基于多模态多目标的侦查无人机三维航迹规划

王 雪[1,2]，金友振[1]，廖伟志[1]，陈泽丰[3]，向 毅[4]，夏小云[1†]

(1. 嘉兴大学 人工智能学院，浙江 嘉兴 314001；2. 浙江理工大学 计算机科学与技术学院，杭州 310018；
3. 中山大学 人工智能学院，广东 珠海 519082；4. 华南理工大学 软件学院，广州 510006)

摘 要: 针对三维复杂环境中无人机航迹规划存在的多目标冲突与决策空间多样性不足问题, 提出一种改进的多模态多目标差分进化算法 (MMODE_HDMS). 所提出算法以燃油消耗与综合飞行风险为双优化目标, 采用球形矢量坐标对航迹进行编码. 在 MMODE_CSCD 框架的基础上, 引入动态变异概率策略、混合变异策略以及基于 Hausdorff 距离的环境选择机制, 以平衡探索与开发、增强局部搜索能力并维持路径形态多样性. 通过在对称地势与非对称地势设置不同密度障碍物生成四种三维仿真地形中进行实验. 实验结果表明 MMODE_HDMS 的 IGD 相较于 MMODE_CSCD 在对称地势下分别降低 20.0% 和 39.4%, 非对称地势下分别降低 5.9% 和 10.7%; 在分布性以及多样性等方面均表现出良好的性能, 且能够有效生成一系列目标性能相近而几何形态多样的等效最优航迹, 验证了其在为实际侦察任务提供多样化可权衡方案方面的优越性和实用价值.

关键词: 三维航迹规划；多模态多目标；差分进化算法；球形矢量坐标；动态变异概率；混合变异策略；Hausdorff 距离

中图分类号: TP18；V279 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2026.0046

引用格式: 王雪, 金友振, 廖伟志, 等. 基于多模态多目标的侦查无人机三维航迹规划 [J]. 控制与决策.

3D path planning for reconnaissance UAVs based on multimodal multi-objective optimization

WANG Xue[1,2]，*JIN You-zhen*[1]，*LIAO Wei-zhi*[1]，*CHEN Ze-feng*[3]，*XIANG Yi*[4]，*XIA Xiao-yun*[1†]

(1. School of Artificial Intelligence，Jiaxing University，Jiaxing 314001，China；2. School of Computer Science and Technology，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China；3. School of Artificial Intelligence，Sun Yat-sen University，Zhuhai 519082，China；4. School of Software Engineering，South China University of Technology，Guangzhou 510006，China)

Abstract: To address multi-objective conflicts and insufficient decision-space diversity in UAV path planning within complex three-dimensional environments, this paper proposes an improved multimodal multi-objective differential evolution algorithm, termed MMODE_HDMS. The algorithm formulates fuel consumption and comprehensive flight risk as the two competing optimization objectives and adopts a spherical vector coordinate representation for path encoding. Built upon the MMODE_CSCD framework, it incorporates a dynamic mutation probability strategy, a hybrid mutation operator, and a Hausdorff-distance-based environmental selection mechanism to balance exploration and exploitation, reinforce local search capability, and preserve the morphological diversity of candidate paths. Extensive experiments are conducted on four types of 3D simulation terrains, constructed by configuring distinct obstacle densities in both symmetric and asymmetric scenarios. The experimental results demonstrate that MMODE_HDMS reduces the IGD value by 20.0% and 39.4% under symmetric terrains, and by 5.9% and 10.7% under asymmetric terrains, compared with MMODE_CSCD. Furthermore, the proposed algorithm exhibits competitive performance in terms of distribution and diversity and can generate a set of equivalent optimal trajectories that achieve similar objective values yet differ significantly in geometric configuration. These findings substantiate the superiority and practical utility of MMODE_HDMS in offering diversified and trade-off alternatives in real-world reconnaissance missions.

收稿日期: 2026-01-14；**录用日期:** 2026-08-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62206313, 61703183)；广东省基础与应用基础研究基金项目 (2026A1515010233, 2026A1515010250, 2024A1515030022).

责任编委: 蒲志强.

†通信作者. E-mail: xiaxiaoyun@live.cn.

Keywords: 3D path planning; multimodal multi-objective; differential evolution algorithm; spherical vector coordinates; dynamic mutation probability; hybrid mutation strategy; Hausdorff distance

0 引 言

侦察无人机凭借其成本低、机动性强等优势, 已成为军事侦察的核心装备. 航迹规划作为其任务规划系统的关键环节, 直接决定无人机的战场生存能力与任务成功率[1-2].

基于智能优化的启发式算法因其在处理复杂约束与多目标问题方面的有效性, 已成为无人机路径规划研究的主流方向之一, 代表方法包括遗传算法[3]、蚁群算法[4]、粒子群算法[5] 和差分进化算法[6] 等. 早期研究多集中于单一目标优化, 如最短路径或最小威胁代价[7] 等. 随着任务复杂度的提升, 实际侦察任务往往涉及多个相互冲突的目标, 多目标进化算法因其能够并行处理多个目标并输出一组 Pareto 最优解, 为决策者提供多种权衡方案, 逐渐受到关注[8]. 为有效求解多目标优化问题, 研究者已提出多种性能良好的多目标进化算法[9], 可主要分为三类: 基于帕累托支配关系[10]、基于指标[11] 以及基于分解[12] 的算法. 这些算法的核心目标是在目标空间中逼近具有良好收敛性与分布性的 Pareto 前沿, 相关评价指标如反世代距离 (IIGD)也得到广泛应用[13]. 对多数算法而言, 维持目标空间中的种群多样性是实现高质量 Pareto 逼近的关键因素之一.

然而, 现有研究多关注目标空间解集的收敛性与分布性[14], 常忽视决策空间中解集的几何形态多样性. 在实际侦察中, 决策者不仅需要多目标权衡方案, 更期望获得结构多样的备选路径, 以应对突发威胁或任务变更. 此类问题属于多模态多目标优化问题, 其特点是在目标空间相近的 Pareto 前沿区域, 对应决策空间中存在多个结构迥异的等效解[15]. 例如, 慈雨等[16] 通过融合平均距离与拥挤距离的双重机制, 在维持收敛性的同时显著增强了解集的多样性与分布均匀性. 同时, 针对此类问题中等效解难以找全的挑战, 段鑫绘等[17] 提出了排斥机制驱动的三阶段演化算法. 当问题扩展至高维目标空间时, 曾骏驰等[18] 则采用灰色关联度与自适应参考向量策略应对收敛性与多样性的平衡难题.

尽管决策空间多样性已逐渐受到关注, 但现有方法仍主要围绕优化 Pareto 前沿的分布展开, 尚未系统性地探索与维持决策空间中的多模态等效解[19]. 虽然已有如 CEC2021 多模态多目标路径规划测试套件提供二维离散路径环境的评估基准[20], 但对三维空间下多模态多目标航迹规划的研究仍显不足, 这限制了其在立体任务场景中的应用.

针对上述问题, 本文聚焦于侦察无人机的三维多模态多目标航迹规划, 在 MMODE_CSCD (multimodal multi-objective differential evolution algorithm based on clustering-based special crowding distance) 算法[21] 基础上, 提出一种名为 MMODE_HDMS (multimodal multi-objective differential evolution with Hausdorff-distance-based dynamic mutation strategy) 的改进算法, 以高效求解具有多个等效 Pareto 最优路径的优化问题, 主要创新如下:

1. 球形编码与自适应变异策略: 采用球形矢量坐标对三维航迹进行编码降低搜索维度; 并引入动态变异概率与混合变异策略, 有效平衡算法的全局探索与局部开发能力.

2. 基于 Hausdorff 距离的多模态选择机制: 摒弃传统拥挤度距离, 提出一种基于 Hausdorff 距离的选择机制, 能够精准识别并维持决策空间中形态各异的等效最优航迹.

3. 决策空间多样性评价体系: 针对三维航迹形态多样性, 提出针对决策空间多样性评价指标, 以系统评估算法对多模态等效解的维持能力.

1 多模态多目标优化

实际工程中常需同时优化多个相互冲突的目标, 由于目标间相互制约, 难以使所有目标同时达到最优, 此类问题被称为多目标优化问题 (MOPs), 其数学模型通常表述为

$$\begin{aligned} &minF(X) = \min(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X))^T \\ &s.t. X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

其中, X 为决策变量, Ω 为决策空间, n 是决策变量的维度, $f_i(X)$代表第 i 个目标函数, m 为目标数量. 当且仅当 $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\}, f_i(X_1) \leqslant f_i(X_2)$, 并且 $\exists j \in \{1,2,\ldots,m\}, f_j(X_1) < f_j(X_2)$, 则称 X_1 支配 X_2. 不被任何其他解支配的解构成帕累托最优解集 (PS), 其在目标空间中的映射称为帕累托前沿 (PF)[22].

然而, 在部分 MOP 中, 决策空间到目标空间的映射并非一一对应, 同一帕累托最优向量可能对应决策空间中多个不同解, 此类问题被定义为多模态多目标优化问题 (MMOPs)[15]. 如图 1 所示, 决策空间中相距较远的解 A 与解 B 映射至目标空间中同

一点 P, 即二者目标性能相近但属于不同模态. 因此, 求解 MMOPs 的算法不仅需在目标空间中获得收敛性与分布性良好的 PF, 还应在决策空间中识别并保持分布于不同模态的等效最优解.

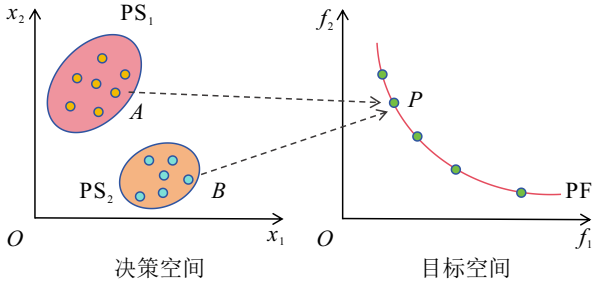


图 1　决策空间与目标空间的映射关系

2　无人机三维路径规划模型

2.1　路径编码

本文采用基于球坐标系的矢量编码方法表示飞行航迹. 一条包含 n 个航迹点的路径 P_i, 表示为 $P_i=\{p_{i1},p_{i2},\ldots,p_{in}\}$, 与传统直角坐标直接记录绝对位置不同, 本文使用相对矢量 $P_{ij}=(\rho_{ij},\psi_{ij},\phi_{ij})$, 描述从点 $p_{i,j-1}$ 到 p_{ij} 的位移, 其中 ρ_{ij} 为径向距离、ψ_{ij} 为极角与 ϕ_{ij} 为方位角. 球坐标到直角坐标的转换公式为:

$$\begin{aligned} x_{ij}&=x_{i,j-1}+\rho_{ij}\times\sin\psi_{ij}\times\cos\phi_{ij}\\ y_{ij}&=y_{i,j-1}+\rho_{ij}\times\sin\psi_{ij}\times\sin\phi_{ij}\\ z_{ij}&=z_{i,j-1}+\rho_{ij}\times\cos\psi_{ij} \end{aligned}\tag{2}$$

球形矢量编码通过建立相邻节点间的位移向量依赖关系, 显著提升可行解的比例, 如图 2 所示.

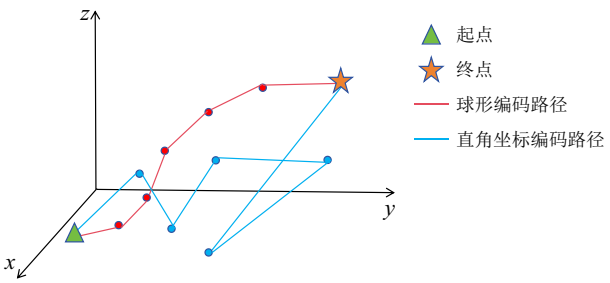


图 2　不同编码方式生成的路径对比示意图

2.2　优化目标

本文以油耗代价与综合飞行风险代价作为两个相互竞争的优化目标, 旨在实现航程经济性与飞行安全性的有效权衡.

2.2.1　油耗代价

在恒定飞行速度假设下, 油耗与航迹总长度成正比. 路径 P_i 的油耗代价 $F_1(P_i)$ 定义为

$$F_1(P_i)=\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n-1}||\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}||.\tag{3}$$

其中, α 为燃油系数且 $\alpha=1$[23].

2.2.2　综合飞行风险代价

飞行风险代价 $F_2(P_i)$ 是由威胁代价、高度代价与平滑代价加权组成:

$$F_2(P_i)=\omega_1\cdot F_t(P_i)+\omega_2\cdot F_h(P_i)+\omega_3\cdot F_s(P_i).\tag{4}$$

其中, $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 为各代价项的权重系数.

1. 威胁代价

威胁代价量化无人机飞越雷达、防空火力等威胁区域的风险. 假设存在 K 个圆柱形威胁区域, 第 k 个威胁 T_k 的投影圆心为 C_k, 半径为 R_k, 危险缓冲距离为 S, 无人机直径为 D. 路径段与威胁区域之间的最小距离为 d_k, 如图 3 所示, 威胁代价模型定义为

$$F_t(P_i)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{K}T_k(\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}})$$

$$T_k(\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}})=\begin{cases}0,\ if\ d_k>S+D+R_k\\ (S+D+R_k)-d_k,\\ \qquad if\ D+R_k<d_k\leqslant S+D+R_k\\ \infty.\ if\ d_k\leqslant D+R_k\end{cases}\tag{5}$$

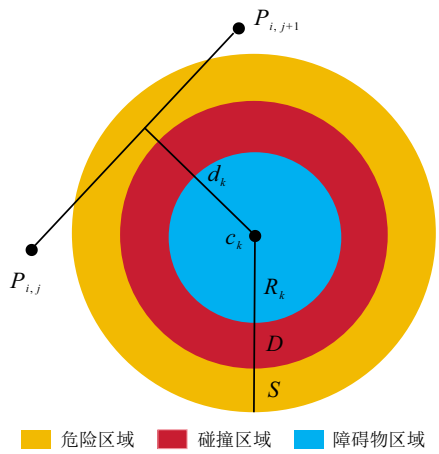


图 3　威胁区域示意图

2. 高度代价

高度代价旨在平衡无人机飞行的隐蔽性与能耗. 飞行高度 h 需限制在最小高度 $h_{\min}$ 与最大高度 $h_{\max}$ 之间, 如图 4 所示.

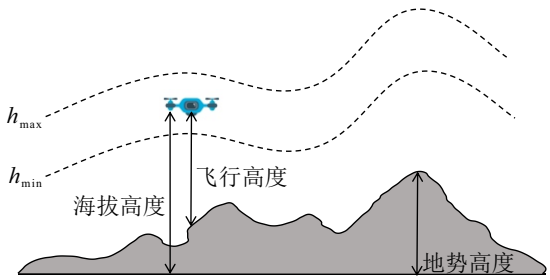


图 4　飞行高度约束示意图

单个航点 P_{ij} 的高度代价定义为

$$H_{ij}=\begin{cases}|h_{ij}-\dfrac{(h_{max}-h_{min})}{2}|,\\ \quad if\ h_{min}\leqslant h_{ij}\leqslant h_{max}\\ \infty,\ 其他\end{cases}\tag{6}$$

其中, h_{ij}表示相对于地面的飞行高度, 路径P_i的高度代价为所有航点代价之和为

$$F_h(P_i)=\sum_{j=1}^{n}H_{ij}.\tag{7}$$

3.平滑代价

平滑代价用于评估路径的转向与爬升变化, 确保路径满足无人机机动性能约束. 如图 5 所示, 设$\vec{k}$为 z 轴方向的单位向量, 投影向量计算为

$$\overrightarrow{P'_{ij}P'_{i,j+1}}=\vec{k}\times(\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}\times\vec{k}).\tag{8}$$

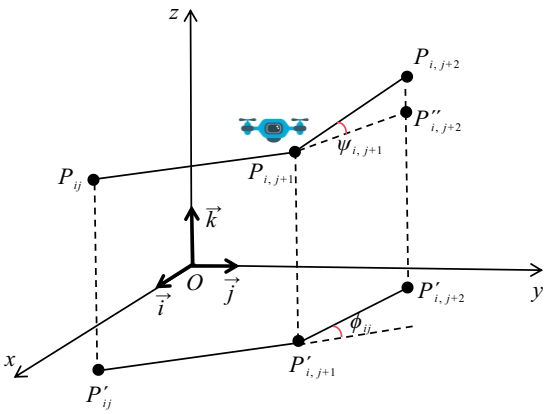


图 5 路径转角与俯仰角示意图

方位角ϕ_{ij}是投影在水平面Oxy上的两个连续路径段之间的角度, 计算公式为:

$$\phi_{ij}=\arctan\left(\frac{||\overrightarrow{P'_{ij}P'_{i,j+1}}\times\overrightarrow{P'_{i,j+1}P'_{i,j+2}}||}{\overrightarrow{P'_{ij}P'_{i,j+1}}\cdot\overrightarrow{P'_{i,j+1}P'_{i,j+2}}}\right).\tag{9}$$

极角ψ_{ij}是投影在垂直面Oxz上的两个连续路径段之间的角度, 计算公式为:

$$\psi_{ij}=\arctan\left(\frac{z_{i,j+1}-z_{ij}}{||\overrightarrow{P'_{ij}P'_{i,j+1}}||}\right).\tag{10}$$

则平滑成本计算如下:

$$F_s(P_i)=\alpha_1\sum_{j=1}^{n-2}\phi_{ij}+\alpha_2\sum_{j=1}^{n-1}|\psi_{ij}-\psi_{i,j-1}|.\tag{11}$$

其中, $\alpha_1=1$和$\alpha_2=1$分别为转弯角度和爬坡角度的惩罚系数[23].

2.3 路径规划代价模型

综合上述分析, 无人机三维路径规划问题被构建为以下双目标最小化模型:

$$\boldsymbol{J}=[min(F_1),min(F_2)]^T$$
$$s.t\begin{cases}\rho_{min}\leqslant\rho_j\leqslant\rho_{max},\ j=1,2,\ldots,n-1\\ \phi_{min}\leqslant\phi_j\leqslant\phi_{max},\ j=1,2,\ldots,n-1\\ \psi_{min}\leqslant\psi_j\leqslant\psi_{max},\ j=1,2,\ldots,n-1\\ h_{min}\leqslant z_j\leqslant h_{max},\ j=1,2,\ldots,n-1\end{cases}\tag{12}$$

该模型在满足无人机机动性能与飞行高度约束的前提下, 同时优化油耗代价与飞行风险代价, 属于典型的多目标约束优化问题.

3 MMODE_HDMS 算法

本文在 MMODE_CSCD 算法框架[21] 基础上进行核心改进. 该基础框架集成了快速非支配排序、基于聚类的特殊拥挤度距离和基于距离的精英选择机制, 以协同维持种群多样性. 针对其在三维路径规划中易陷入局部最优、收敛精度不足的问题, 本文提出 MMODE_HDMS 算法, 核心改进包括: 引入动态变异概率以平衡探索与开发; 设计混合变异策略以增强搜索能力; 采用基于 Hausdorff 距离的环境选择机制以精准维持决策空间多样性.

3.1 动态变异概率

为适应进化过程不同阶段的需求, 本文提出一种线性递减的动态变异概率策略:

$$C=max(0.05,0.3\times(1-\frac{G}{MaxIt})).\tag{13}$$

其中, C表示变异概率, G为当前迭代次数, $MaxIt$为最大迭代次数. 该策略中变异强度随进化进程平滑衰减, 相较于固定变异概率, 能够动态适应不同阶段的收敛需求. (0.3, 0.05) 的参数选取分析见 4.3 节.

3.2 混合变异策略

为综合差分变异的导向性搜索与高斯扰动的局部随机探索优势, 本文以一定的概率为每个维度独立选择变异方式.

差分变异基于多个示范个体的信息进行导向性搜索:

$$\begin{aligned}\rho_i^d&=\rho_i^c+F\cdot[(\rho_i^{ex1}-\rho_i^c)+(\rho_i^{ex2}-\rho_i^{ex3})]\\ \psi_i^d&=\psi_i^c+F\cdot[(\psi_i^{ex1}-\psi_i^c)+(\psi_i^{ex2}-\psi_i^{ex3})]\\ \phi_i^d&=\phi_i^c+F\cdot[(\phi_i^{ex1}-\phi_i^c)+(\phi_i^{ex2}-\phi_i^{ex3})].\end{aligned}\tag{14}$$

其中, $F=0.8$为缩放因子[21], $\rho_i^c,\psi_i^c,\phi_i^c$分别表示当前个体在第 i 个路径点上的球坐标分量, $\rho_i^{ex1},\psi_i^{ex1}$, ϕ_i^{ex1}是从不同非支配层中选取的示范个体对应的球坐标分量.

高斯扰动策略在当前个体附近引入随机噪声以增强局部探索:

$$\rho_i^g = \rho_i^c + N(0, \sigma_\rho^2)$$
$$\psi_i^g = \psi_i^c + N(0, \sigma_\psi^2)$$
$$\phi_i^g = \phi_i^c + N(0, \sigma_\phi^2) \tag{15}$$

其中, 高斯扰动的标准差σ_ρ、σ_ψ和σ_ϕ均为 0.1, 混合变异策略的选择机制通过以下方式实现:

$$(\rho_i, \psi_i, \phi_i) = \begin{cases} (\rho_i^d, \psi_i^d, \phi_i^d), \\ \quad if\ rand(1, nVar) < 0.5 \\ (\rho_i^g, \psi_i^g, \phi_i^g),\ 其他 \end{cases} \tag{16}$$

该策略将差分变异的导向性搜索与高斯扰动的随机探索结合, 形成“引导+扰动”的双重搜索模式, 有效平衡了探索与开发.

3.3 Hausdorff 距离环境选择机制

为维持决策空间中航迹形态的多样性, 本文引入基于双向 Hausdorff 距离的环境选择机制来度量两条路径整体几何形态的差异程度[24], 对于两条路径对应的点集P和Q, 其双向 Hausdorff 距离定义为:

$$H(P,Q) = \max\{h(P,Q), h(Q,P)\}$$
$$h(P,Q) = \max_{p\in P}\min_{q\in Q}||p,q||$$
$$h(Q,P) = \max_{q\in Q}\min_{p\in P}||q,p||. \tag{17}$$

该距离反映了形态间的最大不匹配程度. 在环境选择中, 对非支配排序后的每一层个体, 优先保留与其它个体 Hausdorff 距离较大的解来维持分布于不同模态的等效最优航迹.

MMODE_HDMS 算法流程如下: 首先对初始种群进行快速非支配排序, 获取个体的非支配等级与特殊拥挤距离. 随后采用基于距离的精英选择机制确定学习范例. 在差分进化框架下, 通过动态变异选择概率选取变异策略, 生成后代个体. 然后, 依据非支配等级与 Hausdorff 距离选择机制, 优先保留非支配等级高、形态差异大的个体, 迭代执行直至满足终止条件. 整体框架如算法 1 所示.

算法1 MMODE_HDMS

输入: 种群大小NP, 最大迭代次数$Gmax$.

输出: Pareto最优解集PS及前沿PF.

1. $G = 0$, 初始化种群P, 并评估所有个体;

2. while $G < G_{max}$

3. 对P执行快速非支配排序, 得到排序后的种群P'及各个体的非支配等级与CSCD值;

4. 基于P'使用基于距离的精英选择机制[21]为种群中每一个个体选定其学习范例;

5. 基于选定的范例, 使用公式(13)计算动态变异概率, 使用公式(16)为每个个体的各个维度独立选择差分变异(公式(14))或高斯扰动(公式(15));

6. 基于选定的范例, 采用DE/current-to-exemplar/1变异策略, 生成子代种群$offspring$;

7. 执行二项式交叉操作, 生成子代种群$offspring$;

8. 合并父代与子代种群, 构成临时种群$POP = P \cup offspring$;

9. 对POP再次执行快速非支配排序;

10. 根据非支配等级, 采用基于Hausdorff距离的选择机制(公式(17)), 优先保留决策空间中形态差异大的个体, 选出规模为NP的新一代种群P;

11. $G > G_{max}/3$, 删除适应度为Inf的无效个体, 并补充新个体;

12. $G = G + 1$;

13. end while

14. 返回第一非支配层F_1中的个体作为最终Pareto最优解集.

3.4 策略协同机制分析

MMODE_HDMS 在原算法框架中的变异操作与环境选择两个环节引入协同改进. 变异阶段融合动态变异概率与混合变异策略, 前期高变异率增强全局探索, 后期低变异率聚焦局部开发; 差分变异提供导向性收敛, 高斯扰动引入随机跳出, 二者平衡探索与开发; 环境选择阶段引入 Hausdorff 距离, 优先保留形态差异大的解, 维持决策空间多样性.

4 实验设置与结果分析

4.1 实验环境与评价指标

4.1.1 实验环境配置

为保持实验一致性与可比性, 所有算法实验均采用种群规模 100, 最大迭代次数 300, 每组实验均需独立运行 30 次以消除随机性影响. 实验环境为 Intel(R) Core(TM) i5-7300HQ CPU @ 2.50 GHz, 内存 8.00 GB 的 Windows 10 操作系统, Matlab 2016a 编程平台.

4.1.2 性能评价指标

本文采用超体积 (HV)、反世代距离 (IGD)[25] 和分布性指标 (Spread)[26] 评价算法性能, 其中 HV 越大、IGD 越小、Spread 越小分别表示综合性能越优、收敛性越好、分布越均匀. 记录各指标的均值 (Mean) 与标准差 (Std), 以综合反映算法的优化效能与鲁棒性.

针对三维航迹的形态多样性需求, 提出等效解集决策空间多样性评价体系. 首先通过目标空间相似性构建等效解组: 若两条路径各目标函数值经归一化后的相对差异均小于阈值 5%, 则视其为目标性能等价, 归为同一等效解组. 归一化公式为

$$f_{norm}^{(k)}(i) = \frac{f^{(k)}(i) - min_{j=1}^{N} f^{(k)}(j)}{max_{j=1}^{N} f^{(k)}(j) - min_{j=1}^{N} f^{(k)}(j)}. \tag{18}$$

其中, $f^{(k)}(i)$表示第 i 个解在第 k 个目标上的原始目标值, $max_{j=1}^{N} f^{(k)}(j)$和$min_{j=1}^{N} f^{(k)}(j)$分别表示所有解在第 k 个目标上的最大值和最小值, $f_{norm}^{(k)}(i)$为归一化后的目标函数值. 两解 i, j 属于同一等效解组的判定条件为

$$\forall k \in \{1,2\}, |f_{norm}^{(k)}(i) - f_{norm}^{(k)}(j)| \leqslant 0.05. \quad (19)$$

在此基础上, 从以下三个维度量化路径形态的多样性:

1. 空间分布多样性指标: 衡量航迹在立体空间中的分布范围. 对于每个等效解组M_i, 其定义如下:

$$\begin{aligned} D_x^{max}(M_i) &= \max_{p,q\in M_i, p\neq q} [max_{t=1}^{N} |x_p(t) - x_q(t)|] \\ D_y^{max}(M_i) &= \max_{p,q\in M_i, p\neq q} [max_{t=1}^{N} |y_p(t) - y_q(t)|] \\ D_z^{max}(M_i) &= \max_{p,q\in M_i, p\neq q} [max_{t=1}^{N} |z_p(t) - z_q(t)|]. \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$分别表示路径p在第t个路径点的三维坐标, N 为路径点总数. 记所有等效解组在三维坐标上的最大偏移距离最大值分别为Max_x, Max_y, Max_z. 则空间分布多样性为:

$$S_{spatial} = \frac{Max_x + Max_y + Max_z}{3}. \quad (21)$$

2. 拓扑结构多样性指标: 通过曲率复杂度、转向频率和高度变化强度三个特征量化路径在飞行策略上的差异性.

1) 曲率复杂度: 综合转向角方差和急转弯比例, 用于评价路径弯曲模式的复杂程度:

$$C_p = 10 \cdot Var(\phi_p) + \frac{N_p^{sharp}}{N_p^{total}}. \quad (22)$$

其中, $Var(\phi_p) = \{\phi_{p(1)}, \phi_{p(2)}, \ldots, \phi_{p(N-2)}\}$为路径$p$的转向角序列的方差, N_p^{total}为总转向角数量, N_p^{sharp}为大于 30°的转角数量.

2) 转向频率: 显著转向角在总转向点中的比例, 反映路径的转向活跃度:

$$F_p = \frac{N_p^{significant}}{N_p^{total}}. \quad (23)$$

其中, $N_p^{significant}$为大于 15°的转角数量.

3) 高度变化强度: 路径P中相邻路径点高度变化的平均值与总高度范围的比值, 表征垂直方向的起伏程度:

$$V_p = \frac{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1} |z_p(t+1) - z_p(t)|}{max_{n=1}^{N} z_p(t) - min_{n=1}^{N} z_p(t) + \varepsilon}. \quad (24)$$

对于每个等效解组M_i, 计算上述三个特征的平均值, 形成拓扑特征向量:

$$T_i = [\frac{1}{|M_i|}\sum_{p\epsilon M_i} C_p, \frac{1}{|M_i|}\sum_{p\epsilon M_i} F_p, \frac{1}{|M_i|}\sum_{p\epsilon M_i} V_p]. \quad (25)$$

拓扑多样性为所有等效解组间特征向量欧氏距离的平均值:

$$\begin{aligned} S_{topology} &= \frac{2}{K(K-1)}\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K} d_{ij} \\ d_{ij} &= ||T_i^{norm} - T_j^{norm}||_2. \end{aligned} \quad (26)$$

3. 地形贴合度差异谱: 基于实际高度代价函数, 以$(h_{max} - h_{min})/2$作为理想飞行高度基准z_{ideal}. 对于每条路径 p, 计算其相对于理想高度的平均偏离程度:

$$\Delta h(p) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |Z_P(n) - z_{ideal}|. \quad (27)$$

对于每个等效解组M_i, 计算其内部各路径高度偏离度的变异系数:

$$CV_i = \frac{\sqrt{\frac{1}{|M_i|-1}\sum_{p\in M_i}(\Delta h(p) - \mu_i)^2}}{\mu_i + \varepsilon}. \quad (28)$$

其中, μ_i是等效解组内所有路径高度偏移度的均值, ε为极小正数. 地形贴合度差异评价为所有等效解组变异系数的平均值:

$$S_{terrain} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} CV_i. \quad (29)$$

该评价体系用于全面反映三维航迹在决策空间的多样性特征.

4.1.3 实验场景设置

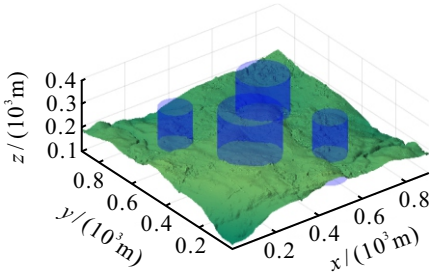
本文基于对称与非对称两类地势, 分别构建障碍密度不同的两个地形, 共得到四种三维仿真地形, 如图 6 所示. 设置对称地势和非对称地势的起点和终点分别为 (100, 100, 70)/(800, 800, 100) 与 (50, 50, 150)/(800, 800, 170); 各地势中, 在少障碍地形基础上增加障碍物密度形成多障碍地形.

4.2 目标函数权重配置验证

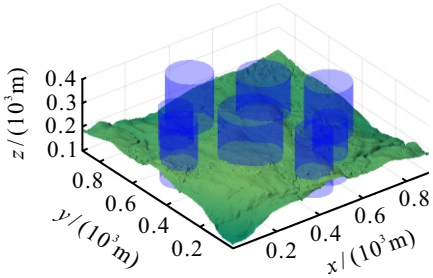
为确定公式 (4) 中$\omega_1, \omega_2, \omega_3$权重配置选值, 设计了基于 HV 和 Spread 指标的权重交叉验证实验, 采用 12 组权重组合, 分别在对称与非对称地势下进行对比分析.

4.2.1 实验设计与评估方法

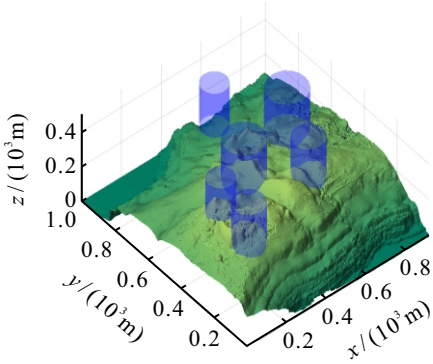
实验采用两阶段验证框架, 首先整合所有权重组合在两种地势下的解集, 构建全局参考 Pareto 前沿; 然后基于此前沿计算各权重配置的 HV 与 Spread 值:



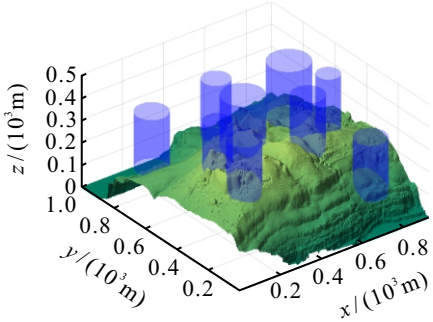
(a) 对称地形1



(b) 对称地形2



(c) 对称地形3



(d) 对称地形4

图 6　实验场景地形

$$\text{Score} = 0.7 \times \text{HV}_{\text{normalized}} + 0.3 \times \left(\frac{1}{(1+\text{Speard})}\right). \tag{30}$$

其中, $HV_{normalized}$为超体积归一化因子, 采用参考点坐标乘积进行标准化处理:

$$HV_{normalized} = \frac{HV}{ref_point(1) \times ref_point(2)}. \tag{31}$$

其中ref_point为每个目标维度最大值.

4.2.2　实验结果与分析

不同权重组合对算法性能影响显著. 综合四种地形的 HV 与 Spread 指标评分, 权重组合 (0.5, 5, 0.5) 在各场景中均取得最优或次优的综合得分, 且表现最为稳定, 因此确定为最优权重配置. 在同一地势下, 对称环境中, 多障碍地形的综合得分普遍高于少障碍地形, 说明该权重配置在威胁密集场景下具有更好的区分度; 非对称环境中, 少障碍地形的得分高于多障碍地形, 反映出障碍物密度增加对非对称复杂地形的优化性能构成更大挑战. 此外, 对称地形的整体得分优于非对称地形, 表明环境几何复杂度是影响算法收敛性与分布性的重要因素.

4.3　动态变异概率验证

4.3.1　实验设计与评估方法

为验证动态变异概率策略的有效性, 设计七组不同初始与最终变异率的参数组合. 采用 HV 与 IGD 指标进行评估, 其中 IGD 经倒数变换统一量纲后与 HV 各赋 50% 权重构建综合评分.

4.3.2　实验结果与分析

综合 HV 与 IGD 指标构建的评分结果表明, 参数组合 (0.3, 0.05) 在两种地势下综合性能最佳. 具体而言, 在对称地势下该组合较次优组合提升 24.2%, 优势显著; 在非对称地势下同样表现最优. 从指标特征来看, 该组合在保持较低 IGD 的同时具有较高的 HV, 且标准差处于中低水平, 反映出良好的运行稳定性与鲁棒性, 验证了变异概率从 0.3 线性递减至 0.05 的策略能够有效平衡算法前期探索与后期开发.

4.4　消融实验: 混合变异策略验证

4.4.1　实验设计与评估方法

为系统评估混合变异策略对算法性能的影响, 本节设计了消融实验, 对比四种变异策略配置: 纯差分变异、纯高斯扰动、固定混合策略及本文提出的自适应混合策略. 实验采用 IGD 和 HV 指标以衡量解集在目标空间的收敛性与分布性. 同时, 为综合评估决策空间的多样性保持能力, 引入等效解组数量 (Num_k)、空间分布多样性 (S_spatial)、拓扑多样性 (S_topology) 和地形贴合度差异 (S_terrain) 四个指标, 该设计旨在从目标空间性能和决策空间多样性两个维度, 全面验证不同变异策略的有效性.

4.4.2　实验结果与分析

由表 1 和表 2 可知, 自适应混合策略在对称与非对称地势下的综合得分均高于其他三种策略. 在对称地势中, 自适应混合策略得分较次优策略在地形一提升 1.3%, 在地形二提升 64.2%; 在非对称地势

中, 较次优策略在地形一提升 18.4%, 在地形二提升 23.1%. 对比不同地势, 自适应混合在非对称地势中的得分略高于对称地势, 表明该策略对复杂几何环境具有更好的适应性与鲁棒性. 纯高斯扰动策略性能最差, 纯差分变异和固定混合策略居中. 图 7 和图 8 的 Pareto 前沿分布进一步验证了自适应混合策略的解集最接近参考前沿且分布更均匀、覆盖更广. 由此可见, 自适应机制通过动态协调探索与开发是该策略在收敛性与分布性上均表现优异的根本原因.

表 1　混合变异策略在对称地势下的 IGD 与 HV 指标对比

策略编号	策略名称	对称地形1					对称地形2				
		Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	scores	Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	scores
1	纯差分变异	0.1227	0.0803	0.9236	0.0692	0.751	0.1300	0.1375	0.9455	0.0338	0.418
2	纯高斯扰动	0.3241	0.1169	0.8900	0.0754	0.230	0.4050	0.2985	0.9504	0.0976	0.146
3	固定混合	0.0760	0.0512	0.8472	0.3371	0.500	**0.1102**	**0.0565**	0.9409	0.0617	0.500
4	自适应混合	**0.0678**	0.0663	**0.9401**	**0.0298**	**0.761**	0.1157	0.0868	**0.9736**	**0.0128**	**0.821**

表 2　混合变异策略在非对称地势下的 IGD 与 HV 指标对比

策略编号	策略名称	非对称地形1					非对称地形2				
		Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	scores	Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	scores
1	纯差分变异	0.1983	0.1617	0.9594	0.1223	0.472	0.1881	0.0951	0.9164	0.1010	0.532
2	纯高斯扰动	0.5738	0.2748	0.8541	0.0624	0.439	0.5878	0.2666	0.9606	0.0793	0.422
3	固定混合	0.1943	0.1925	0.9707	0.0147	0.662	0.1320	0.0869	0.9952	0.0588	0.683
4	自适应混合	**0.0817**	**0.0298**	**1.0211**	0.0764	**0.784**	**0.0970**	**0.0352**	0.7741	**0.3497**	**0.841**

不同混合变异策略在路径形态多样性维持方面存在显著差异. 在对称地势下, 自适应混合策略在等效解组数量达 20~22 组, 空间分布广度显著优于其他对比策略, 拓扑多样性和地形贴合度也处于较优水平, 但对称地形 2 中纯高斯扰动的拓扑多样性略高, 这是由于不同指标侧重点不同, 算法需要在空间分布广度与拓扑结构之间进行权衡.

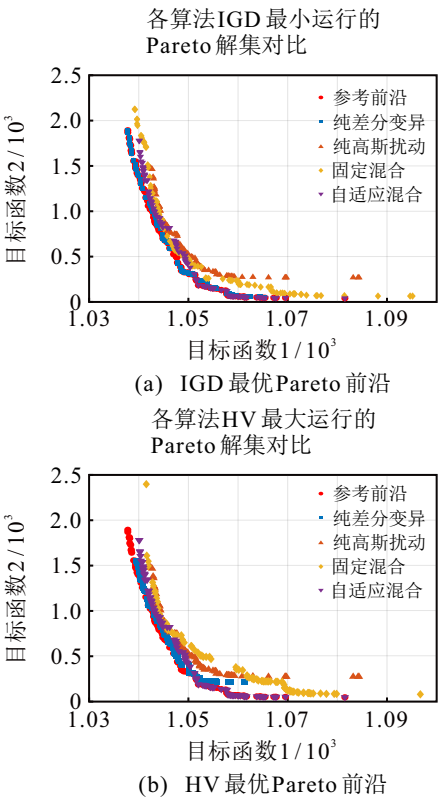


图 7　对称地形 1 中各评价指标最优的 pareto 前沿

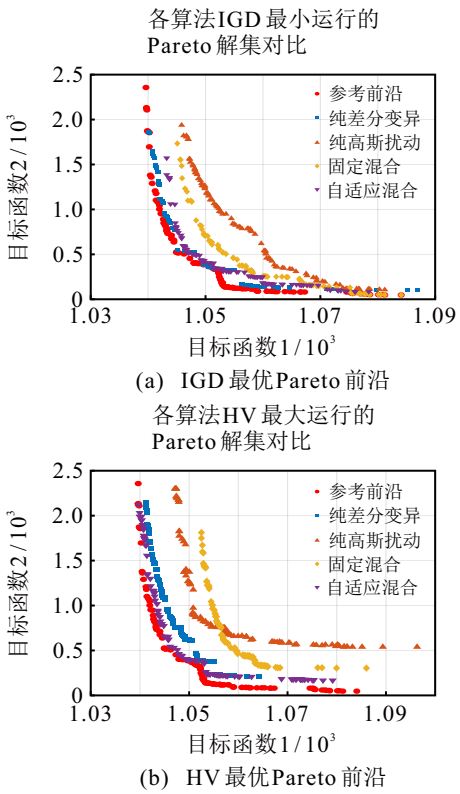


图 8　对称地形 2 中各评价指标最优的 pareto 前沿

在非对称地势下, 自适应混合在空间分布广度

和地形贴合度上表现突出, 但等效解组数量和拓扑多样性有时略低于纯差分变异或固定混合. 整体而言, 自适应混合策略的综合多样性保持能力最优, 但各策略在不同指标上各有优劣.

对比同一地势下不同密度地形, 多障碍环境的空间分布广度普遍低于少障碍环境, 但自适应混合策略在多障碍地形中仍保持最高多样性水平, 鲁棒性更强. 不同地势间, 非对称复杂地形对路径形态多样性的约束更显著, 但自适应混合仍能有效维持多模态特性. 可见, 自适应混合策略的动态调整机制是其决策空间多样性保持能力优异的关键原因. 综上, 自适应混合策略通过有效平衡机制, 在路径形态、拓扑结构及地形适应等多个维度均表现出优异的多样性保持能力, 验证了其在三维航迹规划中提供多样化可行解的有效性.

4.5　消融实验: Hausdorff 距离更新机制验证

4.5.1　实验设计与评估方法

为验证 Hausdorff 距离机制在维持解集多样性方面的作用, 本实验将其与 MMODE_CSCD 中的聚类特殊拥挤度距离 CSCD 机制进行对比, 其余设置保持一致.

4.5.2　实验结果与分析

由表 3 可知, Hausdorff 距离机制在四种地形下的目标空间性能表现存在一定差异.

表 3　不同环境选择机制在四种地形目标空间上的 IGD 与 HV 指标对比

地形名称	更新机制名称	Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV
对称地形1	CSCD距离机制	0.0978	0.0825	0.7964	0.3372	0.1303	0.0620	0.9411	0.1393
对称地形2	Hausdorff距离机制	**0.0828**	**0.0701**	**0.8081**	**0.3331**	**0.1270**	**0.0596**	**0.9710**	**0.0380**
非对称地形1	CSCD距离机制	0.2191	0.1669	0.9174	**0.1594**	0.1910	0.1459	**0.9792**	**0.0661**
非对称地形2	Hausdorff距离机制	**0.2159**	**0.1649**	**0.9237**	0.1846	**0.1495**	**0.1175**	0.9344	0.1661

在对称地势下, Hausdorff 距离机制的 Mean_IGD 和 Mean_HV 均优于 CSCD 机制. 在少障碍地形一中, Hausdorff 机制的 Mean_IGD 较 CSCD 降低 15.3%, Mean_HV 提升 1.5%; 在多障碍地形二中, Mean_IGD 降低 2.5%, Mean_HV 提升 3.2%. 对比不同密度地形, 少障碍地形中收敛性提升更为显著, 而多障碍地形中综合覆盖能力提升更为突出, 表明 Hausdorff 机制对不同威胁密度环境均具有良好的适应性. 此外, Hausdorff 机制在地形二中的 HV 标准差远小于 CSCD, 稳定性更好.

在非对称地势下, Hausdorff 机制的 Mean_IGD 和 Mean_HV 表现存在差异. 在少障碍地形一中, Hausdorff 机制的 Mean_IGD 较 CSCD 降低 1.5%, Mean_HV 提升 0.7%, 提升幅度较小; 在多障碍地形二中, Mean_IGD 较 CSCD 降低 21.7%, 但 Mean_HV 下降 4.6%. 对比不同密度地形, 多障碍地形中收敛性提升显著, IGD 降幅远大于少障碍地形, 但综合覆盖能力略有牺牲; 少障碍地形中两者变化均较小. 这表明 Hausdorff 机制在非对称复杂地形中对收敛精度的改善更为突出, 尤其在威胁密集场景下优势明显但对 HV 指标的维持能力受地形复杂度影响较大.

在决策空间多样性方面, Hausdorff 机制的等效解组数量、空间分布广度和拓扑多样性均优于 CSCD 机制. 在对称地势下, 少障碍地形中空间分布广度提升约 12.7%, 多障碍地形中提升约 30.0%, 表明多障碍环境下 Hausdorff 机制的空间多样性优势更为突出. 在非对称地势下, 少障碍地形的空间分布广度提升 1.6 倍, 多障碍地形提升 79.4%; 等效解组数量亦多于 CSCD. 拓扑多样性方面, Hausdorff 机制在对称地势下优于 CSCD, 在非对称少障碍地形中提升 39.5%, 多障碍地形中略低约 10.5%, 但整体仍处于较优水平. 图 9 至图 12 的可视化结果进一步验证 Hausdorff 机制能够生成绕行、穿行等多种几何形态的等效航迹, 而 CSCD 机制所得路径较为单一. 综上, Hausdorff 距离机制通过直接度量路径整体几何差异, 在维持决策空间多样性方面具有显著优势.

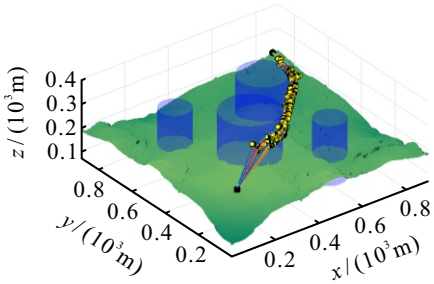
4.6　综合对比实验

4.6.1　实验设计与评估方法

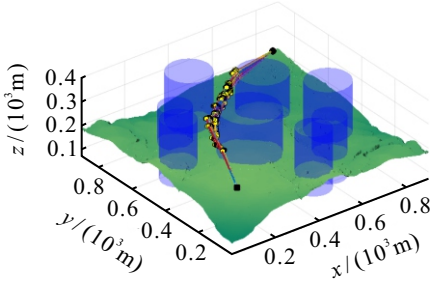
本实验将所提算法与六种代表性算法进行对比: 基础算法 MMODE_CSCD[21]、传统多目标算法 Decision_niched_NSGAII[15]、多目标差分进化算法 MOEA_2DE[14]、多模态多目标算法 MO_Ring_PSO_SCD[27]、高维多模态多目标差分进化算法 HDMMODE[28] 以及基于谱聚类的多模态多目标浣熊优化算法 SSMMCOASC[29]. 所有算法参数均按原文献设置, 独立运行 30 次. 通过 IGD、HV 指标评估目标空间性能, 并结合决策空间多样性评价, 分析各算法维持多模态解的能力.

4.6.2　实验结果与分析

在目标空间性能方面, MMODE_HDMS 算法展现出优异的收敛性与前沿覆盖能力. 由表 4 与表 5 可知, 在四种地形中, MMODE_HDMS 的 Mean_

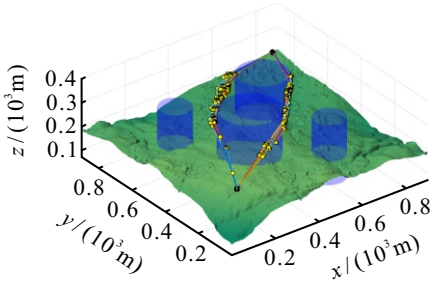


(a) 对称地形1

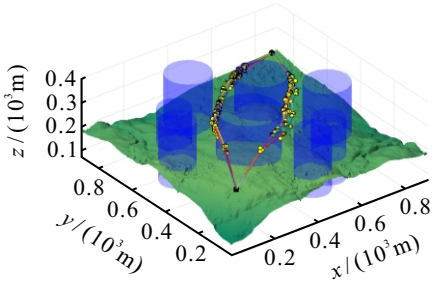


(b) 对称地形2

图 9 使用 CSCD 距离机制在对称地势所得路径



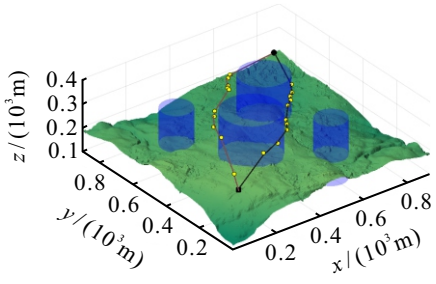
(a) 对称地形1



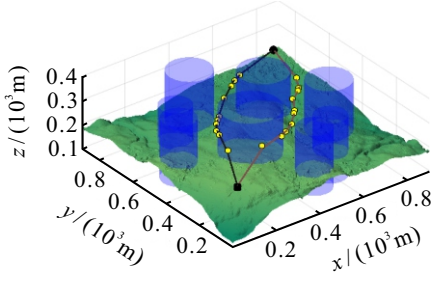
(b) 对称地形2

图 10 使用 Hausdorff 距离机制在对称地势所得航迹

IGD 和 Mean_HV 均优于基础算法 MMODE_CSCD. 在对称地势下, MMODE_HDMS 较 MMODE_CSCD 的 Mean_IGD 在少障碍地形一降低 20%, 在多障碍地形二降低 39.4%, 表明障碍密度增加时改进算法的收敛优势更突出; 在非对称地势下, 较原算法分别降低 5.9% 和 10.7%. 整体而言, MMODE_HDMS 在多障碍和非对称地势中的性能下降幅度均小于 MMODE_CSCD, 鲁棒性更强. 与 MO_Ring_PSO_SCD 和 MOEA_2DE 等对比算法相比, MMODE_HDMS 在多数地形中 IGD 最小、HV 最大.

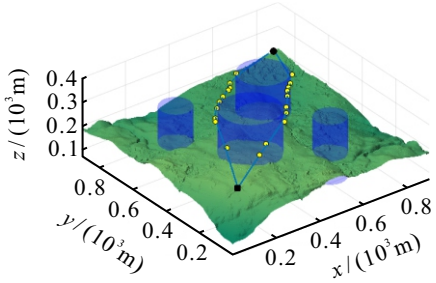


(a) 对称地形1

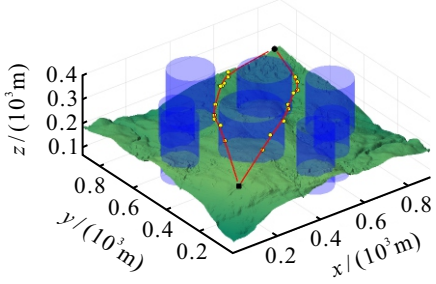


(b) 对称地形2

图 11 两目标值在对称地势分别最小的航迹



(a) 对称地形1



(b) 对称地形2

图 12 等效解组内不同形态路径对比

在决策空间多样性性能方面, MMODE_HDMS 的等效解组数量和空间分布多样性均显著优于 MMODE_CSCD, 其中空间分布多样性提升幅度最高约 1.6 倍. 拓扑多样性方面, MMODE_HDMS 在多数地形中较 MMODE_CSCD 提升约 15%～30%, 表明其生成的等效路径在飞行策略上更加丰富. 在地形贴合度差异方面, MMODE_HDMS 在非对称少障碍地形中优势突出.

不同地势间, 非对称地势下的多样性提升幅度更为明显, 验证了 MMODE_HDMS 在复杂场景中维持多模态解集的有效性. MO_Ring_PSO_SCD 虽个

表 4　各对比算法在对称地势下的 IGD 与 HV 指标对比

算法编号	算法名称	对称地形1				对称地形2			
		Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV
1	MMODE_HDMS	**0.0835**	**0.0481**	**0.9651**	0.2695	**0.2019**	0.1249	**0.9345**	**0.1922**
2	MMODE_CSCD	0.1043	0.0889	0.8763	0.1084	0.3333	**0.0891**	0.8427	0.1080
3	MO_Ring_PSO_SCD	0.4666	0.0896	0.8771	0.0871	0.4506	**0.0631**	0.9000	0.1585
4	MOEA_2DE	0.0894	**0.0302**	0.9754	0.0438	0.2418	0.1363	**0.9777**	0.1230
5	Decision_niched_NSGAII	0.9404	0.0994	3.2358	6.5242	0.8858	0.1809	2.1185	**1.5144**
6	HDMMODE	0.1185	0.0535	0.8417	0.0852	0.3004	0.1746	0.9183	0.1745
7	SSMMCOASC	0.4703	0.1588	0.8940	0.1777	0.5550	0.1198	0.7811	0.1737

表 5　各对比算法在非对称地势下的 IGD 与 HV 指标对比

算法编号	算法名称	非对称地形1				非对称地形2			
		Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV	Mean_IGD	Std_IGD	Mean_HV	Std_HV
1	MMODE_HDMS	**0.1344**	**0.0846**	**0.9330**	0.0557	**0.2060**	**0.1740**	**0.9370**	0.0906
2	MMODE_CSCD	0.1428	0.1009	0.8300	**0.0994**	0.2306	0.1750	0.8305	**0.1433**
3	MO_Ring_PSO_SCD	0.5133	0.0892	0.8105	0.1142	0.5760	**0.1142**	0.9313	0.1719
4	MOEA_2DE	0.1049	**0.0421**	0.9837	0.0390	0.3114	0.2981	0.9608	0.0568
5	Decision_niched_NSGAII	0.9508	0.0766	**1.8512**	0.8100	1.0413	0.1367	**1.9622**	**0.6632**
6	HDMMODE	0.3191	0.2837	0.7915	**0.2577**	0.5949	0.2344	0.8053	0.1194
7	SSMMCOASC	0.5955	0.1628	0.9254	0.1651	0.6795	0.1805	0.8007	0.1706

别指标数值偏高, 但等效解组数量极少且拓扑多样性为零, 无法提供真正的多模态选择. 综上所述, MMODE_HDMS 在决策空间多样性上优于对比算法.

5　结　论

本文在 MMODE_CSCD 框架基础上提出 MMODE_HDMS 算法, 融合动态变异概率、混合变异策略与 Hausdorff 距离环境选择机制, 并构建油耗-综合飞行代价双目标模型及球形矢量编码方法. 在对称与非对称两类地势下分别设置少障碍与多障碍共四种三维仿真地形中进行实验, 结果表明该算法在 IGD 与 HV 指标上表现良好, 能够稳定逼近真实 Pareto 前沿; 同时, 基于 Hausdorff 距离的选择机制有效维持了路径形态的多样性, 能够生成一系列目标性能相近而几何结构迥异的等效航迹. 消融实验进一步验证了各改进机制对提升算法搜索性能与鲁棒性的协同作用.

然而, Hausdorff 距离的精确计算在高维决策空间中可能带来一定的计算开销, 在实时性要求较高的场景中应用受限. 后续将重点研究 Hausdorff 距离的快速近似计算方法以提升算法实时性, 并完善多模态航迹多样性量化标准, 推动三维多模态多目标航迹规划方法在实际任务中的深入应用.

参考文献 (References)

[1] Zhao Y J, Zheng Z, Liu Y. Survey on computational-intelligence-based UAV path planning[J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 158: 54-64.

[2] Yang L, Qi J T, Xiao J Z, et al. A literature review of UAV 3D path planning[C]. Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang, 2014: 2376-2381.

[3] Wang X D, Liu Z Y, Li X P. Optimal delivery route planning for a fleet of heterogeneous drones: A rescheduling-based genetic algorithm approach[J]. Computers & Industrial Engineering, 2023, 179: 109179.

[4] 肖鹏, 田润澜, 李赫, 等. 基于改进蚁群算法的无人机通信侦察航迹规划[J]. 控制与决策, 2025, 40(11): 3239-3252.
(Xiao P, Tian R L, Li H, et al. UAV communication reconnaissance path planning based on improved ant colony algorithm[J]. Control and Decision, 2025, 40(11): 3239-3252.)

[5] Deng L X, Chen H Y, Zhang X, et al. Three-dimensional path planning of UAV based on improved particle swarm optimization[J]. Mathematics, 2023, 11(9): 1987.

[6] Storn R, Price K. Differential evolution–a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. Journal of Global Optimization, 1997, 11(4): 341-359.

[7] Zhang X Y, Duan H B, Yu Y X. Receding horizon control for multi-UAVs close formation control based on differential evolution[J]. Science China Information Sciences, 2010, 53(2): 223-235.

[8] Wang X, Feng Y, Tang J, et al. A UAV path planning method based on the framework of multi-objective jellyfish search algorithm[J]. Scientific Reports, 2024, 14(1): 28058.

[9] Li K W, Wang R, Zhang T, et al. Evolutionary many-objective optimization: A comparative study of the state-of-the-art[J]. IEEE Access, 2018, 6: 26194-26214.

[10] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist

multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.

[11] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search[C]. Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII. Heidelberg, 2004: 832-842.

[12] Wang R, Zhou Z B, Ishibuchi H, et al. Localized weighted sum method for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(1): 3-18.

[13] Ishibuchi H, Imada R, Setoguchi Y, et al. Reference point specification in inverted generational distance for triangular linear Pareto front[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(6): 961-975.

[14] Xu X J, Xie C Y, Luo Z F, et al. A multi-objective evolutionary algorithm based on dimension exploration and discrepancy evolution for UAV path planning problem[J]. Information Sciences, 2024, 657: 119977.

[15] Liang J J, Yue C T, Qu B Y. Multimodal multi-objective optimization: A preliminary study[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Vancouver, 2016: 2454-2461.

[16] 慈雨, 荣淼, 彭晨. 基于双重距离的多目标粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 1801-1809.
(Ci Y, Rong M, Peng C. Multi-objective particle swarm optimization algorithm based on dual distances[J]. Control and Decision, 2024, 39(6): 1801-1809.)

[17] 段鑫绘, 江巧永, 林艳艳, 等. 排斥机制驱动的不平衡多模态多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2026, 41(8): 2215-2228.
(Duan X H, Jiang Q Y, Lin Y Y, et al. Imbalanced multi-modal multi-objective evolutionary algorithm driven by exclusion mechanism[J]. Control and Decision, 2026, 41(8): 2215-2228.)

[18] 曾骏驰, 张欣, 钱鹏江, 等. 基于灰色关联与自适应参考向量的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 153-164.
(Zeng J C, Zhang X, Qian P J, et al. Grey relation-based evolutionary algorithm with self-adaptive reference vectors for many-objective optimization[J]. Control and Decision, 2026, 41(1): 153-164.)

[19] Li W H, Zhang T, Wang R, et al. Multimodal multi-objective optimization: Comparative study of the state-of-the-art[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2023, 77: 101253.

[20] Liang J, Yue C, Li G, et al. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2021 on multimodal multiobjective path planning optimization[R]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2020.

[21] Liang J, Qiao K J, Yue C T, et al. A clustering-based differential evolution algorithm for solving multimodal multi-objective optimization problems[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2021, 60: 100788.

[22] Wu T X, Ji J Z, Yang C C. Research progress and challenges of multimodal multiobjective evolutionary algorithms for global and local optimal solutions[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2025, 51(7): 867-882.

[23] Phung M D, Ha Q P. Safety-enhanced UAV path planning with spherical vector-based particle swarm optimization[J]. Applied Soft Computing, 2021, 107: 107376.

[24] Taha A A, Hanbury A. An efficient algorithm for calculating the exact Hausdorff distance[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2015, 37(11): 2153-2163.

[25] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.

[26] Okabe T, Jin Y, Sendhoff B. A critical survey of performance indices for multi-objective optimisation[C]. The Congress on Evolutionary Computation. Canberra, 2003: 878-885.

[27] Yue C T, Qu B Y, Liang J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(5): 805-817.

[28] Liang J, Lin H Y, Yue C T, et al. Multiobjective differential evolution for higher-dimensional multimodal multiobjective optimization[J]. CAA Journal of Automatica Sinica, 2024, 11(6): 1458-1475.

[29] Deng W X, Mo Y B, Deng L. A multimodal multi-objective coati optimization algorithm based on spectral clustering[J]. Symmetry, 2024, 16(11): 1474.

作者简介

王雪 (1997−), 女, 硕士, 主要研究方向为群智能优化算法及应用, E-mail: wangxuezstu@163.com;

金友振 (1985−), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为智能计算、机器学习与深度学习, E-mail: jinyouzhen@zjxu.edu.cn;

廖伟志 (1974−), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为智能计算、机器学习, E-mail: liaowz@zjxu.edu.cn;

陈泽丰 (1990−), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为智能优化、高效机器学习与人工智能在物联网、工业、医疗等领域的应用, E-mail: chenzef5@mail.sysu.edu.cn;

向毅 (1986−), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为智能化软件工程、演化计算、无人机仿真测试, E-mail: xiangyi@scut.edu.cn;

夏小云 (1982−), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为群体智能、智能优化与学习, E-mail: xiaxiaoyun@live.cn.