具有时变输出约束的非线性系统预设时间无超调控制

毛鉴墁，蒋 沅†

(南昌航空大学 信息工程学院，南昌 330063)

摘 要: 针对一类具有非对称时变输出约束的严格反馈非线性系统, 研究其预设时间无超调跟踪控制问题. 与现有处理常数或对称约束的技术不同, 本文引入分段映射变量并构造时变障碍 Lyapunov 函数, 在确保系统输出严格满足时变边界的同时, 实现跟踪误差的预设时间收敛. 同时, 与依赖严苛非负初始条件的传统低阶无超调控制不同, 本文提出了一种高阶系统误差解析与降维解构法则. 基于反步法设计控制器, 将高阶多重积分响应解构为低阶局部组份的叠加, 推导出松弛的常数反馈增益配置准则, 允许虚拟误差存在负向初值, 降低了高阶系统无超调设计的保守性. 进一步, 针对不同阶数系统分别建立无超调判据, 并结合稳定性所需的增益下界, 提出兼顾系统稳定性与无超调性能的反馈增益递推选取方法.最后, 通过两个例子验证了本文算法的有效性.

关键词: 非线性系统；严格反馈系统；李雅普诺夫函数；时变输出约束；预设时间；无超调控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2026.0343

引用格式: 毛鉴墁, 蒋沅. 具有时变输出约束的非线性系统预设时间无超调控制 [J]. 控制与决策.

Prescribed-time overshoot-free control for nonlinear systems with time-varying output constraints

MAO Jian-man，*JIANG Yuan*†

(College of Information Engineering，Nanchang Hangkong University，Nanchang 330063，China)

Abstract: This paper investigates prescribed-time overshoot-free tracking control for a class of strict-feedback nonlinear systems subject to asymmetric time-varying output constraints. Unlike existing techniques for constant or symmetric constraints, the proposed approach introduces a piecewise mapping variable and constructs a time-varying barrier Lyapunov function to achieve prescribed-time convergence of the tracking error while ensuring strict satisfaction of the time-varying output bounds. Furthermore, unlike conventional overshoot-free control methods for low-order systems that rely on stringent nonnegativity requirements on initial conditions, this paper proposes an analytical error decomposition and order-reduction framework for high-order systems. A controller is designed using backstepping, and the high-order multiple-integral response is decomposed into a superposition of low-order local components. Relaxed criteria for selecting constant feedback gains are derived, allowing negative initial values of the virtual errors and reducing the conservatism of overshoot-free control design for high-order systems. Overshoot-free criteria are then established for systems of different orders. By incorporating the lower bounds on the gains required for stability, a recursive feedback gain selection method is developed to ensure both system stability and overshoot-free performance. Finally, two examples demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: nonlinear systems； strict-feedback systems； Lyapunov function； time-varying output constraints； prescribed-time；overshoot-free control

0 引 言

随着复杂工业系统对安全边界、动态品质和时间性能要求的不断提高, 严格反馈非线性系统的约束跟踪控制问题持续受到关注. 由于该类系统具有较好的递阶结构, 反步法及其相关扩展方法为控制器设计提供了系统化工具[1-2]. 然而在实际运行中, 系统输出往往受到物理极限、安全规范和任务窗口等多方面限制. 若控制设计未显式考虑此类约束, 闭环

收稿日期: 2026-04-20；**录用日期:** 2026-09-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61663030)；江西省基础研究“2030 启航计划项目”(20262BAC290002)；江西省自然科学基金重点项目 (20252BAC250021)；江西省自然科学基金项目 (20224BAB202028).

责任编委: 关新平.

†通信作者. E-mail: jiangyuan@nchu.edu.cn.

系统容易出现性能退化, 严重时甚至会触碰安全边界. 围绕这一问题, 障碍 Lyapunov 函数和预设性能控制已成为目前处理受约束非线性系统的两类常用工具[3-8].

针对受约束非线性系统的性能控制已取得一系列进展. 文献 [3] 提出预设性能控制框架, 将跟踪误差限制在预先给定的收敛边界内; 文献 [4] 首次将障碍 Lyapunov 函数引入严格反馈输出受限系统, 通过构造在边界处趋于无穷的 Lyapunov 函数避免输出越界; 文献 [5] 进一步研究了时变输出约束情形, 用时变 BLF 处理约束边界随时间变化的问题. 在此基础上, 文献 [6] 将预设性能拓展到切换非线性系统; 文献 [7] 针对欧拉-拉格朗日系统研究了全状态约束下的预设性能控制; 文献 [8] 利用通用障碍函数处理了 MIMO 非线性系统的非对称输出约束; 随后, 文献 [9] 在含死区输入的全状态受限系统中实现有限时间跟踪; 文献 [10] 将指令滤波与 BLF 结合以处理全状态约束问题; 文献 [11] 给出了高阶非线性系统在非对称输出约束下的自适应跟踪方案; 文献 [12-17] 又分别从随机系统、时变积分障碍函数、观测器、扰动观测器和模糊逼近等角度改进了约束控制的暂态性能. 近年来, 文献 [18] 研究了输出受限不确定非线性系统的自适应固定时间控制; 文献 [19] 提出了时变输出约束下的自适应快速非奇异终端滑模控制; 文献 [20] 则进一步针对先验未知参考信号研究了 MIMO 系统的输出约束预设性能控制. 此外, 考虑到实际系统中输出约束常与输入约束、执行器饱和等问题耦合出现, 文献 [21] 针对高阶 MIMO 不确定非线性系统研究了输入受限预设性能控制问题, 通过参考修正机制改善了约束条件下的跟踪可行性; 文献 [22] 中针对存在输入饱和和执行器故障的机器人系统, 提出了固定时间预设性能容错控制方法, 在考虑执行器非理想特性的同时兼顾跟踪误差的瞬态性能与稳态精度. 这些成果表明, 受约束非线性系统控制研究已从单一输出边界约束逐步发展到兼顾输入约束、未知参考、瞬态性能和工程可实现性的综合控制框架.

除约束满足外, 误差收敛时间也是评价闭环性能的重要指标. 有限时间控制能够提高系统响应速度, 但其收敛时间通常依赖于初始条件. Polyakov 在文献 [23] 中提出固定时间稳定性设计, 使收敛时间上界与初始条件解耦; 文献 [24] 进一步从预设时间角度进行新的稳定性研究. 此后, 预设时间控制逐渐成为热点. 文献 [25] 研究了含失配不确定性与非消失扰动的实用预设时间跟踪问题; 文献 [26] 则在严格反馈非线性系统中同时考虑了预设时间跟踪、时变输出约束和性能保证; 文献 [27] 将预设时间与预设性能结合到随机输入时滞系统; 文献 [28] 给出了具有非对称输出约束的高阶非线性系统预设时间镇定方法; 文献 [29] 讨论了间歇通信条件下的非对称预设性能控制; 文献 [30] 和文献 [31] 又分别在全局预设性能和航空航天轨迹跟踪中发展了预设时间控制设计. 近期, 文献 [32] 梳理了预设时间控制的最新发展, 从鲁棒预设时间、自适应预设时间、SISO/MIMO 系统以及多智能体系统等角度总结了该方向的关键问题; 文献 [33] 进一步提出了实用预定义时间稳定性准则, 为不确定非线性系统的预定义时间控制分析提供新的判据; 文献 [34] 从全误差约束角度研究了严格反馈非线性系统的自适应预设时间跟踪控制; 文献 [35] 针对未知符号切换虚拟控制系数情形研究了非线性系统预设性能控制问题. 现有关于收敛时间的研究已从单纯的镇定逐步发展到兼顾性能边界、扰动补偿、输入约束和工程约束.

对于高精度跟踪任务, 仅保证约束不违背和在给定时间内收敛通常仍然不够. 若系统在暂态阶段出现超调, 即使最终能够收敛, 也可能导致输出触碰边界或引起性能恶化. 因此, 无超调控制逐渐成为非线性系统高性能控制中的一个重要研究方向. Krstic 和 Bement 在文献 [36] 较早研究了严格反馈非线性系统的无超调控制问题, 给出了基于反步设计的符号保持思路; 文献 [37] 针对严格反馈非线性系统给出了保证无超调的充要条件; 文献 [38] 推广到随机非线性系统, 讨论均值意义下的无超调响应; 文献 [39] 则从齐次反馈角度研究了有限时间和固定时间无超调稳定. 近几年, 文献 [40] 面向严格反馈系统研究了预设有限时间无超调跟踪问题, 文献 [41] 进一步讨论了纯反馈非线性系统的无超调控制, 文献 [42] 给出了输出反馈场景下的无超调跟踪设计, 文献 [43] 分析了全状态约束条件下保证无超调的判据, 文献 [44] 又把均值无超调思想推广到随机非线性多智能体系统. 进一步地, 文献 [45] 针对纯反馈非线性系统研究了无超调预设有限时间跟踪控制问题, 说明无超调控制正由严格反馈系统逐步向更一般的纯反馈结构、有限时间性能和工程对象拓展. 但从整体上看, 已有成果大多针对无约束系统, 对于具有非对称时变输出约束的严格反馈非线性系统, 如何在统一框架下同时实现输出严格满足约束、误差预设时间收敛以及全过程无超调跟踪, 相关结果仍较少. 特别是对于高阶系统, 现有无超调条件往往依赖较强的初值符号限制, 使得控制器设计和参数配置偏

于保守.

基于上述背景, 本文针对具有非对称时变输出约束的严格反馈非线性系统, 提出了一种新的预设时间无超调控制方法. 本文的主要创新点如下: 1) 构建了结合分段映射变量的时变非对称 BLF, 配合时变衰减系数, 实现了约束处理与预设时间镇定的有机统一; 2) 提出了一种新颖的高阶系统无超调解析判定架构, 通过时域解析解分析误差组份的链式叠加效应; 3) 利用分解引理, 将高阶多重积分难题重组解构为多个低阶局部组份的约束关系, 结合输出约束与预设时间控制要求, 推导出无超调控制松弛交集条件及增益配置准则. 由此推导出的松弛交集条件与增益配置准则, 允许虚拟误差存在负向初始偏置, 降低了高阶非线性系统实现无超调控制的理论保守性.

1　问题描述与预备知识

1.1　问题描述

针对一类具有严格反馈结构的非线性系统, 考虑如下严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1},\ i = 1,2,\ldots,n-1,\\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u,\\ y = x_1,\end{cases} \tag{1}$$

其中, $\bar{x}_i = [x_1,\ldots,x_i]^T \in R^i$是系统状态, u是系统控制输入, y为系统输出. 函数$f_i(\cdot)$与$g_i(\cdot)$均为已知且光滑的非线性函数.

系统输出要求始终满足如下时变非对称约束:

$$\underline{k}_{c1}(t) < y(t) < \bar{k}_{c1}(t),\ \forall t \geqslant 0. \tag{2}$$

系统跟踪期望轨迹$y_d(t)$, 定义跟踪误差$e(t) = y(t) - y_d(t)$. 将式 (2) 转化为关于跟踪误差的时变约束:

$$-k_{a1}(t) < e(t) < k_{b1}(t),\ \forall t \geqslant 0, \tag{3}$$

其中 $k_{a1}(t) = y_d(t) - \underline{k}_{c1}(t) > 0$, $k_{b1}(t) = \bar{k}_{c1}(t) - y_d(t) > 0$. 引入分段映射变量$\xi$将非对称约束对称化:

$$\xi = q\frac{z_1}{k_{b1}(t)} + (1-q)\frac{z_1}{k_{a1}(t)}, \tag{4}$$

其中, 当$z_1 \geqslant 0$时, $q = 1$; 当$z_1 < 0$时, $q = 0$. 此时原约束 (3) 严格等价于$|\xi| < 1$.

控制目标: 设计控制器u, 使得闭环系统满足以下性质:

1) 跟踪误差$e(t)$在预设时间内收敛到原点, 并且系统输出始终满足时变约束 (2);

2) 闭环系统所有信号保持有界;

3) 跟踪误差$e(t)$实现无超调, 即若初始配置满足 $z_1(0) \geqslant 0$, 则在预设时间 $t \in [0, t_f)$内恒有 $e(t) \geqslant 0$.

1.2　相关假设和引理

为了解决系统 (1) 的控制问题, 引入以下假设和引理.

假设 1　在所考虑的系统工作域内, 控制增益函数$g_i(\bar{x}_i)$已知且严格为正, 存在已知正常数$\underline{g}_i$和$\bar{g}_i$, 使得$0 < \underline{g}_i \leqslant g_i(\bar{x}_i) \leqslant \bar{g}_i$.

假设 2　期望轨迹$y_d(t)$、下约束$\underline{k}_{c1}(t)$和上约束$\bar{k}_{c1}(t)$具有反步递推所需阶次的连续有界导数; 存在常数$\underline{k}_a > 0$和$\underline{k}_b > 0$, 使得$k_{a1}(t) \geqslant \underline{k}_a$和$k_{b1}(t) \geqslant \underline{k}_b$.

引理 1[5]　令$\mathcal{Z} := \{\xi \in R : |\xi| < 1\} \subset R$和$\mathcal{N} := R^l \times \mathcal{Z} \subset R^{l+1}$均为开集, 考虑系统

$$\dot{\eta} = h(t,\eta), \tag{5}$$

其中$\eta := [\omega, z_1]^T \in \mathcal{N}$, 且$h : R_+ \times \mathcal{N} \to R^{l+1}$关于$t$分段连续, 关于$z$局部利普希茨, 且在$R_+ \times \mathcal{N}$上关于$t$是一致的. 假设存在连续可微的正定函数 $U : R^l \to R_+$和$V_1 : \mathcal{Z} \to R_+$使得

$$\begin{aligned}&z_1 \to -k_{a_1},\ z_1 \to k_{b_1},\ V_1(z_1) \to \infty,\\ &\gamma_1(\|\omega\|) \leqslant U(\omega) \leqslant \gamma_2(\|\omega\|),\end{aligned} \tag{6}$$

其中γ_1, γ_2为k_∞类函数. 令$V(\eta) := V_1(z_1) + U(\omega)$, 且$z_1(0) \in \mathcal{Z}$. 若不等式

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta}h \leqslant 0 \tag{7}$$

成立, 则$z_1(t) \in \mathcal{Z}$, $\forall t \in [0,\infty)$.

引理 2[5]　当$|\xi| < 1$和任意$p \in \mathbb{Z}_+$时, 恒有$\ln\dfrac{1}{1-\xi^{2p}} \leqslant \dfrac{\xi^{2p}}{1-\xi^{2p}}$成立.

引理 3　对于一阶的常微分方程$\dot{x}(t) = -A(t)x(t) + \Delta(t)$, 若对于所有$t \geqslant 0$, 存在连续函数$A(t) > 0$以及非负驱动项$\Delta(t) \geqslant 0$, 那么当初始条件$x(0) \geqslant 0$时, 方程的解$x(t) \geqslant 0$恒成立.

证明　利用积分因子可得

$$x(t) = x(0)e^{-\int_0^t A(\tau)\mathrm{d}\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau}\Delta(s)\mathrm{d}s, \tag{8}$$

由于$e^{(\cdot)} > 0$, 且已知驱动项$\Delta(s) \geqslant 0$, 因此, 当且仅当初始条件$x(0) \geqslant 0$时, 上述解析解等号右侧的两项均非负, 从而保证了对任意$t \geqslant 0$均有$x(t) \geqslant 0$恒成立. 证毕. □

引理 4[37]　对于任意自然数$n \geqslant 4$, 总可以分解成n_1个 2 和n_2个 3 之和, 即$n = 2n_1 + 3n_2$, 其中$n_1 \geqslant 0$和$n_2 \geqslant 0$为整数.

引理 5　设$R_i : [0, t_f] \to (0, +\infty), i = 1,2,\ldots,n-1$, 为连续可积函数, 且

$$L_i = \int_0^{t_f} R_i(s)\mathrm{d}s < \infty. \tag{9}$$

定义$W_1(t)=1$, $W_2(t)=\int_0^t R_1(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1$, 以及对于$j\geqslant 3$,

$$W_j(t) = \int_0^t R_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1} R_2(\tau_2)\ldots\times \int_0^{\tau_{j-2}} R_{j-1}(\tau_{j-1})\,\mathrm{d}\tau_{j-1}\ldots\mathrm{d}\tau_1, \tag{10}$$

则对任意$j=2,\ldots,n$, $W_j(t)$在$[0,t_f)$上连续、非负且严格单调递增, 并存在有限上确界

$$\sup_{0\leqslant t<t_f} W_j(t) = \lim_{t\to t_f} W_j(t) < \infty.$$

证明 由$R_i(t)>0$且在$[0,t_f]$上连续可知, $W_j(t)$在$[0,t_f)$上连续且非负. 对于$j=2$, 有$\dot{W}_2(t)=R_1(t)>0$. 对于$j\geqslant 3$, 由变上限积分求导法则可得

$$\dot{W}_j(t) = R_1(t)\int_0^t R_2(\tau_2)\ldots\times \int_0^{\tau_{j-2}} R_{j-1}(\tau_{j-1})\,\mathrm{d}\tau_{j-1}\ldots\mathrm{d}\tau_2 > 0.$$

因此, $W_j(t)$在$[0,t_f)$上严格单调递增.

另一方面, 式 (10) 的有序积分区域包含于矩形区域$[0,t_f]^{j-1}$. 由于被积函数非负, 对任意$t\in[0,t_f)$, 有

$$0 \leqslant W_j(t) \leqslant \prod_{i=1}^{j-1}\int_0^{t_f} R_i(s)\mathrm{d}s = \prod_{i=1}^{j-1} L_i < \infty.$$

故$W_j(t)$在$[0,t_f)$上单调且有界. 根据单调有界函数极限存在定理, 可得

$$\sup_{0\leqslant t<t_f} W_j(t) = \lim_{t\to t_f^-} W_j(t) \leqslant \prod_{i=1}^{j-1} L_i < \infty.$$

证毕. □

2 控制器设计与稳定性分析

2.1 控制器设计

本节给出预设时间反步控制器的详细设计步骤, 并证明闭环系统的有界性和约束满足性.

step 1: 定义误差变量为

$$z_1(t) = x_1 - y_d(t). \tag{11}$$

对z_1求导, 并引入虚拟控制器α_1, 定义$z_2=x_2-\alpha_1$, 则

$$\dot{z}_1 = f_1 + g_1(z_2+\alpha_1) - \dot{y}_d. \tag{12}$$

选择非对称时变障碍 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{q(z_1)}{2p}\ln\frac{k_{b1}^{2p}(t)}{k_{b1}^{2p}(t)-z_1^{2p}} + \frac{1-q(z_1)}{2p}\ln\frac{k_{a1}^{2p}(t)}{k_{a1}^{2p}(t)-z_1^{2p}}, \tag{13}$$

其中$p\in\mathbb{Z}_+$. 由式 (4) 可将式 (13) 重写为

$$V_1 = \frac{1}{2p}\ln\frac{1}{1-\xi^{2p}},\ p\in\mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

当$|\xi|<1$时, V_1为正定且连续可微函数.

由于时变边界$k_{a1}(t)$与$k_{b1}(t)$的存在, 对V_1沿时间t求全导数, 根据链式法则$\dot{V}_1=\dfrac{\partial V_1}{\partial z_1}\dot{z}_1+\dfrac{\partial V_1}{\partial t}$, 分别求导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial z_1} &= \Big(\frac{q}{k_{b1}^{2p}-z_1^{2p}}+\frac{1-q}{k_{a1}^{2p}-z_1^{2p}}\Big)z_1^{2p-1} \triangleq \mu z_1^{2p-1},\\ \frac{\partial V_1}{\partial t} &= -z_1^{2p}\Big[\frac{q\dot{k}_{b1}}{k_{b1}(k_{b1}^{2p}-z_1^{2p})}+\frac{(1-q)\dot{k}_{a1}}{k_{a1}(k_{a1}^{2p}-z_1^{2p})}\Big] = \\ &\quad -\mu z_1^{2p}\Big(q\frac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}+(1-q)\frac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}}\Big),\end{aligned} \tag{15}$$

其中, 为书写简便, 定义连续且严格为正的非线性映射函数$\mu(t)=\dfrac{q}{k_{b1}^{2p}-z_1^{2p}}+\dfrac{1-q}{k_{a1}^{2p}-z_1^{2p}}>0$.综合式 (15) 和全导数公式, 可得

$$\dot{V}_1 = \mu z_1^{2p-1}\dot{z}_1 - \mu z_1^{2p}\Big(q\frac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}+(1-q)\frac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}}\Big). \tag{16}$$

为抑制时变边界演化对系统的影响并实现预设时间收敛, 设计虚拟控制律α_1为

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1}\Big[-f_1+\dot{y}_d-(\kappa_1+\bar{\kappa}(t)+\frac{\eta_1}{t_f-t})z_1\Big], \tag{17}$$

其中, $\kappa_1>0$为常数反馈增益, $\eta_1>0$为预设时间增益参数, $\bar{\kappa}(t)=\sqrt{(\dot{k}_{a1}/k_{a1})^2+(\dot{k}_{b1}/k_{b1})^2+\beta}$($\beta$为平滑常数) 是用于补偿时变边界变化影响的边界补偿项.

将式 (17) 代入式 (12) 得

$$\dot{z}_1 = -(\kappa_1+\bar{\kappa}(t)+\frac{\eta_1}{t_f-t})z_1 + g_1 z_2. \tag{18}$$

将上式代入式 (16), 整理可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 = &-\mu z_1^{2p}(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})- \\ &\mu z_1^{2p}\Big[\bar{\kappa}(t)+q\frac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}+(1-q)\frac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}}\Big]+ \\ &\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2,\end{aligned} \tag{19}$$

其中$\bar{\kappa}(t)+q\dfrac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}+(1-q)\dfrac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}}$为边界补偿项.

由$\bar{\kappa}(t)$的定义可知, 对于任意时间t, 恒有$\bar{\kappa}(t)>|\dfrac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}}|$且$\bar{\kappa}(t)>|\dfrac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}|$. 由指示变量$q\in\{0,1\}$, 可知

$$\bar{\kappa}(t)+q\frac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}+(1-q)\frac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}} > 0. \tag{20}$$

由于$\mu>0$且$z_1^{2p}\geqslant 0$, 可知

$$-\mu z_1^{2p}[\bar{\kappa}(t)+q\frac{\dot{k}_{b1}}{k_{b1}}+(1-q)\frac{\dot{k}_{a1}}{k_{a1}}]\leqslant 0, \tag{21}$$

整理放缩可得:

$$\dot{V}_1\leqslant -\mu z_1^{2p}(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})+\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2. \tag{22}$$

进一步, 根据μ和ξ的定义, 易证以下代数等式成立:

$$\mu z_1^{2p}=q\frac{z_1^{2p}}{k_{b1}^{2p}-z_1^{2p}}+(1-q)\frac{z_1^{2p}}{k_{a1}^{2p}-z_1^{2p}}=\frac{\xi^{2p}}{1-\xi^{2p}}. \tag{23}$$

再根据引理 2 可得如下关键下界:

$$\mu z_1^{2p}\geqslant 2pV_1. \tag{24}$$

最后, 将式 (24) 代入式 (22), 可得

$$\dot{V}_1\leqslant -2p(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})V_1+\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2. \tag{25}$$

定义系统第二级误差变量为$z_2=x_2-\alpha_1$, 对其求导可得

$$\dot{z}_2=\dot{x}_2-\dot{\alpha}_1=f_2(\bar{x}_2)+g_2(\bar{x}_2)x_3-\dot{\alpha}_1. \tag{26}$$

引入$z_3=x_3-\alpha_2$, 将其代入上式, 可得

$$\dot{z}_2=f_2+g_2(z_3+\alpha_2)-\dot{\alpha}_1, \tag{27}$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_2=V_1+\frac{1}{2}z_2^2. \tag{28}$$

对V_2求导, 结合式 (25), 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2=&\dot{V}_1+z_2\dot{z}_2\leqslant\\&-2pV_1(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})+\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2+\\&z_2(f_2+g_2z_3+g_2\alpha_2-\dot{\alpha}_1).\end{aligned} \tag{29}$$

构造虚拟控制器α_2

$$\alpha_2=\frac{1}{g_2}[-f_2+\dot{\alpha}_1-(\kappa_2+\frac{\eta_2}{t_f-t})z_2], \tag{30}$$

其中, $\kappa_2>0$为常数反馈增益, $\eta_2>0$为预设时间增益参数.

将控制律 (30) 代入式 (27), 可得

$$\dot{z}_2=-(\kappa_2+\frac{\eta_2}{t_f-t})z_2+g_2z_3, \tag{31}$$

同时, 将式 (31) 代入式 (29), 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\leqslant&-2pV_1(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})-(\kappa_2+\frac{\eta_2}{t_f-t})z_2^2+\\&\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2+g_2z_2z_3.\end{aligned} \tag{32}$$

step i ($2\leqslant i\leqslant n-1$): 对$z_i$在时刻$t$求导, 建立其状态空间方程为

$$\dot{z}_i=f_i+g_iz_{i+1}+g_i\alpha_i-\dot{\alpha}_{i-1}. \tag{33}$$

构造第i步 Lyapunov 函数为

$$V_i=V_{i-1}+\frac{1}{2}z_i^2, \tag{34}$$

对其求导可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_i=&\dot{V}_{i-1}+z_i\dot{z}_i\leqslant\\&\dot{V}_{i-1}+z_i[f_i+g_i\alpha_i+g_iz_{i+1}-\dot{\alpha}_{i-1}].\end{aligned} \tag{35}$$

构造虚拟控制器α_i:

$$\alpha_i=\frac{1}{g_i}[-f_i+\dot{\alpha}_{i-1}-(\kappa_i+\frac{\eta_i}{t_f-t})z_i]. \tag{36}$$

将控制律 (36) 代入第i级误差动态, 可得

$$\dot{z}_i=-(\kappa_i+\frac{\eta_i}{t_f-t})z_i+g_iz_{i+1}, \tag{37}$$

同时, 将式 (36) 代入式 (35) 中, 整理可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i\leqslant&-2pV_1(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})-\\&\sum\nolimits_{j=2}^{i-1}(\kappa_j+\frac{\eta_j}{t_f-t})z_j^2-\\&(\kappa_i+\frac{\eta_i}{t_f-t})z_i^2+\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2+\\&\sum\nolimits_{j=2}^{i-1}g_jz_jz_{j+1}+g_iz_iz_{i+1}.\end{aligned} \tag{38}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i\leqslant&-2pV_1(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})-\\&\sum\nolimits_{j=2}^{i}(\kappa_j+\frac{\eta_j}{t_f-t})z_j^2+\\&\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2+\sum\nolimits_{j=2}^{i}g_jz_jz_{j+1}.\end{aligned} \tag{39}$$

step n: 第n级跟踪误差为$z_n=x_n-\alpha_{n-1}$, 对其沿系统时间求导, 代入系统方程$\dot{x}_n=f_n+g_nu$, 可得

$$\dot{z}_n=\dot{x}_n-\dot{\alpha}_{n-1}=f_n(\bar{x}_n)+g_n(\bar{x}_n)u-\dot{\alpha}_{n-1}. \tag{40}$$

构造全局 Lyapunov 函数V_n

$$V_n=V_{n-1}+\frac{1}{2}z_n^2=V_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}z_j^2, \tag{41}$$

对V_n求导, 结合式 (39), 可得

$$\dot{V}_n=\dot{V}_{n-1}+z_n\dot{z}_n\leqslant\dot{V}_{n-1}+z_n(f_n+g_nu-\dot{\alpha}_{n-1}). \tag{42}$$

为实现系统最终的预设时间镇定, 设计实际控制律为

$$u=\frac{1}{g_n}[-f_n+\dot{\alpha}_{n-1}-(\kappa_n+\frac{\eta_n}{t_f-t})z_n], \tag{43}$$

其中, $\kappa_n>0$为常数反馈增益, $\eta_n>0$为预设时间增益参数.

将式 (43) 代入式 (40) 中, 可得

$$\dot{z}_n=-(\kappa_n+\frac{\eta_n}{t_f-t})z_n, \tag{44}$$

再将式 (44) 代入式 (42), 并结合式 (39), 整理可得

$$\dot{V}_n \leqslant -2pV_1(\kappa_1+\frac{\eta_1}{t_f-t})- \sum\nolimits_{j=2}^{n}(\kappa_j+\frac{\eta_j}{t_f-t})z_j^2+ \mu g_1 z_1^{2p-1}z_2+\sum\nolimits_{j=2}^{n-1} g_j z_j z_{j+1}. \tag{45}$$

2.2 稳定性分析

基于上述控制律, 总结如下定理.

定理 1 对于具有时变输出约束的非线性系统 (1), 基于式 (13) 和式 (14) 构造的非对称时变障碍 Lyapunov 函数及式 (41) 的全局 Lyapunov 函数, 设计控制器 (43), 若系统初始状态满足$|\xi(0)|<1$, 且反馈增益满足 (55), 则闭环系统对任意$t\in[0,t_f)$具有以下性质:

1) 满足非对称时变输出约束$\underline{k}_{c1}(t)<y(t)<\bar{k}_{c1}(t)$;

2) 闭环系统所有信号保持有界;

3) 跟踪误差$z_i(t)$在$t\to t_f$时收敛至原点, 即

$$\lim_{t\to t_f} z_i(t)=0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

证明 由$|\xi(0)|<1$可知$V_n(0)$为有限值. 取常数$c>V_n(0)$, 定义 Lyapunov 子水平集

$$\Omega_c=\{(t,z):0\leqslant t<t_f,\ V_n(t,z)\leqslant c\}, \tag{46}$$

其中$z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$. 在Ω_c内有$V_1\leqslant V_n\leqslant c$, 故

$$|\xi(t)|\leqslant\rho_c:=(1-e^{-2pc})^{\frac{1}{2p}}<1. \tag{47}$$

因此z_1与约束边界保持严格正距离. 结合假设 2 可知, 存在正常数$\bar{\mu}_c$使得在Ω_c内有

$$0<\mu(t)\leqslant\bar{\mu}_c. \tag{48}$$

又由假设 1 可知, 存在正常数$\bar{g}_i$, 使得

$$0<g_i(\bar{x}_i)\leqslant\bar{g}_i,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{49}$$

下面估计含z_1的高阶耦合项. 定义

$$h_c(t,z_1)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}\mu(t)g_1(\bar{x}_1)|z_1|^{4p-2}}{V_1(t,z_1)},\ z_1\neq0,\\ \lim\limits_{z_1\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\mu(t)g_1(\bar{x}_1)|z_1|^{4p-2}}{V_1(t,z_1)},\ z_1=0.\end{cases} \tag{50}$$

由于$V_1(t,z_1)$在$z_1=0$附近与$|z_1|^{2p}$同阶, 上述极限存在且有限. 同时, 由$|\xi|\leqslant\rho_c<1$以及$k_{a1}(t)$, $k_{b1}(t)$的有界性可知z_1在Ω_c内有界. 于是存在正常数$c_{1,c}$, 使得

$$\frac{1}{2}\mu(t)g_1(\bar{x}_1)|z_1|^{4p-2}\leqslant c_{1,c}V_1. \tag{51}$$

对式 (45) 中的交叉耦合项应用 Young 不等式, 可得

$$\mu g_1 z_1^{2p-1}z_2\leqslant\frac{1}{2}\mu g_1|z_1|^{4p-2}+\frac{1}{2}\mu g_1 z_2^2, \tag{52}$$

$$g_i z_i z_{i+1}\leqslant\frac{1}{2}g_i z_i^2+\frac{1}{2}g_i z_{i+1}^2, i=2,3,\ldots,n-1. \tag{53}$$

将上述估计代入式 (45) 的表达式, 可得

$$\dot{V}_n\leqslant-(2p\kappa_1-c_{1,c}+\frac{2p\eta_1}{t_f-t})V_1- (\kappa_2-\frac{1}{2}\bar{\mu}_c\bar{g}_1-\frac{1}{2}\bar{g}_2+\frac{\eta_2}{t_f-t})z_2^2- \sum\nolimits_{i=3}^{n-1}(\kappa_i-\frac{1}{2}\bar{g}_{i-1}-\frac{1}{2}\bar{g}_i+\frac{\eta_i}{t_f-t})z_i^2- (\kappa_n-\frac{1}{2}\bar{g}_{n-1}+\frac{\eta_n}{t_f-t})z_n^2, \tag{54}$$

为了吸收上述耦合项, 反馈增益按系统阶数选取如下.

$$\begin{cases}2p\kappa_1\geqslant c_{1,c},\\ \kappa_2\geqslant\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_c\bar{g}_1+\dfrac{1}{2}\bar{g}_2,\\ \kappa_i\geqslant\dfrac{1}{2}(\bar{g}_{i-1}+\bar{g}_i),\ i=3,\ldots,n-1,\\ \kappa_n\geqslant\dfrac{1}{2}\bar{g}_{n-1}.\end{cases} \tag{55}$$

在上述增益条件下, 有

$$\dot{V}_n\leqslant-\frac{2p\eta_1}{t_f-t}V_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{\eta_i}{t_f-t}z_i^2. \tag{56}$$

令

$$\lambda=\min\{2p\eta_1,2\eta_2,\ldots,2\eta_n\}>0, \tag{57}$$

则可进一步得到

$$\dot{V}_n\leqslant-\frac{\lambda}{t_f-t}V_n. \tag{58}$$

下面用反证法证明轨线不会离开Ω_c. 假设存在首次到达Ω_c边界的时刻

$$\tau_c=\inf\{t\in(0,t_f):V_n(t)=c\}. \tag{59}$$

由于$V_n(0)<c$, 可知$\tau_c>0$. 因而在$[0,\tau_c)$上, 轨线始终位于Ω_c内部, 上述微分不等式成立. 对其在$[0,t]\subset[0,\tau_c)$上积分, 得到

$$V_n(t)\leqslant V_n(0)(\frac{t_f-t}{t_f})^{\lambda}<c,\ 0\leqslant t<\tau_c. \tag{60}$$

令$t\to\tau_c^-$, 由$V_n(t)$的连续性可得

$$V_n(\tau_c)\leqslant V_n(0)(\frac{t_f-\tau_c}{t_f})^{\lambda}\leqslant V_n(0)<c, \tag{61}$$

这与$V_n(\tau_c)=c$矛盾. 因此闭环轨线不会离开Ω_c, 上述估计可延拓至整个区间$[0,t_f)$, 即

$$V_n(t)\leqslant V_n(0)(\frac{t_f-t}{t_f})^{\lambda},\ 0\leqslant t<t_f. \tag{62}$$

因此$V_n(t)$在$[0,t_f)$上有界, 且$\lim\limits_{t\to t_f^-}V_n(t)=0$. 进一步由式 (41) 可知

$$\lim_{t\to t_f^-} z_i(t)=0, i=1,2,\ldots,n.$$

同时, 由$|\xi(t)|\leqslant\rho_c<1$可知, $-k_{a1}(t)<z_1(t)<k_{b1}(t)$, 故系统输出满足

$$\underline{k}_{c1}(t)<y(t)<\bar{k}_{c1}(t), 0\leqslant t<t_f. \tag{63}$$

此外, 由$V_n(t)$有界可知$z_i(t)$有界. 由于参考信号有界并且光滑, 系统非线性函数$f_i(\cdot),g_i(\cdot)$连续, 结合虚拟控制律及实际控制律的递推表达, 可逐级推出闭环系统内的所有状态信号与控制信号在$[0,t_f)$均保持有界. 定理得证. □

3　无超调条件分析

本节基于由控制律得到的闭环误差系统分析无超调条件. 由控制器设计可得闭环误差系统

$$\dot{z}_i=-A_i(t)z_i+g_i(\bar{x}_i)z_{i+1}, i=1,2,\ldots,n, \tag{64}$$

其中$z_{n+1}\equiv 0$, 并且

$$\begin{aligned} A_1(t)&=\kappa_1+\bar{\kappa}(t)+\frac{\eta_1}{t_f-t},\\ A_i(t)&=\kappa_i+\frac{\eta_i}{t_f-t},\ i=2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{65}$$

由于$A_i(t)>0$, 对应的状态转移函数定义为

$$\Phi_i(t,\tau)=e^{-\int_\tau^t A_i(s)\,\mathrm{d}s},\ 0\leqslant\tau\leqslant t<t_f. \tag{66}$$

由式 (65) 可得, 第一级状态转移函数可写为

$$\Phi_1(t,\tau)=e^{-\kappa_1(t-\tau)}e^{-\int_\tau^t\bar{\kappa}(s)\,\mathrm{d}s}(\frac{t_f-t}{t_f-\tau})^{\eta_1}. \tag{67}$$

对于其余各级$(i=2,\ldots,n)$, 有

$$\Phi_i(t,\tau)=e^{-\kappa_i(t-\tau)}(\frac{t_f-t}{t_f-\tau})^{\eta_i},\ i=2,\ldots,n. \tag{68}$$

利用常数变易法逐级迭代积分, 可将跟踪误差$e(t)=z_1(t)$解析为n个初值响应组份之和:

$$z_1(t)=\Phi_1(t,0)F_n(t), \tag{69}$$

其中$F_n(t)=z_1(0)+\sum\limits_{j=2}^{n}z_j(0)W_j(t)$, 权函数$W_j(t)$为第$j$级初值对第 1 级误差的时间累积影响, 迭代定义为

$$\begin{cases} W_1(t)=1\\ W_2(t)=\int_0^t g_1(\tau_1)\dfrac{\Phi_2(\tau_1,0)}{\Phi_1(\tau_1,0)}d\tau_1\\ W_j(t)=\int_0^t g_1(\tau_1)\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}\int_0^{\tau_1}g_2(\tau_2)\dfrac{\Phi_3}{\Phi_2}\cdots\\ \qquad\cdots\int_0^{\tau_{j-2}}g_{j-1}\dfrac{\Phi_j}{\Phi_{j-1}}d\tau_{j-1}\ldots d\tau_1,\ (j\geqslant 3) \end{cases}$$

令

$$R_i(t)=g_i(\bar{x}_i(t))\frac{\Phi_{i+1}(t,0)}{\Phi_i(t,0)}. \tag{70}$$

根据假设 1-2 及式 (67)-(68), 若选取$\eta_{i+1}\geqslant\eta_i$, $R_i(t)$为正连续可积函数, 故由引理 5 可知$W_j(t)$在$[0,t_f)$上为严格单调递增的非负函数, 并存在有限最大值$W_{j,\max}=\lim\limits_{t\to t_f}W_j(t)$. 由于$\Phi_1(t,0)>0$, 无超调等价于$F_n(t)\geqslant 0$. 下面给出不同阶数系统的无超调配置准则.

1) $n=1$情形.

对于一阶系统, 此时闭环误差方程为

$$\dot{z}_1=-A_1(t)z_1, \tag{71}$$

对上式求解, 可得

$$z_1(t)=z_1(0)e^{-\kappa_1 t}e^{-\int_0^t\bar{\kappa}(s)ds}(\frac{t_f-t}{t_f})^{\eta_1}, \tag{72}$$

显然, 保证$z_1(t)\geqslant 0$的充要条件为

$$z_1(0)\geqslant 0. \tag{73}$$

2) $n=2$情形.

对于二阶对象, $F_2(t)=z_1(0)+z_2(0)W_2(t)$. 由于$W_2(t)$在$t\in[0,t_f)$上单调递增, 其有限上确界由终端左极限给出, 记为

$$\begin{aligned} W_{2,\max}=&\int_0^{t_f}g_1(\tau)e^{(\kappa_1-\kappa_2)\tau}\times\\ &e^{\int_0^\tau\bar{\kappa}(s)ds}(1-\frac{\tau}{t_f})^{\eta_2-\eta_1}d\tau. \end{aligned} \tag{74}$$

对$F_2(t)$的符号进行边界分析, 可知$z_1(t)\geqslant 0$当且仅当下列两个条件之一成立:

$$\begin{cases} z_1(0)\geqslant 0,\\ z_2(0)\geqslant 0; \end{cases} \tag{75}$$

$$\begin{cases} z_1(0)\geqslant 0,\\ z_2(0)<0,\\ z_1(0)\geqslant|z_2(0)|W_{2,\max}. \end{cases} \tag{76}$$

定理 2　应用本文提出的控制律 (43) 于二阶对象, 闭环响应满足$z_1(t)\geqslant 0$, 当且仅当式 (75) 或式 (76) 成立.

注 1　与通常要求$z_1(0)\geqslant 0,\ z_2(0)\geqslant 0$的保守判据不同, 式 (76) 表明当$z_2(0)<0$时, 只要$z_1(0)$足以抵消由$z_2(0)$引起的负向累积影响, 仍可保证$z_1(t)\geqslant 0$, 从而实现无超调跟踪控制.

3) $n=3$情形.

对于三阶对象, $F_3(t)=z_1(0)+z_2(0)W_2(t)+z_3(0)W_3(t)$. 由于$W_2(0)=W_3(0)=0$, 首要必要条件仍为$z_1(0)\geqslant 0$. 对其求时间导数可得:

$$F_3'(t)=W_2'(t)[z_2(0)+z_3(0)U_2(t)], \tag{77}$$

其中$U_2(t)=\dfrac{W_3'(t)}{W_2'(t)}$在$[0,t_f)$上连续、非负、严格单

调递增, 可推出$F_3'(t)$在此区间至多只存在一个局部极值点t^*. 基于极值演化逻辑, 三阶系统的无超调条件可归结为以下情况之一:

$$\begin{cases} z_1(0)\geqslant 0,\\ z_2(0)\geqslant 0,\\ z_3(0)\geqslant 0; \end{cases} \tag{78}$$

$$\begin{cases} z_1(0)\geqslant 0,\\ z_2(0)\leqslant 0,\\ z_3(0)\leqslant 0,\\ F_3(t_f^-)\geqslant 0; \end{cases} \tag{79}$$

$$\begin{cases} z_1(0)\geqslant 0,\\ z_2(0)> 0,\\ z_3(0)< 0,\\ F_3(t_f^-)\geqslant 0; \end{cases} \tag{80}$$

$$\begin{cases} z_1(0)\geqslant 0,\\ z_2(0)< 0,\\ z_3(0)> 0,\\ F_3(t^*)\geqslant 0. \end{cases} \tag{81}$$

定理 3 控制律 (43) 作用于三阶对象时, 若满足式 (78)∼(81) 的任意一组条件, 则闭环响应$z_1(t)\geqslant 0$.

4) $n\geqslant 4$情形.

随着阶数n的增大, 直接对高阶多重积分函数$\sum\limits_{j=1}^{n} z_j(0)W_j(t)$求解极值解析界在数学上变得高度复杂, 而退回到全非负条件$z_i(0)\geqslant 0$又会导致极大的工程保守性. 利用引理 4, 可将高阶积分响应分解为粒度更大的多个组份. 以$n=4$为例, 可将解析式重组为两个二阶组份的叠加:

$$z_1(t)=\Phi_1(t,0)[\underbrace{(z_1(0)+z_2(0)W_2(t))}_{\text{组份}Z_{11}(t)}+ \underbrace{(z_3(0)W_3(t)+z_4(0)W_4(t))}_{\text{组份}Z_{12}(t)}]. \tag{82}$$

为了确保全局$z_1(t)\geqslant 0$, 只需求解$Z_{11}(t)\geqslant 0$且$Z_{12}(t)\geqslant 0$. 对于$Z_{11}(t)$, 直接调用式 (75) 或 (76) 中的二阶无超调充要准则; 对于$Z_{12}(t)$, 提取公因子$W_3(t)$, 其括号内的结构与二阶响应可转化为关于局部权函数比值的二阶型判定, 其非负条件等价于判定初始偏置$z_3(0)$与后续动态$z_4(0)$的博弈关系, 同样只需应用二阶对象的边界条件规则进行判定.

定理 4 对于阶数$n\geqslant 4$的严格反馈非线性系统, 将其闭环解析响应依据$n=2n_1+3n_2$规则分解为多个二阶与三阶局部组份. 若各局部组份分别满足上述的二阶或三阶无超调条件, 则系统的全局跟踪误差满足$z_1(t)\geqslant 0,\ \forall t\in[0,t_f)$.

注 2 为了说明稳定性增益下界与无超调条件之间的可行交集, 给出一种解析增益选择方法. 记稳定性增益下界为

$$\begin{cases} L_1=\dfrac{c_{1,c}}{2p},\\ L_2=\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_c\bar{g}_1+\dfrac{1}{2}\bar{g}_2,\\ L_i=\dfrac{1}{2}(\bar{g}_{i-1}+\bar{g}_i),\ i=3,\ldots,n-1,\\ L_n=\dfrac{1}{2}\bar{g}_{n-1}, \end{cases} \tag{83}$$

令$\bar{\kappa}_0=\sup_{t\in[0,t_f]}\bar{\kappa}(t)$. 若$\eta_{i+1}\geqslant\eta_i$, 并选取正数$\delta_i$使得

$$z_1(0)>\sum_{j=2}^{n} z_j^-(0)\prod_{\ell=1}^{j-1}\frac{\bar{g}_\ell}{\delta_\ell}, \tag{84}$$

其中$z_j^-(0)=\max\{-z_j(0),0\}$. 则可递推选择

$$\begin{aligned} &\kappa_1\geqslant L_1,\\ &\kappa_2\geqslant\max\{L_2,\kappa_1+\bar{\kappa}_0+\delta_1\},\\ &\kappa_{i+1}\geqslant\max\{L_{i+1},\kappa_i+\delta_i\},i=2,\ldots,n-1. \end{aligned} \tag{85}$$

由此可得$W_{j,\max}\leqslant\prod\limits_{\ell=1}^{j-1}\bar{g}_\ell/\delta_\ell$, 从而式 (84) 成立. 由于$\delta_i$可以任意增大, 上述递推选择给出了非空交集可行域. 这表明即使非线性耦合上界较大, 仍可通过增大相邻层增益差来同时满足稳定性下界与无超调裕度要求.

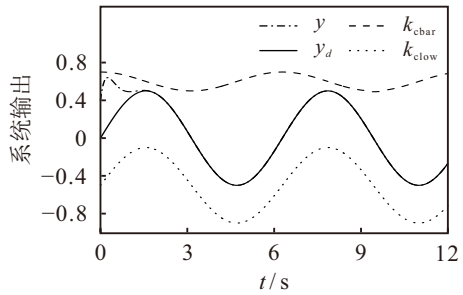
4 仿真算例

例 1 考虑文献 [5] 中的非线性系统

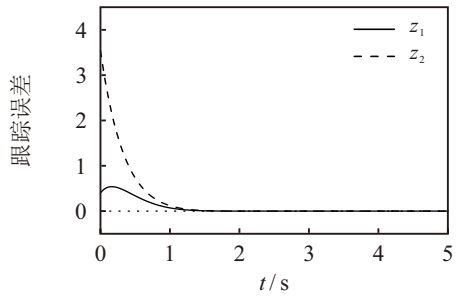
$$\begin{cases} \dot{x}_1=0.1x_1^2+x_2,\\ \dot{x}_2=0.1x_1x_2-0.2x_1+(1+x_1^2)u,\\ y=x_1. \end{cases} \tag{86}$$

利用本文算法设计无超调跟踪控制器, 使$y(t)$在预设时间t_f内跟踪期望轨迹$y_d(t)=0.5\sin(t)$, 同时受非对称输出约束$\underline{k}_{c1}(t)=-0.5+0.4\sin(t)$和$\overline{k}_{c1}(t)=0.6+0.1\cos(t)$. 利用式 (43) 设计控制器, 本次仿真参数可参考文献 [5], 初始条件$x_1(0)=0.4$, $x_2(0)=2.5$, 参数选择$\kappa_1=2$, $\kappa_2=2$, $\eta_1=\eta_2=2$, $\beta=0.1$, 预设时间$t_f=2$ s, 其仿真结果如图 1 所示. 可见$y(t)$严格限制在时变边界内, 在预设时间内收敛至$y_d(t)$, $z_1(t)$和$z_2(t)$都在预设时间收敛到零, 且$z_1(t)$, $z_2(t)$保持非负, 实现无超调控制. 控制输入u始终有界, 进一步验证所提控制器的有效性与稳定性.

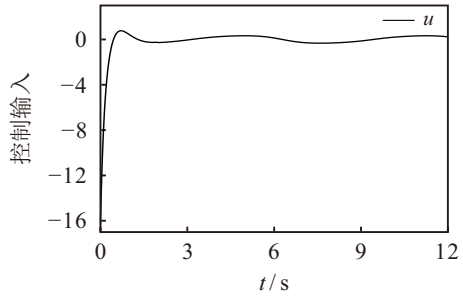
图 2 为文献 [5] 算法在相同条件下的仿真对比结果. 可见原文献算法虽能保证输出不超出约束边界, 但由于缺乏无超调设计机制, 系统在暂态阶段出



(a) 系统输出变化曲线

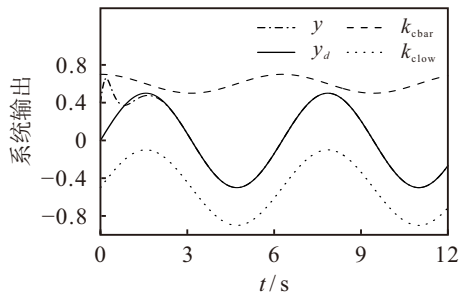


(b) 系统跟踪误差变化曲线

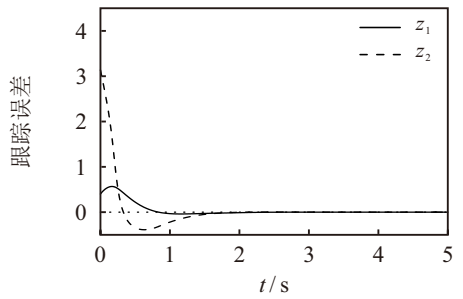


(c) 系统控制输入变化曲线

图 1　本文算法下系统变化曲线



(a) 系统输出变化曲线



(b) 系统跟踪误差变化曲线

图 2　文献 [5] 算法下系统变化曲线

现了明显的超调现象.

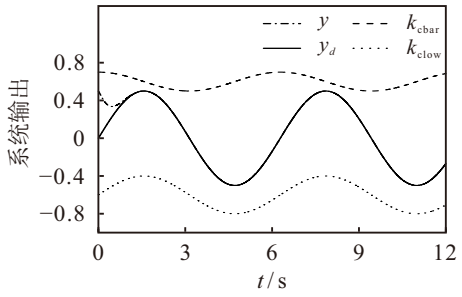
例 2　考虑如下典型直流电机驱动单机械臂非线性系统[46]:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = K_t i, \\ L\dot{i} + Ri + K_e\dot{\theta} = u, \end{cases} \tag{87}$$

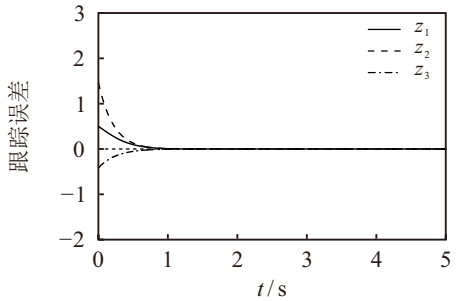
其中θ是机械臂关节角度, $\dot{\theta}$是机械臂关节角速度, i是直流电机的电枢电流, u是电机输入电压, R和L是电枢电阻和电感, B, K_t和K_e是粘滞摩擦系数、转矩系数和反电动势系数, J是关节总惯量, g是重力加速度, m和l分别是连杆的质量和长度, 令$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = i$. 那么系统 (87) 能被表达为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{K_t}{J}x_3 - \dfrac{B}{J}x_2 - \dfrac{mgl}{J}\sin(x_1), \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{K_e}{L}x_2 - \dfrac{R}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u. \end{cases} \tag{88}$$

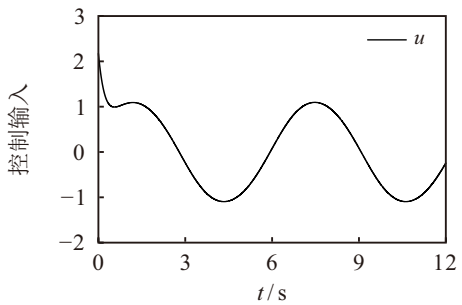
利用本文算法设计无超调跟踪控制器, 使$y(t)$在预设时间t_f内跟踪期望轨迹$y_d(t) = 0.5\sin(t)$, 同时受非对称输出约束$\underline{k}_{c1}(t) = -0.6 + 0.2\sin(t)$和$\overline{k}_{c1}(t) = 0.6 + 0.1\cos(t)$. 利用式 (43)设计控制器, 本次仿真参数选择初始条件$x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) =$



(a) 系统输出变化曲线



(b) 系统跟踪误差变化曲线



(c) 系统控制输入变化曲线

图 3　本文算法下系统变化曲线

$-0.5, x_3(0)=1$, 参数选择$J=1, B=1, mgl=9.8$, $K_t=2$, $K_e=0.1$, $R=0.5$, $L=0.1$, 控制器参数选择$\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=3$, $\eta_1=\eta_2=\eta_3=2$, $\beta=0.1$, 预设时间t_f设置为2 s, 其仿真结果如图 3 所示. 可见$y(t)$严格限制在时变边界内, 在预设时间内已收敛至$y_d(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$和$z_3(t)$都在预设时间内收敛到零, 而且$z_1(t)$, $z_2(t)$保持非负, $z_3(t)$保持非正, 实现无超调跟踪. 控制输入u在整个闭环过程中始终有界, 进一步验证了所提控制器的有效性与稳定性.

注 3 本文控制律中的预设时间项$\eta_i/(t_f-t)$用于保证闭环误差在$0\leqslant t<t_f$内收敛, 故理论分析均在$[0,t_f)$上进行. 数值仿真中, 为避免$t=t_f$附近的奇异计算, 采用小正数ε将$(t_f-t)^{-1}$正则化为$\max\{t_f-t,\varepsilon\}^{-1}$. 当$t\geqslant t_f$后, 控制器进入保持阶段, 关闭预设时间奇异增益项, 以维持预设时间内已经获得的跟踪效果.

5 结 论

本文针对具有时变输出约束的严格反馈非线性系统, 提出了一种预设时间无超调跟踪控制方法. 通过引入非对称障碍 Lyapunov 函数与预设时间反步设计, 实现了约束处理与收敛性能的统一分析. 在此基础上, 构建了包含边界补偿机制的控制律, 有效抑制了时变约束对系统动态的影响, 并保证闭环系统在预设时间内稳定收敛. 进一步, 通过对误差系统的解析分解, 建立了适用于不同阶数系统的无超调判据, 并由此得到较传统全非负初值条件更为松弛的参数可行域, 从而降低了高阶无超调设计的保守性. 两个数值仿真实例表明, 所提方法能够在满足时变输出约束的同时, 实现预设时间跟踪和无超调响应.

参考文献 (References)

[1] Farrell J A, Polycarpou M, Sharma M, et al. Command filtered backstepping[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1391-1395.

[2] Zhang T P, Ge S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1895-1903.

[3] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2090-2099.

[4] Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems[J]. Automatica, 2009, 45(4): 918-927.

[5] Tee K P, Ren B B, Ge S S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints[J]. Automatica, 2011, 47(11): 2511-2516.

[6] Li Y M, Tong S C, Liu L, et al. Adaptive output-feedback control design with prescribed performance for switched nonlinear systems[J]. Automatica, 2017, 80: 225-231.

[7] Zhao K, Song Y, Ma T, et al. Prescribed performance control of uncertain Euler-Lagrange systems subject to full-state constraints[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(8): 3478-3489.

[8] Jin X. Adaptive fixed-time control for MIMO nonlinear systems with asymmetric output constraints using universal barrier functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(7): 3046-3053.

[9] Li H Y, Zhao S Y, He W, et al. Adaptive finite-time tracking control of full state constrained nonlinear systems with dead-zone[J]. Automatica, 2019, 100: 99-107.

[10] Yu J P, Zhao L, Yu H S, et al. Barrier Lyapunov functions-based command filtered output feedback control for full-state constrained nonlinear systems[J]. Automatica, 2019, 105: 71-79.

[11] Ling S, Wang H Q, Liu P X. Adaptive tracking control of high-order nonlinear systems under asymmetric output constraint[J]. Automatica, 2020, 122: 109281.

[12] Sui S, Chen C L P, Tong S C. A novel adaptive NN prescribed performance control for stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(7): 3196-3205.

[13] Liu L, Gao T T, Liu Y J, et al. Time-varying IBLFs-based adaptive control of uncertain nonlinear systems with full state constraints[J]. Automatica, 2021, 129: 109595.

[14] Cui G Z, Yu J P, Shi P. Observer-based finite-time adaptive fuzzy control with prescribed performance for nonstrict-feedback nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(3): 767-778.

[15] Qiu J B, Wang T, Sun K K, et al. Disturbance observer-based adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems with finite-time prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(4): 1175-1184.

[16] Yuan X, Chen B, Lin C. Prescribed finite-time adaptive neural tracking control for nonlinear state-constrained systems: Barrier function approach[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(12): 7513-7522.

[17] Sui S, Xu H, Tong S, et al. Prescribed performance fuzzy adaptive output feedback control for nonlinear MIMO systems in a finite time[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(9): 3633-3644.

[18] 王芳, 吕紫青, 单锐, 等. 输出受限的不确定非线性系统的自适应固定时间控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2265-2273.
(Wang F, Lv Z Q, Shan R, et al. Adaptive fixed-time control for uncertain nonlinear systems with output constraints[J]. Control and Decision, 2022, 37(9): 2265-2273.)

[19] 杨启尧, 彭冬亮, 蔡建平. 时变输出约束非线性系统的量化反馈自适应终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(7): 2186-2194.

(Yang Q Y, Peng D L, Cai J P. Adaptive terminal sliding mode control for nonlinear systems with quantized input and time-varying output constraints[J]. Control and Decision, 2024, 39(7): 2186-2194.)

[20] Zhang J X, Di J, Pedrycz W, et al. Output-constrained prescribed performance control of MIMO nonlinear systems with a priori unknown references[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2025, 55(12): 5582-5593.

[21] Fotiadis F, Rovithakis G A. Input-constrained prescribed performance control for high-order MIMO uncertain nonlinear systems via reference modification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2024, 69(5): 3301-3308.

[22] 高升, 张伟, 郭延宁. 输入饱和的机器人固定时间预设性能容错控制[J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2639-2646.
(Gao S, Zhang W, Guo Y N. Prescribed performance-based fixed-time fault-tolerant control for robotic systems with input saturation[J]. Control and Decision, 2025, 40(9): 2639-2646.)

[23] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.

[24] Jiménez-Rodríguez E, Muñoz-Vázquez A J, Sánchez-Torres J D, et al. A note on predefined-time stability[J]. IFAC-PapersOnLine, 2018, 51(13): 520-525.

[25] Cao Y, Cao J F, Song Y D. Practical prescribed time tracking control over infinite time interval involving mismatched uncertainties and non-vanishing disturbances[J]. Automatica, 2022, 136: 110050.

[26] Ma R C, Fu L L, Fu J. Prescribed-time tracking control for nonlinear systems with guaranteed performance[J]. Automatica, 2022, 146: 110573.

[27] Yao Y, Tan J Q, Yao Y G, et al. Prescribed-time prescribed performance control for stochastic nonlinear input-delay systems with arbitrary bounded initial error[J]. Neurocomputing, 2024, 571: 127200.

[28] Chen C C, Sun Z Y, Xu S S. Prescribed-time stabilization for high-order nonlinear systems with a pre-specified asymmetric output constraint[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(4): 3545-3574.

[29] Liu H, Che W W. Asymmetric prescribed performance control for nonlinear systems under intermittent communication[J]. Journal of the Franklin Institute, 2024, 361(6): 106691.

[30] Tian G T, Golestani M, Lam J, et al. Prescribed-time control of nonlinear systems with global prescribed performance for state errors[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2025, 72(10): 6148-6158.

[31] Sun L R, Sun K W, Guo X, et al. Enhancing prescribed-time trajectory tracking control for a stratospheric airship with prescribed performance[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2025, 38(7): 103290.

[32] Song Y D, Ye H F, Lewis F L. Prescribed-time control and its latest developments[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(7): 4102-4116.

[33] Xu H, Yu D X, Sui S, et al. A practical predefined-time stability criterion and its application to uncertain nonlinear systems[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2024, 37(6): 2556-2578.

[34] Zhang L C, Zhang J, Liang H J, et al. Adaptive prescribed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems: A novel full errors approach[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2025, 55(10): 6684-6695.

[35] Yang J Z, Zhang J X, Chai T Y. Prescribed performance control of nonlinear systems with unknown sign-switching virtual control coefficients[J]. CAA Journal of Automatica Sinica, 2025, 12(7): 1381-1390.

[36] Krstic M, Bement M. Nonovershooting control of strict-feedback nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(12): 1938-1943.

[37] 陈小平, 徐红兵. 一类非线性系统的无超调控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 627-631.
(Chen X P, Xu H B. Non-overshooting control for a class of nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 627-631.)

[38] Li W Q, Krstic M. Mean-nonovershooting control of stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(12): 5756-5771.

[39] Polyakov A, Krstic M. Finite- and fixed-time nonovershooting stabilizers and safety filters by homogeneous feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(11): 6434-6449.

[40] Jia F J. Non-overshooting tracking control for nonlinear systems with prescribed finite-time[J]. ISA Transactions, 2024, 151: 174-182.

[41] Jia F J. Non-overshooting control of nonlinear pure-feedback systems[J]. Systems & Control Letters, 2024, 185: 105743.

[42] Jia F J, Zhu Q X. Nonovershooting tracking control for nonlinear output feedback systems with application to DC motor[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2025, 72(12): 8383-8395.

[43] Xiang X Q, Zhang C. Conditions for guaranteeing non-overshooting control of nonlinear systems with full-state constraints[J]. Applied Sciences, 2025, 15(11): 5816.

[44] Li W Q, Wang H, Liu L, et al. Distributed mean-nonovershooting control of stochastic nonlinear multi-agent systems[J]. Automatica, 2025, 179: 112397.

[45] Zhu Z J, Liao S Y, Jia F J. Nonovershooting prescribed finite-time control for nonlinear pure-feedback systems[J]. Complex Systems Stability & Control, 2025, 1(1): 4.

[46] Wang N, Tong S C, Li Y M. Observer-based adaptive fuzzy control of nonlinear non-strict feedback system with input delay[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2018, 20(1): 236-245.

作者简介

毛鉴墁 (2002−), 女, 硕士生, 主要研究方向为非线性系统分析与控制, E-mail: xuebaou@163.com;

蒋沅 (1982−), 男, 教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为非线性系统分析与控制、复杂网络建模与优化, E-mail: jiangyuan@nchu.edu.cn.