

面向受限车辆路点跟踪的李雅普诺夫稳定模型预测路径 积分控制

何士强¹, 熊伟亮¹, 何德峰^{1†}, 邢科新¹, Shkodyrev V.P.²

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023;

2. 圣彼得堡彼得大帝理工大学 网络物理系统与控制学院, 圣彼得堡 195251)

摘要: 针对模型预测路径积分控制 (MPPI) 在受限车辆路点跟踪中存在的稳定性问题, 提出一种具有闭环渐近稳定性保证的李雅普诺夫稳定 MPPI (LS-MPPI) 策略. 首先, 构建统一的二次型连续屏障代价函数, 解决传统硬约束惩罚导致的采样梯度稀疏与权重退化问题. 其次, 通过引入随机采样解与热启动解之间的动态非增仲裁机制, 保证了 LS-MPPI 优化问题的递推可行性. 进一步, 通过终端代价函数和李雅普诺夫定理建立了闭环系统渐近稳定性的充分条件. 最后通过多工况仿真实验表明, 所提策略与传统 MPPI 相比, 其横向与航向均方根误差分别降低了 43.5% 与 23.0%.

关键词: 模型预测路径积分控制; 预测控制; 约束控制; 车辆路点跟踪; 稳定性

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2026.0034

引用格式: 何士强, 熊伟亮, 何德峰, 等. 面向受限车辆路点跟踪的李雅普诺夫稳定模型预测路径积分控制 [J]. 控制与决策.

Lyapunov-stabilized model predictive path integral control for constrained vehicle waypoint tracking

HE Shi-qiang¹, XIONG Wei-liang¹, HE De-feng^{1†}, XING Ke-xin¹, Shkodyrev V.P.²

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China; 2. Higher School of Cyber-Physical Systems and Control, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg 195251, Russia)

Abstract: To address the stability issues of model predictive path integral (MPPI) control in constrained vehicle waypoint tracking, this paper proposes a Lyapunov-stabilized MPPI (LS-MPPI) strategy with closed-loop asymptotic stability guarantees. First, a unified quadratic continuous barrier cost function is constructed to resolve the issues of sampling gradient sparsity and weight degradation caused by traditional hard constraint penalties. Second, a dynamic non-increasing arbitration mechanism between stochastic sampling and warm-start paths is introduced to ensure the recursive feasibility. Furthermore, sufficient conditions for closed-loop asymptotic stability are established via terminal cost functions and Lyapunov's argument. Finally, multi-scenario simulation results demonstrate that, compared to standard MPPI, the proposed strategy reduces the lateral and heading root mean square errors (RMSE) by 43.5% and 23.0%, respectively.

Keywords: model predictive path integral; predictive control; constrained control; vehicle waypoint tracking; stability

0 引言

随着自动驾驶技术与移动机器人的飞速发展, 车辆的动力学特性日益复杂, 通常伴随着高度非线性与强耦合约束. 如何在确保实时性的前提下, 实现对受限车辆的路点跟踪与安全控制, 已成为当前控

制领域的热点问题^[1,2]. 模型预测控制 (Model Predictive Control, MPC) 凭借其显式处理多变量耦合及复杂约束的能力, 被广泛应用于工业过程与自主系统控制^[3-5]. 然而, 传统的非线性模型预测控制 (Nonlinear MPC, NMPC) 通常依赖于基于梯度的数

收稿日期: 2026-01-11; 录用日期: 2026-04-25.

基金项目: 浙江省自然科学基金重大项目 (LD26F020004)

责任编委: 牛玉刚.

[†]通信作者. E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn.

值优化求解器^[6], 在面对非凸代价函数或非光滑动力学时, 不仅存在陷入局部最优的风险, 而且计算负担随预测时域大幅增长, 难以满足高动态场景的实时性需求^[7,8]. 为克服梯度优化在非凸问题求解及实时计算上的局限, 模型预测路径积分控制 (Model Predictive Path Integral Control, MPPI) 作为一种基于随机采样的控制范式受到广泛关注. 该策略基于 Feynman-Kac 引理, 将最优控制重构为路径积分的期望求解过程^[9], 不仅具备处理非光滑动力学的天然优势, 且其算法结构高度适配图形处理器的并行加速架构, 展现出复杂场景下的良好计算效能.

近年来, MPPI 理论研究也得到了广泛关注. 例如, Gandhi 等人通过推导系统自由能增长的上界, 量化了随机扰动下的状态发散边界, 提出了具有概率性能保证的鲁棒 MPPI 架构^[10]; Balci 等人引入 Tube 结构与受限协方差引导技术, 通过显式调控状态协方差的演化范围, 确保了强随机干扰下车辆的状态约束安全性^[11]. 针对风险敏感任务, Yin 等人将条件风险价值与控制屏障函数引入 MPPI 框架, 通过惩罚代价分布的尾部风险与设计基于梯度的局部安全修正机制, 增强了算法的风险感知能力^[12,13]. 尽管概率安全性研究取得了一定进展, 但现有 MPPI 算法在车辆控制中仍无法严格保证闭环稳定性结果. 尤其在受限规避任务中, 传统的非光滑指示函数虽然简化了约束表征, 却引起了采样梯度消失现象, 更破坏了 Lyapunov 稳定性分析所必需的连续性假设, 进一步导致理论保证缺失. 在应用层面, 融合深度学习的策略^[14]虽提升了算法泛化性, 但其不可解释性进一步加剧了闭环稳定性分析的难度.

在传统 MPC 理论中, 基于“终端代价、终端约束集、局部控制律”的三要素法是确立递归可行性与闭环稳定性的公认范式^[15,16]. 然而, 将该经典范式直接迁移至 MPPI 架构面临着深层次的技术壁垒. 一方面, MPPI 的控制决策是基于随机采样的加权期望, 其本质上的随机采样特性导致控制输出具有不确定性, 难以严格保证 Lyapunov 候选函数在演化过程中的单调递减性质; 另一方面, 为应对车辆复杂避障任务而引入的非光滑惩罚项, 难以满足传统稳定性结果中对代价函数连续性的假设条件. 因此, 如何在保留 MPPI 处理非光滑动力学与并行计算优势的同时, 克服其随机性带来的理论障碍, 构建具有闭环渐近稳定性保证的受限车辆控制框架, 是一个亟待解决的问题.

针对现有 MPPI 在受限车辆避障任务中存在的梯度消失与理论保证缺失等问题, 本文提出一种面

向受限车辆路点跟踪的李雅普诺夫稳定 MPPI (Lyapunov Stable MPPI, LS-MPPI) 控制策略. 本文的主要贡献如下: 1) 针对传统非连续指示函数引发的采样权重退化问题, 构建了具备 Lipschitz 连续性的安全屏障代价函数. 该函数在确保避障约束区分度的前提下, 满足了闭环稳定性分析对目标函数光滑性的先验要求. 2) 引入了随机采样解与热启动解之间的动态非增仲裁机制, 有效克服了 MPPI 的随机不确定性, 在理论层面证明了 LS-MPPI 优化问题的递推可行性与闭环系统的渐近稳定性. 最后, 通过仿真验证证明了所提策略能够提升受限车辆的跟踪精度, 同时在初始越界工况下展现出良好的恢复能力.

1 问题描述

考虑侧向与纵向耦合的非线性单轨车辆模型^[17]. 定义系统状态向量 $\mathbf{x} = [p_x, p_y, v_x, v_y, \psi, r]^T \in \mathbb{R}^6$, 其中 (p_x, p_y) 为车辆在全局坐标系下的位置, ψ 为航向角, (v_x, v_y) 分别为车身坐标系下的纵向与侧向速度, r 为横摆角速度. 定义控制输入 $\mathbf{u} = [a, \delta]^T \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, 分别表示纵向加速度与前轮转角. 假设车辆在二维平面运动, 根据牛顿-欧拉方程, 系统的连续时间动力学方程可描述为

$$\begin{cases} \dot{p}_x = v_x \cos \psi - v_y \sin \psi \\ \dot{p}_y = v_x \sin \psi + v_y \cos \psi \\ \dot{v}_x = \frac{1}{m} (F_x - F_{y,f} \sin \delta - F_{\text{aero}}) + v_y r \\ \dot{v}_y = \frac{1}{m} (F_{y,f} \cos \delta + F_{y,r}) - v_x r \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{r} = \frac{1}{I_z} (l_f F_{y,f} \cos \delta - l_r F_{y,r}) \end{cases} \quad (1)$$

其中, m 为整车质量, I_z 为横摆转动惯量, l_f, l_r 分别为质心到前后轴的距离. $F_x = ma$ 为纵向驱动/制动力, F_{aero} 为空气阻力. 当车速较低时, 空气阻力对系统动力学的影响较小^[18], 通过聚焦车辆路点跟踪系统的 MPPI 闭环稳定性研究, 故本文忽略该空气阻力对系统的影响. 前后轴轮胎侧向力 $F_{y,i} (i \in \{f, r\})$ 表现出强非线性特征, 采用简化的 Pacejka 魔术公式建模^[19]:

$$F_{y,i} = D_i \sin(C_i \arctan(B_i \alpha_i)), \quad i \in \{f, r\}. \quad (2)$$

其中, D_i, C_i, B_i 分别为轮胎的峰值因子, 形状因子和刚度因子, α_i 为轮胎侧偏角, 其运动学关系可描述为:

$$\alpha_f = \delta - \arctan\left(\frac{v_y + l_f r}{v_x}\right), \quad (3)$$

$$\alpha_r = -\arctan\left(\frac{v_y - l_r r}{v_x}\right). \quad (4)$$

采用由公式(2)至公式(4)定义的简化Pacejka公式旨在保留核心非线性饱和特征并控制并行采样的算力开销.此外,所提控制架构凭借前向数值积分与中心差分机制规避了解析求导限制,与具体轮胎经验公式解耦,具备向高保真模型拓展的通用性.为便于数字控制实现,采用四阶龙格-库塔法对式(1)进行离散化,得到离散状态方程 $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$.

定义参考轨迹为满足系统动力学约束的状态-输入对序列 $\mathbf{T}_{\text{ref}} = \{(\mathbf{x}_{k,\text{ref}}, \mathbf{u}_{k,\text{ref}})\}_{k \geq 0}$ (下文简记为 $\mathbf{x}_{\text{ref}}, \mathbf{u}_{\text{ref}}$).令跟踪误差状态为 $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{\text{ref}}$,则跟踪误差系统的动力学方程可表示为

$$\mathbf{e}_{k+1} = f_e(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k) \triangleq f(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_{k,\text{ref}}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_{k+1,\text{ref}}. \quad (5)$$

显然,当 $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{\text{ref}}$ 时,原点 $\mathbf{e} = 0$ 是误差系统(5)的一个平衡点.控制目标为设计控制律使 \mathbf{e}_k 在满足约束的前提下渐近收敛至零.

基于误差动力学模型(5),滚动时域内的跟踪控制任务构建为如下有限时域最优控制问题:

$$\min_{\mathbf{U}_k} J(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k) = \alpha V_f(\mathbf{e}_{k+N|k}) + \sum_{j=0}^{N-1} \ell(\mathbf{e}_{k+j|k}, \mathbf{u}_{k+j|k}), \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{e}_{k+j+1|k} = f_e(\mathbf{e}_{k+j|k}, \mathbf{u}_{k+j|k}), \quad (6b)$$

$$\mathbf{u}_{k+j|k} \in \mathbb{U}, \quad (6c)$$

$$\mathbf{e}_{k+j|k} + \mathbf{x}_{k+j,\text{ref}} \in \mathcal{X}_{\text{free}}. \quad (6d)$$

其中, $\mathbf{e}_{k+j|k}$ 表示基于 k 时刻信息的第 j 步预测误差状态; $V_f(\cdot)$ 为终端代价函数, α 为终端权重系数; $\ell(\cdot, \cdot)$ 为广义阶段代价函数. $\mathcal{X}_{\text{free}}$ 为无碰撞的可行安全集.该集合由道路几何边界与预设安全余量共同界定,旨在将车辆的绝对位置约束于安全通道内.

由于误差动力学(5)的高度非线性以及避障约束 $\mathcal{X}_{\text{free}}$ 的非凸性,直接求解上述受限最优控制问题(6)极其困难.为此,采用MPPI将硬约束转化为代价函数中的惩罚项,使得受限最优控制问题转化为无约束路径积分问题,从而降低了问题的求解难度.

MPPI以当前时刻的名义控制输入 \mathbf{u}_k 为均值,叠加高斯采样噪声 $\boldsymbol{\epsilon}_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$,并行生成 K 条采样轨迹.定义第 m 条采样轨迹为 $\tau^{(m)} = \{(\mathbf{e}_{k+i}^{(m)}, \mathbf{v}_{k+i}^{(m)})\}_{i=0}^{N-1}$,其中 $\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$ 为施加噪声后的控制输入.根据Feynman-Kac引理,最优控制律可近似为所有采样轨迹控制输入的加权平均^[9]:

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_k + \frac{\sum_{m=1}^K w^{(m)} \boldsymbol{\epsilon}_k^{(m)}}{\sum_{m=1}^K w^{(m)}}, \quad (7)$$

$$w^{(m)} \propto \exp\left(-\frac{1}{\lambda} S(\tau^{(m)})\right). \quad (8)$$

其中, $S(\tau^{(m)})$ 为第 m 条采样轨迹的累积代价值(包含原代价 J 及约束违反惩罚).尽管MPPI利用随机采样与软约束惩罚机制进行优化求解,但本文所研究的闭环系统本质上仍是基于确定性误差动力学方程(5)的受限系统.因此,后续章节将重点探讨在确定性系统框架下,如何通过改进MPPI算法架构以保证闭环误差系统的稳定性.

2 LS-MPPI 控制器设计

2.1 统一代价函数与平滑屏障构建

为满足MPPI随机采样机制与闭环稳定性分析的理论要求,需对式(6a)定义的性能指标 $J(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k)$ 中的各项进行具体构造.

考虑如下形式的阶段代价函数 $\ell(\mathbf{e}, \mathbf{u})$:

$$\ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k) = \|\mathbf{e}_k\|_Q^2 + \mathcal{B}(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_{k,\text{ref}}) + \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}_k^T \Sigma^{-1} \mathbf{u}_k. \quad (9)$$

其中, $Q \succeq 0$ 为半正定状态权重矩阵; $\mathcal{B}(\cdot)$ 为基于绝对状态的障碍物势场项.特别地,第三项控制代价采用了特定的二次型结构,这是由MPPI的信息论对偶性所决定的必要形式.其中,采样噪声协方差 Σ 与温度系数 λ 共同确立了等效控制权重 $R = \lambda \Sigma^{-1}$,从而在物理层面上实现了对控制能量的正则化约束^[9].

针对赛道边界等硬约束,传统指示函数呈现出非连续的阶跃特性.离散的代价结构会导致MPPI的重要性采样权重分布呈现二值化(在可行域均一,边界处坍塌),从而引发严重的权重退化现象,使得采样分布难以向安全区域有效收敛.并且,非连续的障碍物惩罚违背了Lyapunov稳定性分析对于代价函数光滑性的先验要求,导致闭环系统的稳定性保证失效.为此,本文将公式(9)中的障碍物势项 $\mathcal{B}(\cdot)$ 具体实例化为如下单边二次型软屏障函数:

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \eta \cdot \left[\max\left(0, \frac{|d_{\text{lateral}}(\mathbf{x})| - d_{\text{safe}}}{d_{\text{margin}}}\right) \right]^2. \quad (10)$$

其中, d_{lateral} 为车辆相对于道路中线的横向偏差, d_{safe} 为安全通道半宽(同时考虑车宽与安全余量), d_{margin} 为软屏障的缓冲带宽度, η 为惩罚增益系数.函数 $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ 在约束边界具备 C^1 阶连续性,有效规避了传统硬约束惩罚引发的采样坍塌问题,并满足了Lyapunov稳定性分析中对代价函数的先验假设.当车辆逼近或越过约束边界时,代价呈二次方增长,这种连续变化的惩罚势场能够为MPPI采样器提供明

确的代价区分度,从而在无需显式计算梯度的前提下,有效引导采样分布向可行域内部演化。

为确保闭环系统的稳定性,引入终端惩罚项 $V_f(\mathbf{e}_{k+N}) = \|\mathbf{e}_{k+N}\|_P^2$, 其中 P 为非线性误差系统局部线性化后,求解离散代数黎卡提方程所得的正定解。该项通过逼近无限时域代价,拓宽了系统吸引域,使得控制器在较大的初始误差下仍能保持递归可行与渐近稳定^[15]。

2.2 算法流程

如图1所示,LS-MPPI策略采用“热启动构造—随机探索—稳定性仲裁”的双支路递推架构,其流程如下:首先构建具备递推可行性的热启动轨迹。利用 $k-1$ 时刻的最优控制序列 \mathbf{U}_{k-1}^* , 通过时域平移操作并结合末端局部控制律,构造 k 时刻的热启动解:

$$\tilde{\mathbf{U}}_k = \{\mathbf{u}_{k|k-1}^*, \dots, \mathbf{u}_{k+N-2|k-1}^*, \kappa_f(\mathbf{e}_{k+N-1|k-1}^*)\}. \quad (11)$$

其中, $\kappa_f(\mathbf{e}) = K_{\text{LQR}}\mathbf{e}$ 为基于终端线性化模型设计的LQR局部控制律。

在此基础上,执行基于时间衰减权重的随机采样优化。以上一次的解 \mathbf{U}_{k-1}^* 为均值构建高斯采样分布,生成 M 组候选控制序列。为确保最终输出的控制律不超越物理极限,所有叠加高斯噪声的前向采样

序列在代入动力学方程推演前,均通过饱和函数严格投影至容许控制凸集 \mathcal{U} 内。依据凸组合性质,加权求和后的MPPI最优控制律亦将严格满足该输入约束。为增强算法在极端工况下(如车辆短暂偏离可行域)的恢复能力,在MPPI随机采样优化阶段引入障碍物代价的时间衰减策略:

$$\tilde{\ell}_{\text{coll}}(\mathbf{x}_{k+i}, i) = \gamma^i \mathcal{B}(\mathbf{x}_{k+i}), \quad \gamma \in (0, 1). \quad (12)$$

该策略作为一种数值启发式机制,并不改变原最优控制问题(4)的理论目标。其通过降低远端预测时域的惩罚权重,重塑采样空间的代价,引导权重分布向能够最终重返赛道的轨迹倾斜,进而通过加权求和产生探索控制序列 $\mathbf{U}_k^{\text{MPPI}}$ 。由于LS-MPPI的全局前向采样寻优架构与底层动力学的解析形式解耦,该策略在理论上具备向高自由度四轮模型及复杂非线性轮胎模型平滑迁移的通用性。

最后,引入基于Lyapunov理论的稳定性监督机制。该机制剥离探索阶段的时间衰减因子,直接采用原始统一代价函数对随机优化解 $\mathbf{U}_k^{\text{MPPI}}$ 与热启动解 $\tilde{\mathbf{U}}_k$ 执行非增仲裁:仅当 $J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^{\text{MPPI}}) \leq J_N(\mathbf{e}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k)$ 时更新控制序列,否则强制回退至热启动解。此判定逻辑从理论底层确保了Lyapunov函数沿闭环轨迹的单调非增特性。

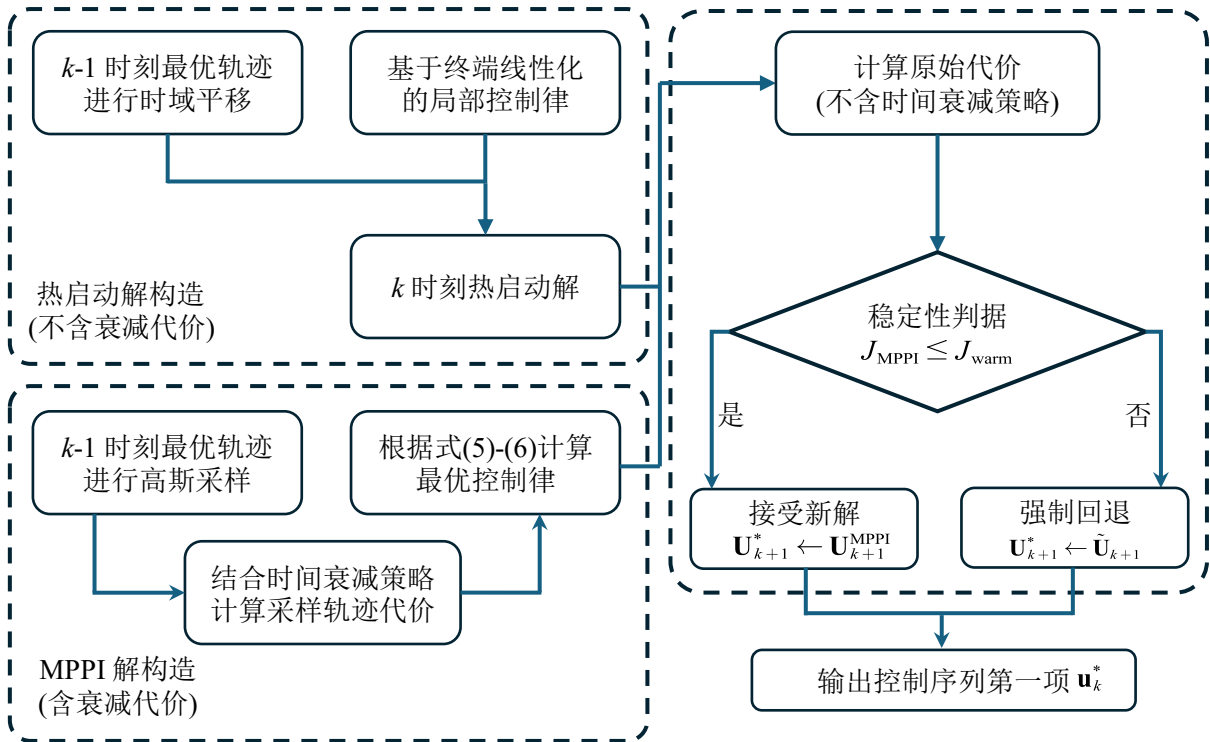


图1 融合时间衰减策略与稳定性仲裁的LS-MPPI控制框架

2.3 递推可行性与闭环稳定性

本节证明在引入LQR终端修正与稳定性仲裁机制后,在无终端约束下仍具备LS-MPPI递推可行

性与闭环渐近稳定性。鉴于误差动力学 $f_e(\cdot)$ 的局部Lipschitz连续性及代价函数 $\ell(\cdot)$ 的严格正定性,引入如下终端不变集假设^[15]:

假设 1 在包含原点的紧集 $\Omega \subseteq \mathcal{X}_{\text{free}}$ 内, 存在局部辅助控制律 $\kappa_f(\mathbf{e})$ 及连续正定终端代价 $V_f(\mathbf{e})$. 使得对于任意 $\mathbf{e} \in \Omega$, 系统满足输入约束 $\kappa_f(\mathbf{e}) \in \mathbb{U}$ 与正不变性 $f_e(\mathbf{e}, \kappa_f(\mathbf{e})) \in \Omega$, 且满足如下耗散不等式:

$$V_f(f_e(\mathbf{e}, \kappa_f(\mathbf{e}))) - V_f(\mathbf{e}) + \ell(\mathbf{e}, \kappa_f(\mathbf{e})) \leq 0. \quad (13)$$

考虑前文定义的终端代价 $V_f(\cdot)$ 与局部控制律 $\kappa_f(\cdot)$, 利用 LQR 控制器在原点邻域内的局部指数稳定特性, 即可保证在终端集 Ω 内严格满足正不变性条件及耗散不等式 (13).

引理 1 若假设 1 成立, 且时刻 k 的最优控制序列 \mathbf{U}_k^* 可行, 则由式 (11) 定义的 $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$ 满足系统过程约束与终端集约束, 且其对应的性能指标满足如下单调递减性质:

$$J_N(\mathbf{e}_{k+1}, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}) \leq J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^*) - \ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k^*). \quad (14)$$

证明 首先验证 $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$ 的可行性. 根据构造式 (11), 序列前 $N-1$ 步的可行性由 \mathbf{U}_k^* 保证. 对于新增终端步, 令 $\mathbf{e}_f := \mathbf{e}_{k+N|k}$ 表示 k 时刻预测的终端状态, $\mathbf{e}_f^+ := \mathbf{e}_{k+N+1|k+1}$ 表示 $k+1$ 时刻热启动序列生成的新终端状态, 辅助控制律 $\mathbf{u}_f := \kappa_f(\mathbf{e}_f)$.

依据假设 1, 由于 $\mathbf{e}_f \in \Omega$, 则 $\mathbf{u}_f \in \mathbb{U}$ 且 $\mathbf{e}_f^+ \in \Omega$. 综上所述, $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$ 全程满足状态与输入约束, 具备作为可行解的资格.

其次分析价值函数的单调性. 将 k 时刻的最优性能指标 $J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^*)$ 按时序拆解:

$$J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^*) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell(\mathbf{e}_{k+i|k}, \mathbf{u}_{k+i|k}^*) + \alpha V_f(\mathbf{e}_f). \quad (15)$$

相应地, $k+1$ 时刻热启动序列对应的性能指标为

$$J_N(\mathbf{e}_{k+1}, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \ell(\mathbf{e}_{k+i|k}, \mathbf{u}_{k+i|k}^*) + \ell(\mathbf{e}_f, \mathbf{u}_f) + \alpha V_f(\mathbf{e}_f^+). \quad (16)$$

对两时刻的价值函数作差, 相消公共项和项后可得:

$$\Delta J = -\ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_{k|k}^*) + \Delta_{term}. \quad (17)$$

其中终端增量项 Δ_{term} 定义为

$$\Delta_{term} := \ell(\mathbf{e}_f, \mathbf{u}_f) + \alpha[V_f(\mathbf{e}_f^+) - V_f(\mathbf{e}_f)]. \quad (18)$$

利用终端代价的耗散不等式 (13), 可得:

$$\Delta_{term} \leq \ell(\mathbf{e}_f, \mathbf{u}_f) - \alpha \ell(\mathbf{e}_f, \mathbf{u}_f) = (1 - \alpha) \ell(\mathbf{e}_f, \mathbf{u}_f). \quad (19)$$

由于 $\alpha \geq 1$ 且 $\ell(\cdot) \geq 0$, 可知 $\Delta_{term} \leq 0$. 进而推出最终的单调递减不等式:

$$J_N(\mathbf{e}_{k+1}, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}) - J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^*) \leq -\ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k^*). \quad (20)$$

证毕. \square

基于上述引理, 给出 LS-MPPI 优化问题递推可

行性的主要定理.

定理 1 考虑非线性车辆系统 (1). 若假设 1 成立且初始时刻 $k=0$ 的优化问题可行, 则对于任意 $k > 0$, LS-MPPI 控制策略生成的控制序列 \mathbf{U}_k^* 及其闭环状态轨迹均严格满足系统约束, 即 LS-MPPI 策略具备递推可行性.

证明 假设 k 时刻优化问题可行, 即存在最优解 \mathbf{U}_k^* . 根据引理 1, 由 \mathbf{U}_k^* 构造的热启动序列 $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$ 严格满足所有的状态与输入约束, 从而保证 $k+1$ 时刻优化问题的可行解集非空.

考虑算法的稳定性监督机制, 分析 $k+1$ 时刻的最终输出序列 \mathbf{U}_{k+1}^* 的生成逻辑可知: 若随机采样主导的解 $\mathbf{U}_{k+1}^{\text{MPPI}}$ 被采纳, 则其必然通过了可行性检查并满足约束; 若 MPPI 解不可行或代价更高, 算法将强制回退至热启动解 $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$. 由于 $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$ 已由引理 1 证明具备可行性, 因此这一回退操作保证算法能输出一个有效解. 综上, LS-MPPI 策略对于任意 $k \geq 0$ 均保持递推可行. \square

定理 2 考虑由式 (5) 描述的受限误差系统在 LS-MPPI 控制律作用下的闭环动态. 若阶段代价严格正定且假设 1 成立, 则对于 \mathcal{X}_N 内的任意初始状态 \mathbf{e}_0 , 状态轨迹满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\| = 0$.

证明 选取 k 时刻的最优代价函数值作为 Lyapunov 候选函数:

$$V(\mathbf{e}_k) := J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^*). \quad (21)$$

根据代价函数定义式 (6a) 及阶段代价式 (9), 存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\alpha_1(\cdot)$ 使得阶段代价满足 $\ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k^*) \geq \alpha_1(\|\mathbf{e}_k\|)$. 由于 $V(\mathbf{e}_k)$ 是阶段代价的累加且各项非负, 因此 $V(\mathbf{e}_k) \geq \ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k^*) \geq \alpha_1(\|\mathbf{e}_k\|)$, 即 $V(\mathbf{e}_k)$ 正定且径向无界.

由于有限时域最优控制问题的可行集 \mathcal{X}_N 是闭合集, 且代价函数 $V(\cdot)$ 在该集合上连续, 根据连续函数的性质, 必然存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\alpha_2(\cdot)$ 使得对于任意 $\mathbf{e}_k \in \mathcal{X}_N$, 满足 $V(\mathbf{e}_k) \leq \alpha_2(\|\mathbf{e}_k\|)$.

现考察 Lyapunov 函数的一阶差分 $\Delta V_k = V(\mathbf{e}_{k+1}) - V(\mathbf{e}_k)$. 依据算法的稳定性监督机制, $k+1$ 时刻的控制序列 \mathbf{U}_{k+1}^* 必优于或等同于热启动序列 $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}$, 即:

$$V(\mathbf{e}_{k+1}) = J_N(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}^*) \leq J_N(\mathbf{e}_{k+1}, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}). \quad (22)$$

结合引理 1 关于热启动序列的价值下降性质, 可得:

$$\Delta V_k \leq J_N(\mathbf{e}_{k+1}, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}) - J_N(\mathbf{e}_k, \mathbf{U}_k^*) \leq -\ell(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k^*). \quad (23)$$

利用阶段代价的下界性质, 差分满足:

$$V(\mathbf{e}_{k+1}) - V(\mathbf{e}_k) \leq -\alpha_1(\|\mathbf{e}_k\|) \leq 0. \quad (24)$$

上述不等式表明 $V(\mathbf{e}_k)$ 是沿闭环轨迹严格单调递减的序列. 由于 $V(\mathbf{e}_k)$ 有下界0且单调递减, 根据Lyapunov稳定性理论^[20], 序列 $V(\mathbf{e}_k)$ 收敛至0. 进一步地, 由不等式 $V(\mathbf{e}_k) \geq \alpha_1(\|\mathbf{e}_k\|)$ 及 $\alpha_1(\cdot)$ 的 \mathcal{K}_∞ 性质可知, 当 $V(\mathbf{e}_k) \rightarrow 0$ 时, 必有 $\|\mathbf{e}_k\| \rightarrow 0$.

由此得出的界限性质 $\alpha_1(\|\mathbf{e}_k\|) \leq V(\mathbf{e}_k) \leq \alpha_2(\|\mathbf{e}_k\|)$ 配合耗散特性 $\Delta V_k \leq -\alpha_1(\|\mathbf{e}_k\|)$, 严格满足了Lyapunov渐近稳定定理的充分条件^[20,21], 闭环系统在原点处渐近稳定. \square

3 仿真结果分析

为验证所提出的LS-MPPI策略在受限车辆路点跟踪任务中的有效性, 并评估其在闭环稳定性与安全性方面的理论优势, 本章依托Python环境开展了多组对比仿真实验. 实验平台基于PyTorch框架构建, 利用CUDA并行加速技术实现了大规模随机采样轨迹的同步生成与非线性动力学积分.

被控对象为公式(1)描述的非线性单车车辆模型, 其物理参数配置映射自小型无人驾驶底盘. 通过引入简化的Pacejka魔术公式^[19], 以精确描述车辆在过弯时的轮胎非线性特性. 车辆的具体物理参数如表1所示.

表1 车辆动力学模型参数

变量名称	数值/单位	变量名称	数值/单位
整车质量 m	70.0 kg	横摆转动惯量 I_z	10.0 kg·m ²
质心到前轴距离 l_f	0.325 m	质心到后轴距离 l_r	0.325 m
轮胎刚度因子 B	10.0	轮胎形状因子 C	1.9
轮胎峰值因子 D	1.0	路面附着系数 μ	0.8
前轮最大转角 δ_{\max}	0.6 rad	最大加速度 a_{\max}	0.6 m/s ²
最大制动 a_{\min}	-2.0 m/s ²	安全避让余量 d_{safe}	0.3 m

3.1 跟踪性能分析

为了全面对比验证控制器的泛化性能, 本实验构建了两种多样化复杂测试场景: 场景一为包含连续S形弯道和变曲率过渡弯道的复合测试路况^[22]; 场景二为新增的变曲率补充路段, 用于进一步考察系统在连续动态曲率下的响应. 道路附着系数 $\mu = 0.8$, 目标车速为2m/s.

为全面验证LS-MPPI控制器的跟踪性能, 将其与标准MPPI(Baseline)及基于离散控制屏障函数的Shield-MPPI^[12]在相同复合工况下进行对比. 如图2(a)和图2(b)所示, 标准MPPI策略在连续大曲率弯道处出现了明显的轨迹偏离和转向不足现象. Shield-MPPI通过离散控制屏障函数代价惩罚与基于梯度的局部修复机制, 成功限制了轨迹越界. 然而, 由于其局部修复步骤侧重于消除控制屏障函数违规而非

全局误差最小化, 导致其轨迹在弯道内测表现出一定的防御性偏差. 相比之下, LS-MPPI生成的轨迹始终紧密贴合参考路径, 展现出更优的循迹精度.

表2汇总了三种算法的量化误差指标. 数据显示, LS-MPPI在综合跟踪性能上具有优势. 相比于标准MPPI, 横向均方根误差(RMSE)从0.2256 m降低至0.1275 m, 性能提升43.5%. 横向最大误差(Max)从0.6427 m下降至0.3347 m, 降幅达47.9%. 由于Shield-MPPI引入了基于一阶梯度的局部硬修复机制, 强制消除了残余的约束违规, 其在横向最大偏差指标上表现最稳健, 优于LS-MPPI. 然而, LS-MPPI在表征全局跟踪品质的横向RMSE及航向RMSE上分别优于Shield-MPPI约5.5%与18.5%. 这表明, LS-MPPI的稳定性监督机制能比Shield-MPPI的安全过滤机制实现更优的控制最优性平衡.

图2(c)-(d)和图2(e)-(f)分别记录了横向误差与航向角误差随仿真步数的演化过程. 在场景一第200步左右的急弯及场景二的连续曲率激变工况下, 标准MPPI的横向误差呈现出剧烈的脉冲式波动, 峰值达到0.65 m, 且伴随较大的航向震荡. Shield-MPPI的误差虽被限制在安全范围内, 但在快速换向过程中仍存在明显的超调. 相比之下, LS-MPPI的横向误差始终保持在 ± 0.2 m的窄区间内部, 波形更加平缓且震荡频率降低. 在航向角控制方面, LS-MPPI的航向角误差曲线表现出更高的信噪比与平滑度. 综上所述, LS-MPPI不仅提升了跟踪精度, 更通过对误差波动幅值与频率的双重抑制, 增强了闭环系统在高动态工况下的稳定性.

3.2 系统恢复力与可靠性评估

本实验构建了融合大偏差初始态、算力/视界双重受限与稀疏奖励的对抗性场景, 旨在评估控制器对极端扰动的恢复能力. 实验依托椭圆跑道($v_{\text{ref}} = 2.0$ m/s)设计极端初始工况: 车辆横向偏置4.0 m且航向垂直于赛道. 在算力受限(采样数 $K = 200$, 预测时域 $N = 15$)的条件下, 并在保留阶段代价中原有控制能量惩罚项的前提下, 采用如下基于状态的饱和型代价函数替代公式(9)中的所有状态依赖项:

$$\ell_{\text{sat}}(\mathbf{x}) = w_{\text{lat}} \left(1 - \exp\left(-\frac{d_{\text{lateral}}(\mathbf{x})^2}{\sigma^2}\right) \right). \quad (25)$$

其中 $\sigma = 0.5$ m, w_{lat} 为对应的权重系数. 在此代价结构下, 控制量 \mathbf{u} 经由前向动力学推演隐式参与饱和与代价评估, 并持续受二次型能量项的显式正则化约束. 引入该饱和型代价函数的动机并非由于原二次型代价(9)在鲁棒性方面存在问题, 而是旨在构建一

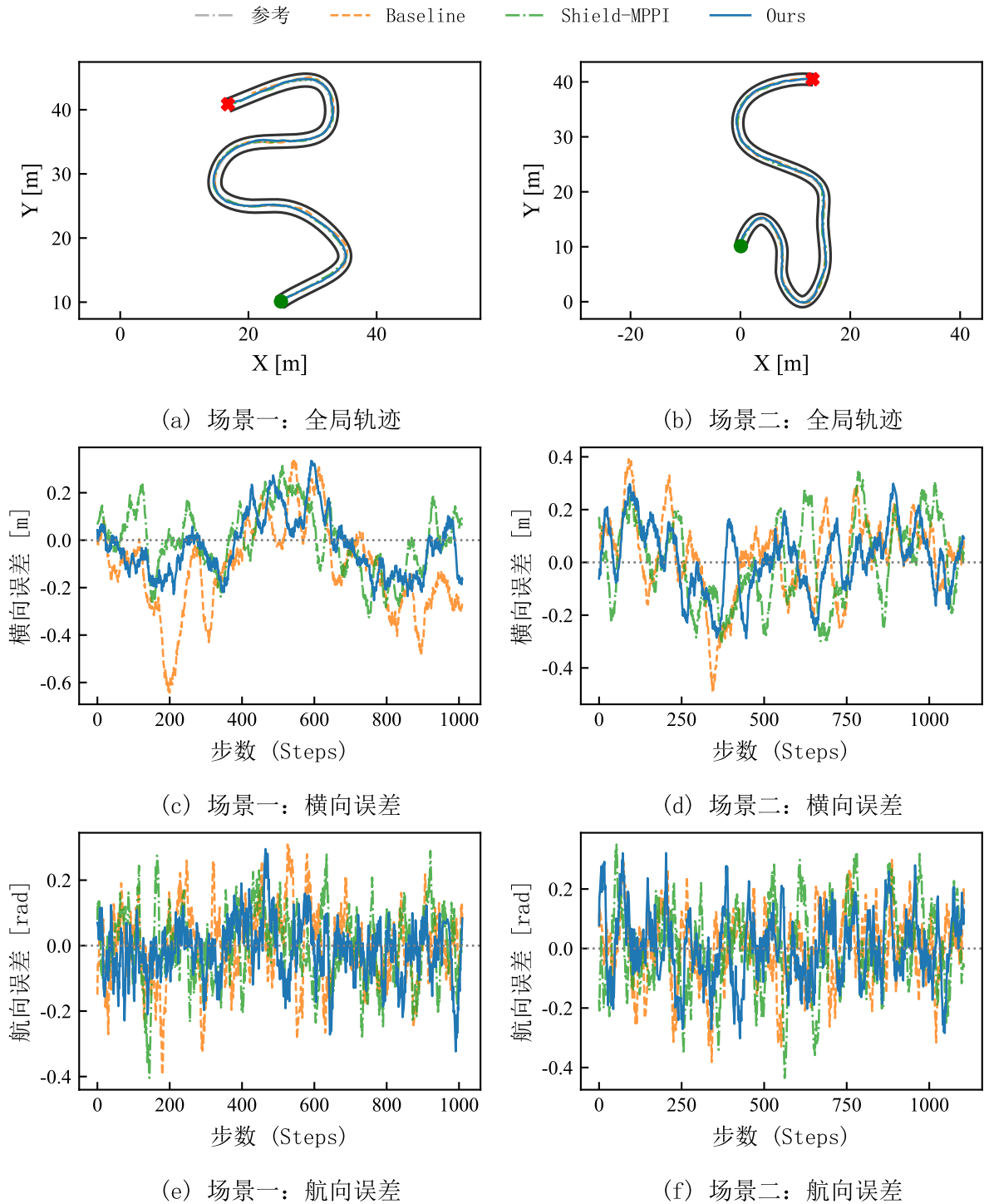


图2 连续变曲率工况下不同控制算法的跟踪误差演化对比

表2 三种控制算法的跟踪误差指标对比

评价指标	Baseline	Shield-MPPI	Ours (LS-MPPI)	提升幅度
横向RMSE [m]	0.2256	0.1349	0.1275	43.5%
横向Max [m]	0.6427	0.3253	0.3347	47.9%
航向RMSE [rad]	0.1148	0.1085	0.0884	23.0%
航向Max [rad]	0.3941	0.4045	0.3234	17.9%

个具备梯度缺失特征的对抗性验证环境. 具体而言, 当车辆横向偏置超过1.5 m时, 运行代价进入"平坦区"(即局部梯度 $\nabla l \approx 0$), 迫使控制器完全丧失局部

寻优指引. 此极端工况下用于验证系统在失去阶段代价指引时, 凭借 LS-MPPI 策略是否仍能确立闭环系统的收敛性. 此外, 鉴于该饱和函数在原点邻域的泰勒展开局部等效于标准二次型形式, 此设定在确保压力测试严苛度的同时, 亦从数学层面上维持了算法在常规循迹区域内的理论自洽性.

图3展示了三种控制器的恢复轨迹对比. 实验结果显示, 标准 MPPI 与 Shield-MPPI 在该工况下均发生了控制崩溃. 机理在于, 当核心代价失效时, 算

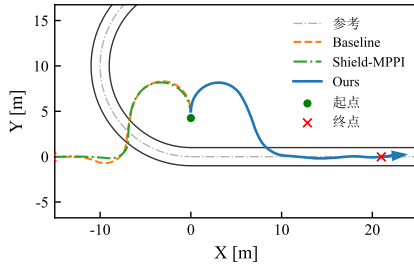


图3 极限恢复轨迹对比

法被迫转向优化控制平滑度等次要目标,导致了逆行. 具体而言, 标准 MPPI 受限于"采样枯竭", 而 Shield-MPPI 虽引入离散控制屏障函数修复, 但由于修复视界极短且缺乏纵向进度引导, 陷入局部梯度陷阱, 误导了全局决策. 相比之下, LS-MPPI(实线) 展现了良好的收敛性. 尽管运行代价同样面临梯度消失问题, 但引入的终端代价 $V_f(x_N)$ 为系统提供了无限时域的全局势能指引. 即便在 $N = 15$ 的短视条件下, 终端代价依然能精确地惩罚远离平衡流形的状态. 结果显示, LS-MPPI 能够迅速识别正确的恢复方向, 在 20m 行程内将车辆平稳地拉回赛道中心.

3.3 参数敏感性与计算效率分析

本小节选取逆温度系数 λ 与终端 Lyapunov 惩罚权重 α 作为敏感性分析对象. 在 1.0 m 初始偏置的极限工况下, LS-MPPI 的表现如图 3 所示. 在 $\lambda \in [0.1, 5.0]$ 与 $\alpha \in [0.01, 1.0]$ 的宽域参数空间内, 系统的横向 RMSE 仍在 0.40 m 以下, 有效规避了采样方法在大偏差场景下的发散风险, 验证了 Lyapunov 监督机制提供的稳定性下界. 图 4 进一步说明, 当终端惩罚 $\alpha \approx 0.05$ 且 $\lambda \in [1.0, 2.0]$ 时, 系统处于最优性能子流形. 通过深层次的机理分析, 监督器干预率与参数配置间存在明显的数值掩蔽效应. 在 $\alpha \leq 0.1$ 的低权重区间, 减小 λ 会导致采样序列呈现高频率抖振, 被监督器捕捉后, 干预率跃升至 40%. 当 α 提升至 1.0 时, 巨大的终端代价在数量级上淹没了瞬时性能惩罚, 使得稳定性监督机制对低质量抖振序列的辨识灵敏度下降, 进而引发干预率的反常回落. 这一现象说明了限制终端惩罚权重以维持稳定性监督机制敏感性的理论必要性.

表 3 汇总了不同算法的计算效率对比. 在长时域 ($N = 50$) 下, 虽然受限于 Python 框架下 CPU-GPU 张量同步的串行开销, LS-MPPI 的控制频率为 43.02 Hz, 基于标准 MPPI (155.56 Hz), 但其计算效率优于同等基线 Shield-MPPI (31.36 Hz). 证明了 LS-MPPI 的 $O(1)$ 终端代价评估比 Shield-MPPI 的多步梯度下降修复具有更低的在线算力负担. 同时, 该结

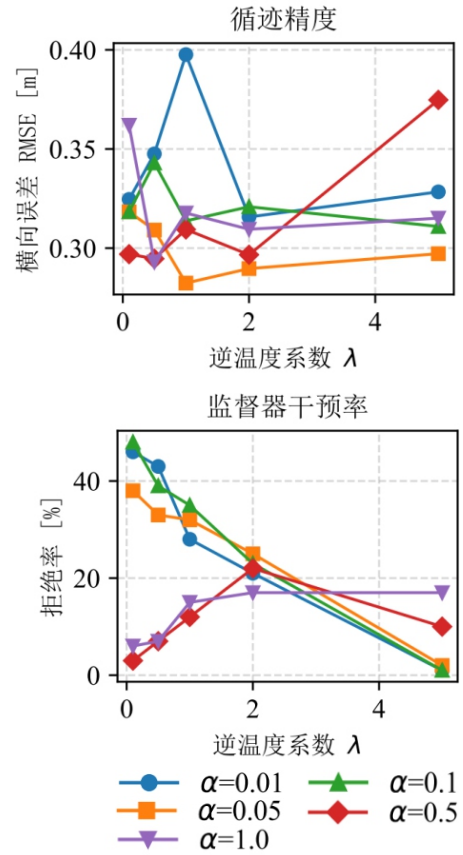


图4 参数敏感性分析

表3 不同时段配置下的计算效率与性能综合对比

算法配置	时域 (N)	采样数 (K)	频率 [Hz]	RMSE [m]
标准MPPI (Baseline)	50	5000	155.56	0.2379
标准MPPI (Short)	30	5000	96.64	0.3502
LS-MPPI	50	5000	43.02	0.1365
LS-MPPI(Fast)	30	5000	58.87	0.1650
Shield-MPPI	50	5000	31.36	0.1249
Shield-MPPI(Fast)	30	5000	49.39	0.1967

算频率仍满足中低速场景的实时需求. GPU 性能分析表明, 并行采样数 K 对延时的影响呈亚线性, 而预测时域 N 决定的前向积分次数才是制约频率的瓶颈. 因此, 缩短 N 是提升效率的关键.

进一步分析表 3 数据可知, 当 N 缩减至 30 时, 标准 MPPI 因陷入"短视"困境导致 RMSE 恶化至 0.3502 m. 相比之下, LS-MPPI(Fast) 利用 LQR 终端代价有效补偿了有限时域的截断误差, 在控制频率提高至 58.87 Hz(提升约 36.8%) 的同时, 仍保持了 0.1650 m 的高循迹精度. 实现在各项指标上均优于同为短时域配置的 Shield-MPPI(Fast).

4 结论

针对受限车辆的路点跟踪控制问题, 本文提出了一种具有闭环渐近稳定性保证的 LS-MPPI 策略. 利用 Lipschitz 连续的软屏障代价函数与"热启动-仲

裁"监督机制,该策略克服了传统 MPPI 的采样梯度稀疏与随机非稳定性问题,在毫秒级实时响应下提升了跟踪精度,同时在初始越界工况下展现出良好的恢复能力.此外,严格推导了 LS-MPPI 优化问题的递推可行性与闭环渐近稳定性的充分条件.未来工作将聚焦于时变环境下的车辆队列博弈避障以及模型参数的在线自适应策略研究.

参考文献 (References)

- [1] Yurtsever E, Lambert J, Carballo A, et al. A survey of autonomous driving: Common practices and emerging technologies[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 58443-58469.
- [2] Parekh D, Poddar N, Rajpurkar A, et al. A review on autonomous vehicles: Progress, methods and challenges[J]. *Electronics*, 2022, 11(14): 2162.
- [3] Xiong W L, He D F, Du H P. Learning economic model predictive control via clustering and kernel-based Lipschitz regression[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2025, 362(12): 107787.
- [4] Xiong W L, He D F, Mu J B, et al. Adaptive stochastic model predictive control via network ensemble learning[J]. *International Journal of Systems Science*, 2023, 54(16): 3013-3026.
- [5] He D F, Luo J, Du H P. Dynamic negotiation-based distributed EMPC with varying consensus speeds of heterogeneous electric vehicle platoons[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2024, 32(4): 1495-1503.
- [6] Falcone P, Borrelli F, Asgari J, et al. Predictive active steering control for autonomous vehicle systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2007, 15(3): 566-580.
- [7] 李学鋈, 汪怡平, 苏楚奇, 等. 智能车辆路径跟踪控制方法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(1): 143-150.
(Li X Y, Wang Y P, Su C Q, et al. Research on the path tracking control method for intelligent vehicles[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(1): 143-150.)
- [8] 王康, 李琼琼, 王子洋, 等. 考虑侧倾的无人车 NMPC 轨迹跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2535-2542.
(Wang K, Li Q Q, Wang Z Y, et al. Trajectory tracking control for automated vehicle based on NMPC considering vehicle rolling motion[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(10): 2535-2542.)
- [9] Williams G, Drews P, Goldfain B, et al. Information-theoretic model predictive control: Theory and applications to autonomous driving[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2018, 34(6): 1603-1622.
- [10] Gandhi M S, Vlahov B, Gibson J, et al. Robust model predictive path integral control: Analysis and performance guarantees[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2021, 6(2): 1423-1430.
- [11] Balci I M, Bakolas E, Vlahov B, et al. Constrained covariance steering based tube-MPPI[C]. American Control Conference. Atlanta, 2022: 4197-4202.
- [12] Yin J, Dawson C, Fan C C, et al. Shield model predictive path integral: A computationally efficient robust MPC method using control barrier functions[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2023, 8(11): 7106-7113.
- [13] Yin J, Zhang Z Y, Tsiotras P. Risk-aware model predictive path integral control using conditional value-at-risk[C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation. London, 2023: 7937-7943.
- [14] Qu Y, Chu H Q, Gao S H, et al. RL-driven MPPI: Accelerating online control laws calculation with offline policy[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024, 9(2): 3605-3616.
- [15] Limon D, Alamo T, Salas F, et al. On the stability of constrained MPC without terminal constraint[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 832-836.
- [16] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [17] Dang F Y, Chen D, Chen J, et al. Event-triggered model predictive control with deep reinforcement learning for autonomous driving[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024, 9(1): 459-468.
- [18] Anderson J. EBOOK: Fundamentals of aerodynamics (SI units)[M]. New York: McGraw-Hill, 2011.
- [19] Pacejka H. Tire and vehicle dynamics[M]. The 2nd edition. Oxford: Elsevier, 2005.
- [20] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. The 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [21] Rawlings J B, Mayne D Q, Diehl M. Model predictive control: Theory, computation, and design[M]. The 2nd edition. Madison: Nob Hill Publishing, 2017.
- [22] 寇发荣, 宋阳阳, 杨朝旭, 等. 采用延迟补偿和曲率增广的车辆路径跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2025, 40(7): 2107-2116.
(Kou F R, Song Y Y, Yang Z X, et al. Vehicle path tracking control using delay compensation and curvature broadening[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(7): 2107-2116.)

作者简介

何士强 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为无人车轨迹跟踪、模型预测路径积分控制, E-mail: 211123030152@zjut.edu.cn;

熊伟亮 (1999-), 男, 博士生, 主要研究方向为非线性系统、预测控制、数据驱动控制, E-mail: 1112103020@zjut.edu.cn;

何德峰 (1979-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为智能系统预测控制理论与应用, E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn;

邢科新 (1977-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为移动机器人控制、多传感器信息融合, E-mail: xkx@zjut.edu.cn;

V.P. Shkodyrev (1951-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为智能控制理论、工业数字化与机器人、多智能体系统, E-mail: shkodyrev_vp@spbstu.ru.