}_{k|k-1} (\boldsymbol{\mu}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \\ & \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_{R_k}^T \Psi_{z_k} \mathbf{S}_{R_k} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k), \end{aligned} \quad (34)$$

其中, 加权矩阵 Ψ_{x_k} 和 Ψ_{z_k} 表示如下:

$$\Psi_{x_k} = \text{diag}(\sum_{l=1}^2 \eta_l \alpha_{l,k,1}, \dots, \sum_{l=1}^2 \eta_l \alpha_{l,k,n}), \quad (35)$$

$$\Psi_{z_k} = \text{diag}(\sum_{l=1}^2 \eta_l \beta_{l,k,1}, \dots, \sum_{l=1}^2 \eta_l \beta_{l,k,m}), \quad (36)$$

令 $\Lambda_{\boldsymbol{\mu}_k}(\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) = 0$, 可得:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = \mathbf{H}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\mu}_k), \quad (37)$$

其中, 修正误差协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}_k$ 可分别表示为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} (\Psi_{x_k})^{-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T, \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{S}_{R_k} (\Psi_{z_k})^{-1} \mathbf{S}_{R_k}^T. \quad (39)$$

假设经过 i 次迭代, 第 $i+1$ 次结果可以达到最优, 用 $(\cdot)^*$ 表示最优结果, 利用矩阵逆定理, 对 (37) 进一步化简, 即可得到命题 2.1 中的结果.

证明成立. \square

由 (19), (20), (24) 和 (25), 可得:

$$\Sigma_k^* = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* - \tilde{\mathbf{K}}_k^* \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^*. \quad (40)$$

注 1 利用所提 HMSSM 构造新的混合代价函数, 通过下界最大化逼近最优结果是本算法的核心设计, 实验结果表明, 分层混合设计使得 HMSSMRKF 算法能够更好的应对复杂非高斯噪声下算法估计精度与鲁棒性下降的问题.

2.2 基于 HMSSM 的鲁棒自适应卡尔曼滤波

虽然 2.1 节所提出的 HMSSMRKF 考虑了对于非高斯噪声的抑制, 但是依然依赖名义过程噪声和量测噪声信息. 为增强算法的适应能力, 在 2.1 节算法基础上, 进一步考虑噪声协方差矩阵的自适应估计问题. 利用一步预测误差协方差矩阵来表征过程噪声的不确定性, 进一步利用矩阵统计相似度 (Matrix Statistical Similarity Measure, MSSM), 则 $q^*(\mathbf{x}_k)$, $q^*(\mathbf{P}_{k|k-1})$ 和 $q^*(\mathbf{R}_k)$ 可以通过最大化以下基于混合 SSM 的代价函数来获得:

$$\begin{aligned} \{q^*(\mathbf{x}_k), q^*(\mathbf{P}_{k|k-1}), q^*(\mathbf{R}_k)\} = & \\ & \arg \max_{q_x, q_p, q_R} J(q(\mathbf{x}_k), q(\mathbf{P}_{k|k-1}), q(\mathbf{R}_k)), \end{aligned} \quad (41)$$

其中, 代价函数 $J(q(\mathbf{x}_k), q(\mathbf{P}_{k|k-1}), q(\mathbf{R}_k))$ 可以分为三项, 即:

$$\begin{aligned} J(q(\mathbf{x}_k), q(\mathbf{P}_{k|k-1}), q(\mathbf{R}_k)) = & \\ & J_1(q(\mathbf{x}_k)) + J_2(q(\mathbf{P}_{k|k-1})) + J_3(q(\mathbf{R}_k)), \end{aligned} \quad (42)$$

其中, $J_1(q(\mathbf{x}_k))$ 的表达式与 (10) 相同, $J_2(q(\mathbf{P}_{k|k-1}))$ 和 $J_3(q(\mathbf{R}_k))$ 是基于 MSSM 构造的^[15], 可分别表示为:

$$\begin{aligned} J_2(q(\mathbf{P}_{k|k-1})) = & \mathbb{E}_{\mathbf{P}_{k|k-1}} [-\tau_P \text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} (\mathbf{P}_{k|k-1})^{-1}) + \\ & (\tau_P + 0.5) \log |\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} (\mathbf{P}_{k|k-1})^{-1}|], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} J_3(q(\mathbf{R}_k)) = & \mathbb{E}_{\mathbf{R}_k} [(\tau_R + 0.5) \log |\bar{\mathbf{R}}_k \mathbf{R}_k^{-1}| - \\ & \tau_R \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_k \mathbf{R}_k^{-1})], \end{aligned} \quad (44)$$

其中, τ_P 和 τ_R 表示尺度因子调谐参数.

由于后验 PDFs $q(\mathbf{x}_k)$, $q(\mathbf{P}_{k|k-1})$ 和 $q(\mathbf{R}_k)$ 的具体形式未知, (41) 中的最大化问题仍无法解决, 针对此问题, $q(\mathbf{x}_k)$ 的后验概率分布仍近似为高斯分布, $q(\mathbf{P}_{k|k-1})$ 和 $q(\mathbf{R}_k)$ 的后验概率分布近似为 IW 分布.

由以上运算, $q(\mathbf{x}_k)$ 相对于后验 PDFs $q(\mathbf{x}_k)$, $q(\mathbf{P}_{k|k-1})$ 和 $q(\mathbf{R}_k)$ 的最大化问题可以等价地转化为代价函数相对于后验分布参数最大化的问题, 即:

$$\{\boldsymbol{\mu}_k^*, \Sigma_k^*, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{R}_k\} = \arg \max_{\Phi_k} J(\Phi_k), \quad (45)$$

其中, $\Phi_k \triangleq \{\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{R}_k\}$.

通过寻求代价函数 $J(\Phi_k)$ 的下界最大化, 有助于得到后验 PDFs $q(\mathbf{x}_k)$, $q(\mathbf{P}_{k|k-1})$ 和 $q(\mathbf{R}_k)$ 的解析解. 利用 Jensen 不等式进一步进行简化, $J_2(q(\mathbf{P}_{k|k-1}))$ 和 $J_3(q(\mathbf{R}_k))$ 的下界推导为:

$$J_2(q(\mathbf{P}_{k|k-1})) \geq (\tau_P + 0.5) \log |\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1}(\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1}| - \tau_P \text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1}(\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1}), \quad (46)$$

$$J_3(q(\mathbf{R}_k)) \geq (\tau_R + 0.5) \log |\bar{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}| - \tau_R \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}). \quad (47)$$

定义中间变量 ξ_k^* 和 λ_k^* 如下:

$$\xi_k^* = - \sum_{l=1}^2 2\eta_l \dot{f}_{l,x}(\mathbf{T}_{k,i} \mathbf{A}_k^* \mathbf{T}_{k,i}^T), \quad (48)$$

$$\lambda_k^* = - \sum_{l=1}^2 2\eta_l \dot{f}_{l,z}(\mathbf{U}_{k,j} \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k,j}^T). \quad (49)$$

原始代价函数的下界函数 $\tilde{J}(\Phi_k)$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\Phi_k) = & \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^n \eta_l f_{l,x}(\mathbf{T}_{k,i} \mathbf{A}_k^* \mathbf{T}_{k,i}^T) + \\ & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^m \eta_l f_{l,z}(\mathbf{U}_{k,j} \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k,j}^T) + \\ & (\tau_P + 0.5) \log |\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1}(\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1}| - \\ & \tau_P \text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1}(\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1}) + \\ & (\tau_R + 0.5) \log |\bar{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}| - \tau_R \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}), \quad (50) \end{aligned}$$

其中, $\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_k$ 分别表示 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 和 \mathbf{R}_k 对于其后验 PDFs $q(\mathbf{P}_{k|k-1})$ 和 $q(\mathbf{R}_k)$ 的均值.

命题 2 通过最大化 (50) 可以依次得到 μ_k^* 、 Σ_k^* 、 $\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^*$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_k^*$ 的最优解, 因此, 针对 (45) 中的最大化问题, $q(\mathbf{x}_k)$ 的最优后验平均向量 μ_k^* 可以表示为:

$$\check{\mathbf{K}}_k^* = \check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* \mathbf{H}_k^T + \check{\mathbf{R}}_k^*)^{-1}, \quad (51)$$

$$\mu_k^* = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \check{\mathbf{K}}_k^* (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (52)$$

其中, 修正预测误差 $\check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^*$ 和修正的观测误差协方差矩阵 $\check{\mathbf{R}}_k^*$ 可分别表示为:

$$\check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* / \xi_k^*, \quad (53)$$

$$\check{\mathbf{R}}_k^* = \hat{\mathbf{R}}_k^* / \lambda_k^*. \quad (54)$$

协方差矩阵的最优状态后验估计分别为:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* = \frac{\tau_P \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} + 0.5 \xi_k^* \mathbf{A}_k^*}{\tau_P + 0.5}, \quad (55)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k^* = \frac{\tau_R \bar{\mathbf{R}}_k + 0.5 \lambda_k^* \mathbf{B}_k^*}{\tau_R + 0.5}. \quad (56)$$

证明 最优后验状态向量 μ_k^* 的求解可参考命题 2.1, 类似的, 关于 $\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_k$ 的雅可比矩阵可分别表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(\Phi_k)}{\partial \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}} = & 0.5 \xi_k^* (\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1} \mathbf{A}_k^* (\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1} + \\ & \tau_P (\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} (\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1} - \\ & (\tau_P + 0.5) (\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1})^{-1} = 0, \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(\Phi_k)}{\partial \hat{\mathbf{R}}_k} = & 0.5 \lambda_k^* \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{B}_k^* \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} + \tau_R \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} \bar{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} - \\ & (\tau_R + 0.5) \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} = 0. \quad (58) \end{aligned}$$

利用矩阵逆定理对以上方程进行化简, 即可得到 (55) 和 (56) 中的结果. 证明成立. \square

最优后验协方差 Σ_k^* 可表示为:

$$\Sigma_k^* = \check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^* - \check{\mathbf{K}}_k^* \mathbf{H}_k \check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^*. \quad (59)$$

至此, 可以得到完整的 HMSSMRKF 算法, 其算法流程图在算法 1 中给出. 其中, δ 表示迭代终止阈值, N_m 表示最大迭代次数, i^* 表示循环结束时的循环变量.

算法1 HMSSMRKF

1. 输入: $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$, $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$, \mathbf{F}_k , \mathbf{H}_k , \mathbf{z}_k , $\check{\mathbf{Q}}_k$, $\bar{\mathbf{R}}_k$, $f_x(\cdot)$, $f_z(\cdot)$, ϵ , N_m , δ ;
2. $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$,
3. $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \check{\mathbf{Q}}_k$.
4. 迭代初始化: $\xi_k^{(0)} = 1$, $\lambda_k^{(0)} = 1$,
5. for $i = 0 : N_m - 1$
6. 根据(51), (52)计算 $\check{\mathbf{K}}_k^{i+1}$ 和 μ_k^{i+1} ,
7. 根据(53), (54)计算 $\check{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{i+1}$ 和 $\check{\mathbf{R}}_k^{i+1}$,
8. 根据(59)计算 Σ_k^{i+1} ,
9. If $\|\mu_k^{i+1} - \mu_k^i\| / \|\mu_k^i\| \leq \delta$ break,
10. 根据(17), (18)计算 \mathbf{A}_k^{i+1} 和 \mathbf{B}_k^{i+1} ,
11. 根据(48), (49)更新 ξ_k^{i+1} 和 λ_k^{i+1} ,
12. 根据(55), (56)更新 $\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{i+1}$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_k^{i+1}$,
13. end for
14. 输出: $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mu_k^{i+1}$, $\mathbf{P}_{k|k} = \Sigma_k^{i+1}$.

注 2 在复杂非高斯环境中, 噪声统计特性未知, 直接使用标称协方差进行估计会导致结果偏于保守, 从而影响滤波精度. 本节在 HMSSMRKF 算法基础上, 进一步考虑协方差矩阵的自适应估计问题, 以少量计算量的提高获得可观的算法精度与鲁棒性的提升.

注 3 保证固定点迭代的收敛性是将本文所提算法应用于实际工程的重要前提. 固定点迭代算法与现有牛顿法的修正 Hessian 矩阵相同, 因此, 本文所使用的固定点迭代法是牛顿法的特例. 根据^[13] 所

述, 如果初始均值向量 $\boldsymbol{\mu}_k^i$ 与最优均值向量 $\boldsymbol{\mu}_k^*$ 非常接近, 并且存在有界的实数 m_1 和 m_2 , 使得下列不等式成立:

$$\begin{cases} 0 \leq \ddot{f}_x(t^2)t \leq m_1, \forall t \geq 0 \\ 0 \leq \ddot{f}_z(t^2)t \leq m_2 \end{cases} \quad (60)$$

则固定点迭代算法具有局部收敛性.

2.3 HMSSMRAKF 的计算复杂度分析

接下来进一步分析 HMSSMRAKF 算法的计算复杂度. 根据算法 1, 本文所提出的基本方程的浮点运算次数 (Number of Floating Point Operations, NOFPOs) 在表 1 中给出.

表 1 HMSSMRAKF 算法各步骤的计算复杂度

步骤	计算复杂度
(8)	$2n^2 - n$
(9)	$4n^3 - n^2$
(17)	$2n^2$
(18)	$2mn^2 + 2m^2n + m^2 + mn$
(35)	$3n$
(36)	$3m$
(38)	$2n^3 + n + o(n^3)$
(39)	$2m^3 + m + o(m^3)$
(48)-(49)	$2(m^3 + n^3) - m^2 - n^2 + m + n + o(m^3) + o(n^3)$
(51)	$4mn^2 + 4m^2n - 3mn + o(m^3)$
(52)	$4mn$
(53)-(54)	$m^2 + n^2$
(55)-(56)	$3m^2 + 3n^2$
(59)	$2n^3 + 2mn^2 - n^2$

假设平均定点迭代次数为 \bar{N} , 则所提出的 HMSSMRAKF 的 NOFPOs 计算公式可表示为:

$$\begin{aligned} N_{HMSSMRAKF} = & (6\bar{N} + 4)n^3 + 4\bar{N}m^3 + 8\bar{N}mn^2 + 6\bar{N}m^2n + \\ & (4\bar{N} + 1)n^2 + 4\bar{N}m^2 + 2\bar{N}mn + 5\bar{N}m + \\ & (5\bar{N} - 1)n + 2\bar{N}o(n^3) + 3\bar{N}o(m^3). \end{aligned} \quad (61)$$

由 (61) 可以发现, 因采用了迭代方法计算, 本文所提算法的计算复杂度较高, 与其平均迭代次数紧密相关, 但 HMSSMRAKF 通过相对较少的迭代次数即可达到收敛, 如 3.2 节所述, 因此, 考虑到 HMSSMRAKF 算法在性能方面的提升, 其计算复杂度的适度增加是可以接受的.

3 仿真实验

3.1 实验设置

为验证所提算法的有效性, 通过二维平面内移动目标跟踪的仿真实验来比较所提算法与同类算法的性能, 选择位置与速度的均方根误差 (Root Mean-

Square Errors, RMSE) 和平均均方根误差 (Averaged Root Mean-Square Errors, ARMSE)^[19-24] 作为比较算法估计精度的性能指标. 进一步的, 为更直观地展示所有算法的位置与速度的均方根误差, 采用跨度为 10s 的移动平均法对 RMSE 进行平滑处理^[14].

状态转移矩阵 \mathbf{F}_k 和量测矩阵 \mathbf{H}_k 分别表示如下:

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & T\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}], \quad (63)$$

其中, $T = 1s$ 表示采样间隔, \mathbf{I}_2 表示二维单位矩阵. 状态噪声可表示为 $\mathbf{w}_k = [w_{1,k}, w_{2,k}, w_{3,k}, w_{4,k}]^T$, 测量噪声可表示为 $\mathbf{v}_k = [v_{1,k}, v_{2,k}]^T$. 其标称状态噪声协方差 $\tilde{\mathbf{Q}}_k$ 和量测噪声协方差 $\bar{\mathbf{R}}_k$ 分别设为:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_k = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3}\mathbf{I}_2 & \frac{T^2}{2}\mathbf{I}_2 \\ \frac{T^2}{2}\mathbf{I}_2 & T\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_k = 50\mathbf{I}_2. \quad (65)$$

仿真实验中, 将目标状态的初始值设为 $\mathbf{x}_0 = [0 \text{ m}, 0 \text{ m}, 10 \text{ m/s}, 10 \text{ m/s}]^T$, 协方差矩阵初始值 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(1000 \text{ m}^2, 1000 \text{ m}^2, 10 \text{ m}^2/\text{s}^2, 10 \text{ m}^2/\text{s}^2)$, 仿真时间 $T=1000s$, 执行 1000 次蒙特卡洛循环, 迭代终止阈值为 $\delta=10^{-16}$, $N_m=50$ 次, 仿真使用 MATLAB R2023b 软件进行, 所用的台式机电脑 CPU 型号为 Intel Core i5-12400, 主频为 2.50GHz, 内存为 16GB.

为验证所提算法的鲁棒性及普适性, 将整个仿真过程分为两个阶段, 第一阶段 (0-500 s): 模拟噪声各维变量变化趋势一致非高斯噪声的情况; 第二阶段 (501-1000 s): 模拟噪声各维变量变化趋势不同的非高斯噪声的情况.

第一阶段假设存在严重干扰的情况, 放大系数设为 $M_1 = M_2 = 1000$. 用以下高斯混合的形式模拟存在非高斯噪声干扰情况下的过程和量测噪声:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k \sim \begin{cases} \mathbf{N}(\mathbf{w}_k; \mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) & \text{w.p. } 0.95 \\ \mathbf{N}(\mathbf{w}_k; \mathbf{0}, M_1\mathbf{Q}_k) & \text{w.p. } 0.05 \end{cases} \\ \mathbf{v}_k \sim \begin{cases} \mathbf{N}(\mathbf{v}_k; \mathbf{0}, \mathbf{R}_k) & \text{w.p. } 0.90 \\ \mathbf{N}(\mathbf{v}_k; \mathbf{0}, M_2\mathbf{R}_k) & \text{w.p. } 0.10 \end{cases} \end{cases} \quad (66)$$

其中 w.p. 表示出现的概率.

第二阶段模拟存在多维异质野值干扰的情况, 过程和量测噪声具体设置如下:

$$\begin{cases} w_{1,k} \sim \begin{cases} N(w_{1,k}; 0, Q_k) & \text{w.p. } 0.95 \\ N(w_{1,k}; 0, G_0 Q_k) & \text{w.p. } 0.05 \end{cases} \\ w_{2,k} \sim \begin{cases} N(w_{2,k}; 0, Q_k) & \text{w.p. } 0.90 \\ N(w_{2,k}; 0, G_1 Q_k) & \text{w.p. } 0.10 \end{cases} \\ w_{3,k} \sim \begin{cases} N(w_{3,k}; 0, Q_k) & \text{w.p. } 0.95 \\ N(w_{3,k}; 0, G_0 Q_k) & \text{w.p. } 0.05 \end{cases} \\ w_{4,k} \sim \begin{cases} N(w_{4,k}; 0, Q_k) & \text{w.p. } 0.90 \\ N(w_{4,k}; 0, G_1 Q_k) & \text{w.p. } 0.10 \end{cases} \end{cases} \quad (67)$$

$$\begin{cases} v_{1,k} \sim \begin{cases} N(v_{1,k}; 0, R_k) & \text{w.p. } 0.95 \\ N(v_{1,k}; 0, G_2 R_k) & \text{w.p. } 0.05 \end{cases} \\ v_{2,k} \sim \begin{cases} N(v_{2,k}; 0, R_k) & \text{w.p. } 0.90 \\ N(v_{2,k}; 0, G_3 R_k) & \text{w.p. } 0.10 \end{cases} \end{cases} \quad (68)$$

其中, $G_0 = 100, G_1 = 200, G_2 = 500, G_3 = 400$.

3.2 算法对比

本文对比以下 6 种算法: 传统 KF, 文献 [11] 中的 SSMKF, 文献 [12] 中的 AORSE, 文献 [13] 中的 MOR SSMKF, 本文所提出的 HMSSMRKF 及未进行分层处理的 NHMSSMRKF. 将权重因子 η_1 和 η_2 分别设置为 $\eta_1 = 0.4, \eta_2 = 0.6$, 以评估本文所提出的 HMSSMRKF 的优越性. 图 1 和图 2 分别为所提出的 HMSSMRKF 与现有鲁棒卡尔曼滤波算法的位置和速度的 SRMSE 对比结果, 可以看出, 当采用分层混合设计后, HMSSMRKF 的性能明显优于 NHMSSMRKF, 因此, 分层混合统计相似度的提出是合理且有效的. 仿真中在 500s 时对噪声类型进行切换. 在第一阶段, 本文提出的两种方法均能得到优于现有方法的估计效果; 在切换为多维异质非高斯噪声后, HMSSMRKF 难以适应不同维度非高斯噪声的干扰, 估计效果存在退化, 但改进后的 HMSSMRKF 不仅对不同的复杂非高斯噪声环境具有较强的适应能力, 且其性能依然显著优于其他

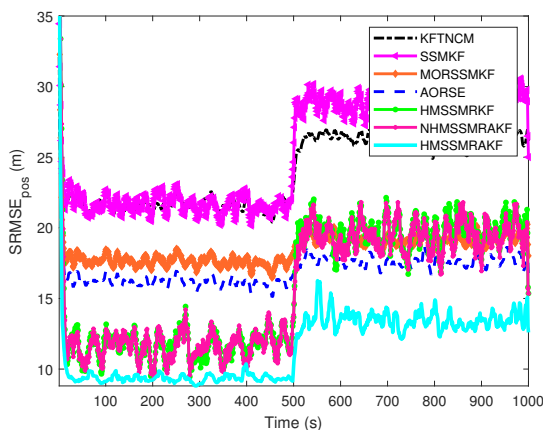


图1 所提算法与现有鲁棒卡尔曼滤波算法的RMSE_{pos}

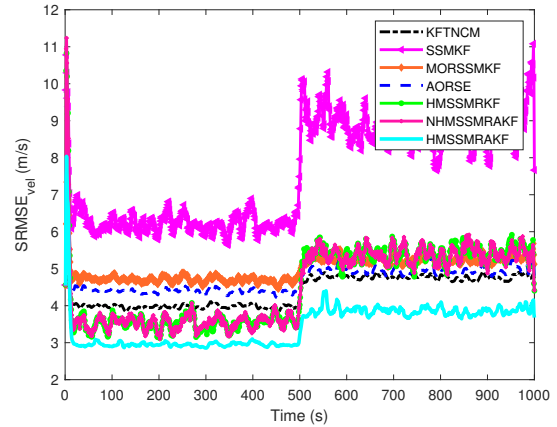


图2 所提算法与现有鲁棒卡尔曼滤波算法的RMSE_{vel}

滤波算法. 图 3 和图 4 中分别给出了当迭代次数为 $N = 1, 2, \dots, 20$ 时各算法位置和速度的 ARMSE, 可以看出, 本文所提出的 HMSSMRKF 和 HMSSMRKF 均能在 $N \geq 8$ 时达到收敛, 因此, 所提出的算法在迭代次数方面表现出令人满意的收敛速度.

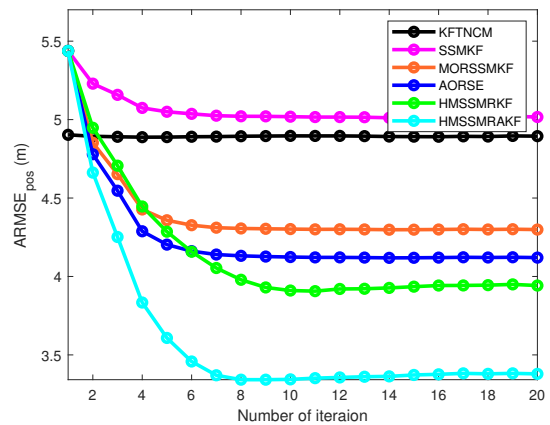


图3 $N = 1, 2, \dots, 20$ 时各算法的ARMSE_{pos}

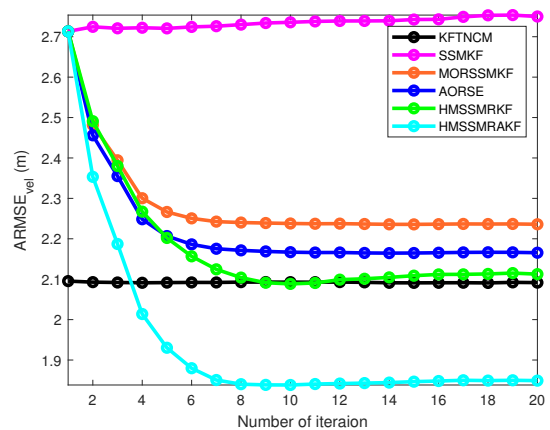


图4 $N = 1, 2, \dots, 20$ 时各算法的ARMSE_{vel}

表 2 中给出了各种算法的位置和速度 ARMSE 及单步运行时间. 可以看出, 所提出的 HMSSMRKF 具有最小的位置和速度 ARMSE, 通过有限的计算复

杂度提升,其估计效果显著优于其他滤波算法,虽运行时间略长,但仍与其他算法处于同一数量级.与AORSE相比, HMSSMRKF在位置和速度方面的精度分别提升了32.4%和26.9%.

表2 现有算法的 ARMSE 与运行时间比较

滤波算法	ARMSE _{pos} (m)	ARMSE _{vel} (m/s)	Time (ms)
KF	24.02	4.378	0.017
SSMKF	25.26	7.602	0.324
MORSSMKF	18.59	5.012	0.272
AORSE	17.09	4.71	0.285
HMSSMRKF	17.29	4.495	0.503
HMSSMRKF	11.55	3.44	0.732

接下来进一步考察所提出的 HMSSMRKF 算法对于关键参数权重因子的敏感程度. 实验设置与图1和图2相同,分别取权重因子 η_1 为0、0.4、0.45、0.5、0.55、0.8、1. 当 $\eta_1=0$ 时相似度函数退化为单一的平方根函数,当 $\eta_1=1$ 时相似度函数退化为单一的指数函数. 图5和图6分别为 HMSSM 在不同权重因子下,所提出的 HMSSMRKF 的位置和速度的 SRMSE 对比结果. 可以明显看出, HMSSMRKF 在分层混合相似度函数场景下要优于单一相似度函数

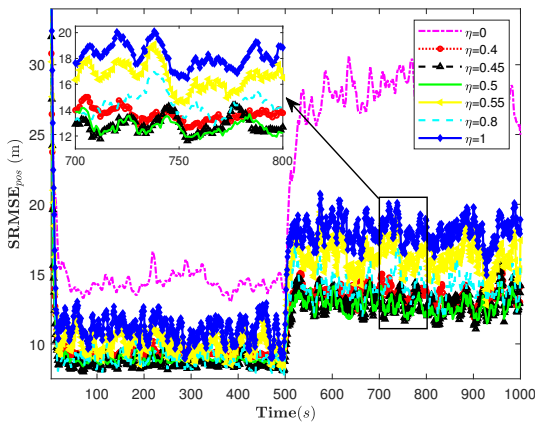


图5 不同权重因子下所提算法的RMSE_{pos}

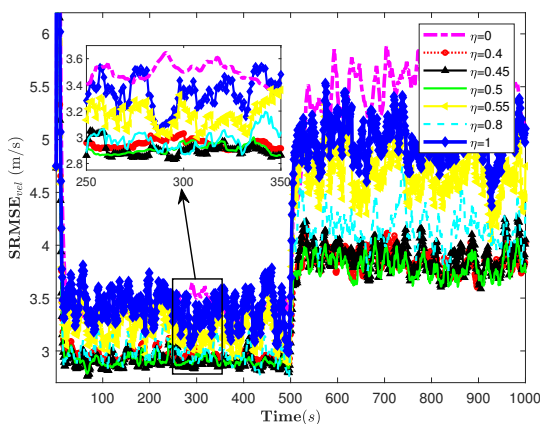


图6 不同权重因子下所提算法的RMSE_{vel}

场景,且在不同权重因子下,混合相似度函数的表现具有较好的鲁棒性,表明权重因子的选择不会引起算法性能的明显波动.

4 结论

本文针对高维系统面临时变非高斯噪声时传统状态估计方法精度不高的问题,提出一种分层混合统计相似度度量,通过利用不动点迭代法最大化基于多重统计相似度的混合代价函数,实现状态向量和噪声协方差矩阵的联合估计. 目标跟踪的仿真实验表明,所提算法能够显著提升估计精度,并在复杂非高斯噪声的干扰下具有较好的鲁棒性.

参考文献 (References)

- [1] 高哲,黄晓敏,陈小姣. 含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计[J]. 控制与决策, 2021, 36(7): 1672-1678.
(Gao Z, Huang X M, Chen X J. Design of Kalman filter for fractional-order systems with correlated fractional-order colored noises[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(7): 1672-1678.)
- [2] 郭蕴华,刘俊杰,汪敬东,等. 近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波器[J]. 控制与决策, 2020, 35(10): 2399-2406.
(Guo Y H, Liu J J, Wang J D, et al. Robust Kalman filter based on approximate least absolute deviation[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(10): 2399-2406.)
- [3] 王国庆,杨春雨,马磊,等. 基于高斯-广义双曲混合分布的非线性卡尔曼滤波[J]. 自动化学报, 2023, 49(2): 448-460.
(Wang G Q, Yang C Y, Ma L, et al. Nonlinear Kalman filter based on Gaussian-generalized-hyperbolic mixing distribution[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(2): 448-460.)
- [4] Wang G Q, Zhang Z H, Yang C Y, et al. Robust EKF based on shape parameter mixture distribution for wireless localization with time-varying skewness measurement noise[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024, 74: 1-10.
- [5] Wang G Q, Zhao J X, Yang C Y, et al. Robust Kalman filter for systems with colored heavy-tailed process and measurement noises[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(11): 4256-4260.
- [6] Huber P J, Ronchetti E M. Robust statistics[M]. The 2nd edition. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.
- [7] Chen B D, Liu X, Zhao H Q, et al. Maximum correntropy Kalman filter[J]. *Automatica*, 2017, 76: 70-77.
- [8] Wang G Q, Zhang Y G, Wang X D. Maximum correntropy rauch-tung-striebel smoother for nonlinear and non-Gaussian systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(3): 1270-1277.
- [9] Wang G Q, Fan X X, Zhao J X, et al. Iterated maximum

- mixture correntropy Kalman filter and its applications in tracking and navigation[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2024, 24(17): 27790-27802.
- [10] 戴捷, 郑沛, 张爱军, 等. 最大相关熵平方根容积卡尔曼滤波在 GNSS-RTK 定位中的应用[J]. *导航定位与授时*, 2025, 12(3): 59-67.
(Dai J, Zheng P, Zhang A J, et al. Application of maximum correntropy square root volume Kalman filter in GNSS positioning[J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2025, 12(3): 59-67.)
- [11] Huang Y L, Zhang Y G, Li N, et al. A novel robust student's t -based Kalman filter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(3): 1545-1554.
- [12] Huang Y L, Zhang Y G, Xu B, et al. A new outlier-robust student's t based Gaussian approximate filter for cooperative localization[J]. *ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, 22(5): 2380-2386.
- [13] Wang G Q, Yang C Y, Ma X P. A novel robust nonlinear Kalman filter based on multivariate Laplace distribution[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(7): 2705-2709.
- [14] Huang Y L, Zhang Y G, Zhao Y X, et al. A novel outlier-robust Kalman filtering framework based on statistical similarity measure[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(6): 2677-2692.
- [15] Bai M M, Huang Y L, Zhang Y G, et al. Statistical similarity measure-based adaptive outlier-robust state estimator with applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(8): 4354-4361.
- [16] Huang Y L, Bai M M, Zhang Y G. A novel multiple-outlier-robust Kalman filter[J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2022, 23(3): 422-437.
- [17] Chen Z B, Li Z K, Chen W Q, et al. Wasserstein distance-assisted variational Bayesian Kalman filter with statistical similarity measure for GNSS/INS integrated navigation[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2024, 24(6): 8807-8820.
- [18] Guo Y, Xu B, Wang L Z. A robust SINS/USBL integrated navigation algorithm based on earth frame and right group error definition[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2022, 71: 1-16.
- [19] Xu B, Guo Y, Hu J M. An improved robust Kalman filter for SINS/DVL tightly integrated navigation system[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2021, 70: 1-15.
- [20] Xu B, Guo Y. A novel DVL calibration method based on robust invariant extended Kalman filter[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2022, 71(9): 9422-9434.
- [21] Chen B D, Wang X, Lu N, et al. Mixture correntropy for robust learning[J]. *Pattern Recognition*, 2018, 79: 318-327.
- [22] Qi B, Zhang S Y, Chen W H, et al. Adaptive Kalman filters based on elliptically contoured distributions for heavy-tailed and nonstationary measurement noises[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2025, 74(): 1-15.
- [23] 王国庆, 张冬生, 朱兆磊, 等. 基于学生 t 核的最大相关熵卡尔曼滤波及其核带宽自适应选择方法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(5): 1541-1550.
(Wang G Q, Zhang D S, Zhu Z L, et al. Student's t kernel maximum correntropy Kalman filter and its kernel bandwidth adaptive selection method[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(5): 1541-1550.)
- [24] 田金鹏, 闵天, 薛莹, 等. 自适应线性预测卡尔曼滤波压缩感知算法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(1): 83-90.
(Tian J P, Min T, Xue Y, et al. Adaptive linear predictive Kalman filter compressed sensing algorithm[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(1): 83-90.)

作者简介

王国庆 (1990-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为智能机器人导航定位以及多传感器智能信息融合, E-mail: guoqingwang@cumt.edu.cn;

于明龙 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为鲁棒状态估计及其在协同定位的应用, E-mail: yu1109363366@163.com;

朱兆磊 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为网络攻击下鲁棒状态估计与信息融合, E-mail: zhaoleizhu@cumt.edu.cn;

马磊 (1989-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为自主无人系统安全感知与智能控制、信息物理系统安全控制, E-mail: maleinjust@126.com;

杨春雨 (1979-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为智能系统控制以及奇异摄动系统优化控制, E-mail: chunyu yang@cumt.edu.cn.