存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统全局灵敏度分析

孙东阳†

(江苏科技大学 船舶与海洋工程学院，镇江 212003)

摘　要: 针对非线性动力学系统中随机与认知两类不确定性参数的全局灵敏度评估问题, 提出一种基于置信区域相似性度量指标的全局灵敏度分析方法. 首先, 采用区间变量量化认知不确定性参数, 构建同时包含随机不确定性与认知不确定性的非线性系统动力学模型, 以及该非线性动力学系统响应的 95% 置信区域; 然后, 基于两类置信区域的交集和并集构造置信区域相似性度量指标; 在此基础上, 分别建立随机不确定性参数与认知不确定性参数的全局灵敏度指标; 接着, 提出一种存在随机与认知不确定性的非线性动力学系统全局灵敏度分析方法; 最后, 以两自由度非线性质量-弹簧-阻尼受迫振动系统为算例, 验证了所提出全局灵敏度分析方法在工程应用中的可行性和有效性.

关键词: 全局灵敏度分析；随机不确定性；认知不确定性；非线性动力学系统；置信区域；相似性度量指标

中图分类号: TB114　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2026.0602

引用格式: 孙东阳. 存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统全局灵敏度分析 [J]. 控制与决策.

Global sensitivity analysis for nonlinear dynamic systems with aleatory and epistemic uncertainty

SUN Dong-yang†

(School of Naval Architecture and Ocean Engineering，Jiangsu University of Science and Technology，Zhenjiang 212003，China)

Abstract: To evaluate the global sensitivity of parameters subject to aleatory and epistemic uncertainties in nonlinear dynamic systems, this paper proposes a global sensitivity analysis approach based on a confidence region similarity metric. Firstly, interval variables are employed to quantify epistemic uncertainty parameters, and a nonlinear dynamic system model incorporating both aleatory and epistemic uncertainties is established, from which the 95% confidence region of nonlinear dynamic system responses is derived. Secondly, a similarity metric for confidence regions is defined by integrating the intersection and union information of two confidence regions. On this basis, global sensitivity indices for aleatory uncertainty parameters and epistemic uncertainty parameters are constructed, respectively. Following, a global sensitivity analysis method is proposed for nonlinear dynamic systems with aleatory and epistemic uncertainty. Finally, a two-degree-of-freedom nonlinear mass-spring-damper forced vibration system is adopted as a case study to demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed global sensitivity analysis method in engineering applications.

Keywords: global sensitivity analysis； aleatory uncertainty； epistemic uncertainty； nonlinear dynamic system； confidence region； similarity metric

0　引　言

随着科学技术的发展, 非线性动力学系统越来越广泛地应用于航空航天、机械工程及土木结构等领域, 如: 含间隙机械结构[1]、非线性吸振与隔振系统[2]、航空发动机涡轮叶片[3]、转子-轴承非线性系统[4], 其动力学行为的准确预测与可靠控制直接关系其结构完整性与任务成败. 这类系统的数值建模与分析高度依赖关键输入参数的准确性. 然而, 由于材料属性的分散性、制造与装配公差、环境变化等原因, 非线性动力学系统中不可避免地存在多源不确定性[5].

收稿日期: 2026-06-20；**录用日期:** 2026-10-22.

†通信作者. E-mail: sundongyang@cqu.edu.cn.

因此, 在考虑不确定性的情况下, 筛选出非线性动力学系统的关键参数对提高非线性动力学系统的可靠性至关重要.

不确定性通常可以分为两类: 随机不确定性和认知不确定性[6-7]. 随机不确定性源于系统固有的自然变异性, 不可通过增加信息而消减, 通常采用概率论方法进行量化. 认知不确定性则源于知识的不完备、试验数据不足或模型形式的简化, 可随认知水平的提高而降低, 可以采用区间方法[8]、证据理论[9-10]和模糊集理论[11]进行不确定性量化. 然而, 在大量非线性动力学系统中同时存在这两类不确定性, 从这类存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统中筛选关键参数是一个巨大挑战.

全局灵敏度分析 (GSA)[12] 旨在定量评估输入参数在整个变动范围内对输出响应的贡献度, 从而辨识关键参数, 其中基于方差的 Sobol 灵敏度指标是应用最广泛的方法. 然而, Sobol 灵敏度指标是建立在概率论的基础上. 当系统中存在认知不确定性时, 学者们发展了基于非概率论的灵敏度分析方法, 如区间灵敏度分析方法[13]、模糊灵敏度分析方法[14]、证据理论灵敏度分析方法[15]、概率盒灵敏度分析方法[6,16].

上述全局灵敏度分析方法仅适用于静态模型, 非线性动力学系统是一种典型的时变模型, 对这类系统进行全局灵敏度分析需要在时域内评估输入参数的不确定性对输出响应的贡献度. 时变系统的全局灵敏度分析方法分为三类: 逐时刻分解法、模式降维法与随机过程方差分解法. 逐时刻分解法[17] 将时变响应离散为时序变量后, 独立地在每个时刻进行灵敏度分析. 该方法能够直接采用上述的静态模型灵敏度分析方法, 然而, 该方法完全忽略了不同时刻响应之间的相关性. 模式降维法[18-19] 借助正交分解技术将高维时变响应场压缩为少量主导模态与对应时间系数, 进而在低维模态空间进行灵敏度分析. 随机过程方差分解法[20] 将时变输出采用随机过程建模, 基于协方差函数或累积方差构建全局灵敏度指标. 上述方法几乎全部建立在输入不确定性可用精确概率分布描述的框架内, Sun[21] 提出了基于区间过程的全局灵敏度指标, 用于对存在性能退化的编织复合材料进行全局灵敏度分析. 对于存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统, 目前还缺少有效的全局灵敏度分析方法. 因此, 本文在时域内综合考虑随机不确定性输入参数和认知不确定性输入参数对系统输出响应的影响, 提出基于置信区域相似性度量指标的全局灵敏度分析方法.

1 存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统建模

通常, 不考虑参数的不确定性时, 非线性动力学系统的动力学方程可表示为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}(t))\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)). \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{q}(t)=[q_1(t),q_2(t),\ldots,q_n(t)]^T\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统广义坐标矢量. $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$为系统广义质量矩阵, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为系统广义阻尼矩阵, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})$为系统广义刚度矩阵, $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为系统广义外力.

公式 (1) 可进一步表示成如下状态方程形式:

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}(t)\\ \ddot{\boldsymbol{q}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}(t)\\ -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q}(t))(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{q}(t))\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))\end{bmatrix}. \tag{2}$$

采用系统的状态向量$\boldsymbol{X}(t)=[\boldsymbol{q}^T(t),\dot{\boldsymbol{q}}^T(t)]^T\in\boldsymbol{R}^{2n}$, 公式 (2) 可简写为

$$\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}=g_1(\boldsymbol{X}(t))+g_2(t,\boldsymbol{X}(t)). \tag{3}$$

其中, $g_2(t,\boldsymbol{X}(t))=[\boldsymbol{0}_{1\times n}\ (\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)))^T]^T$. 给定广义外力和状态初始值$\boldsymbol{X}(t_0)$, 利用常微分方程 (ODE) 求解方法[22] 如 Runge-Kutta 方法、广义-α 方法、Newmark 方法、HHT 方法、Wilson 方法、中心差分法, 求解非线性动力学系统的响应$\boldsymbol{X}(t)$.

实际工程应用中由于加工误差、安装误差等因素, 非线性动力学系统的参数往往存在不确定性, 这将显著影响非线性系统的动态特性. 考虑到不确定性数据的完备性, 不确定性分为随机不确定性和认知不确定性. 其中: 随机不确定性参数通常采用概率分布描述其不确定性. 认知不确定性可以采用区间理论、模糊理论等方法描述. 本文采用区间理论描述非线性动力学系统的认知不确定性. 存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统的动力学方程可表示为

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})}{dt}=\tilde{g}_1(\tilde{\boldsymbol{X}}(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}))+\tilde{g}_2(t,\tilde{\boldsymbol{X}}(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})). \tag{4}$$

其中, 上标 "~" 表示含有不确定性参数的矩阵和向量. $\boldsymbol{a}=[a_1,\ldots,a_{nA}]$ 为随机不确定性向量, 包含 nA 个随机变量, 概率密度函数$d_A(\boldsymbol{a})$用于描述随机变量的分布. $\boldsymbol{e}=[e_1,\ldots,e_{nM}]$为区间不确定性向量, 包含 nM 个区间变量. $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\Xi}$包含$\boldsymbol{e}$的所有可

能值, $e_i \in e_i^I = [e_i^L, e_i^U](i = 1, 2, \ldots, nM)$, e_i^L和e_i^U分别是区间变量e_i的最小值和最大值. 本文假设随机变量和区间变量相互独立, 同时假设随机变量之间相互独立, 区间变量之间相互独立.

融合 ODE 求解器、不确定性量化和传递技术, 可以求得$\tilde{\boldsymbol{X}}(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$, 非线性动力学系统动态响应是概率盒过程可表示为

$$\tilde{y}(t) = f(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) = \tilde{g}_3(\tilde{\boldsymbol{X}}(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})). \tag{5}$$

当固定区间向量$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^k$, 在$t_i$时刻, $\tilde{y}(t_i|\boldsymbol{e}^k)$的累积分布函数$[y(t_i), \mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e}^k)]$定义为

$$\mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e}^k) = \int_\Lambda \underline{\delta}_y[f(t_i, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k)] d_A(\boldsymbol{a}) dA. \tag{6}$$

其中, $\mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e}^k)$表示给定区间向量$\boldsymbol{e}^k$时$\tilde{y}(t)$小于等于$y$的概率. $\underline{\delta}_y$定义为

$$\underline{\delta}_y[f(t_i, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k)] = \begin{cases} 1 & f(t_i, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k) \leqslant y(t_i) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{7}$$

当固定区间向量$\boldsymbol{e}^k$时, 非线性动力学系统动态响应的 95% 概率区域可表示为

$$y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k) = \left\{ \begin{array}{l} [y^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k),\ y^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k)]: \\ \quad \mathrm{Prob}_A(t, \tilde{y} \leqslant y^L|\boldsymbol{e}^k) = 2.5\% \\ \quad \text{and } \mathrm{Prob}_A(t, \tilde{y} \leqslant y^U|\boldsymbol{e}^k) = \\ \quad 97.5\%,\ t \in \mathrm{T} \end{array} \right\} \tag{8}$$

其中, $y^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k)$和$y^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^k)$分别是固定区间向量$\boldsymbol{e}^k$考虑随机不确定性非线性动力学系统动态响应的 95% 概率区域的下边界和上边界.

当取不同的区间向量$\boldsymbol{e}$, 将得到$\tilde{y}(t_i|\boldsymbol{e})$不同的累积函数$[y(t_i), \mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e})]$, 这些累积分布可以表示成如下的不确定性结构形式:

$$\underline{P}(y(t_i)) = \{p\colon p = \mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e}), \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{\Xi}\}. \tag{9}$$

其中, $\underline{P}(y(t_i))$为所有$\tilde{y}$值小于等于y的概率的集合.

$\underline{P}_p(y(t_i))$是$\mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e})$值大于$p$的集合, 表示为

$$\underline{P}_p(y(t_i)) = \{\tilde{p}\colon \tilde{p} = \mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e}) > p, \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{\Xi}\}. \tag{10}$$

其中, $\mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y} \leqslant y|\boldsymbol{e})$由给定区间向量$\boldsymbol{e}$通过公式 (6) 获得.

集合$\underline{P}(y(t_i))$的q分位数$\mathrm{Prb}_q(y(t_i))$[23] 可表示为

$$\mathrm{Prb}_q(y(t_i)) = \inf \left\{ \begin{array}{l} p\colon p \in \underline{P}(y(t_i)) \\ \text{and } \mathrm{Prob}_E[\underline{P}_p(y(t_i))] \geqslant q \end{array} \right\} \tag{11}$$

其中, $\mathrm{Prob}_E[\underline{P}_p(y(t_i))]$为$\underline{P}_p(y(t_i))$的分布.

在t_i时刻, 概率盒过程$\tilde{y}(t)$的概率边界为$[\underline{F}_Y(y(t_i)), \overline{F}_Y(y(t_i))]$, 其中, $\underline{F}_Y(y(t_i))$和$\overline{F}_Y(y(t_i))$分别是t_i时刻概率盒过程的下边界和上边界. $\underline{F}_Y(y(t_i))$是t_i时刻 q=0 时点$[y(t_i), \mathrm{Prb}_q(y(t_i))]$绘图所定义的$y(t_i)$的累积分布函数; $\overline{F}_Y(y(t_i))$是t_i时刻 q=1 时点$[y(t_i), \mathrm{Prb}_q(y(t_i))]$绘图所定义的$y(t_i)$的累积分布函数, 如图 1 所示. 在$t_i$时刻, 概率盒过程$\tilde{y}(t)$的 95% 置信区间[24-25] 为$[y^L(t_i), y^U(t_i)]$, 其中$\underline{F}_Y(y^L(t_i)) = 2.5\%$, $\overline{F}_Y(y^U(t_i)) = 97.5\%$. 该用于量化概率盒的 95% 置信区间同时包含了随机不确定性和认知不确定性, 比单次分析得到的传统 95% 置信区间“更保守”, 因为它合并了两种不确定性[26].

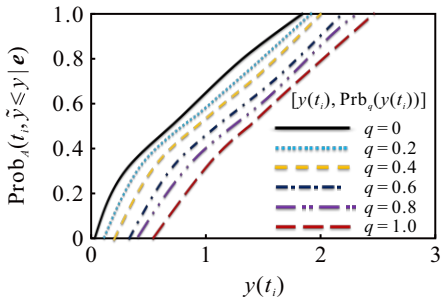

图 1　在t_i时刻由概率盒过程所定义的$[y(t_i), \mathrm{Prb}_q(y(t_i))]$分位数曲线示意图

考虑随机和认知不确定性的非线性动力学系统动态响应的 95% 置信区域可表示为

$$y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) = \left\{ \begin{array}{l} [y^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}),\ y^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})]: \\ \quad \underline{F}_Y(y^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})) = 2.5\% \\ \quad \text{and } \overline{F}_Y(y^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})) = \\ \quad 97.5\%,\ t \in \mathrm{T} \end{array} \right\} \tag{12}$$

其中, $y^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$分别是考虑随机和认知不确定性的非线性动力学系统动态响应的 95% 置信区域的下边界和上边界.

2　基于置信区域相似性度量指标的全局灵敏度分析

2.1　置信区域相似性度量指标

为了对同时存在随机和认知不确定性的非线性动力学的动态特性进行全局灵敏度分析, 本文提出了一种基于置信区域相似性度量指标的全局灵敏度分析方法. 如图 2 所示, 红线和蓝线分别是置信区域$y_1^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$的边界, 即$y_1^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) = [y_1^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}), y_1^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})]$, $y_2^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) = [y_2^L(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}), y_2^U(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})]$. 置信区域$y_1^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$的相似性度量指标可表示为

$$W(y_1^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}), y_2^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})) =$$

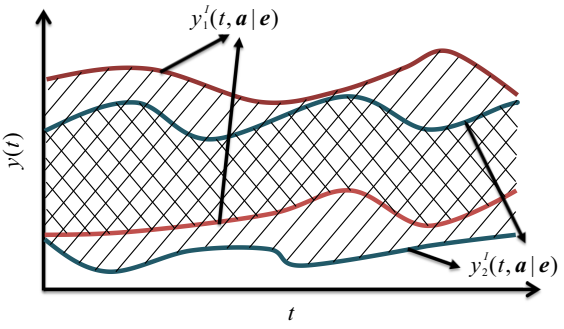

图 2 置信区域$y_1^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$的交集和并集

$$\frac{\int_{t_0}^{t_d} y_1^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cap y_2^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})dt}{\int_{t_0}^{t_d} y_1^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cup y_2^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})dt}. \tag{13}$$

其中, $\cap$和$\cup$分别表示交集和并集,$T=[t_0,t_d]$.

在t_i时刻, 区间$y_1^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$六种可能的关系如图 3 所示, 图中蓝色区间和橙色区间分别是$y_1^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$. Zhao[27] 提出了一种量化两区间相似性的区间相似性度量指标, 该相似性度量指标取值范围是 (-∞, 1]. 为了得到 [0, 1] 范围内的相似性度量指标, Liang[28] 基于两区间交集和并集提出了一种新的区间相似性度量指标, 区间$y_1^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$的交集和并集分别表示为

$$y_1^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cap y_2^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) = \begin{cases} 0 \text{ 情形1} \\ y_2^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_1^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形2} \\ y_2^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_2^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形3} \\ 0 \text{ 情形4} \\ y_1^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_2^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形5} \\ y_1^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_1^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形6} \end{cases} \tag{14}$$

$$y_1^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cup y_2^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) = \begin{cases} y_2^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_2^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) + y_1^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - \\ \quad y_1^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形1} \\ y_1^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_2^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形2} \\ y_1^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_1^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形3} \\ y_2^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_2^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) + y_1^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - \\ \quad y_1^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形4} \\ y_2^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_1^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形5} \\ y_2^U(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) - y_2^L(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \text{ 情形6} \end{cases} \tag{15}$$

2.2 随机不确定性参数的全局灵敏度指标

当随机变量a_i为给定值, 且其他不确定性参数不变时, 动态响应$\tilde{y}_{a_i}(t)$也是概率盒过程. 此时, 非线性动力学系统动态响应的 95% 置信区域可表示为

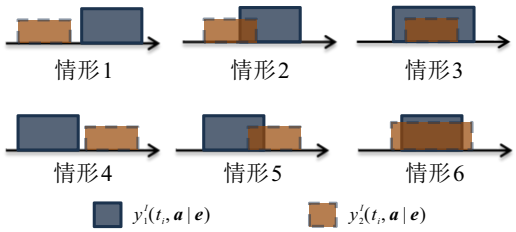

图 3 置信区间$y_1^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$和$y_2^I(t_i,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$之间可能的关系

$$y_{a_i}^I(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i]|\boldsymbol{e}) = \left\{ \begin{array}{l} [y_{a_i}^L(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i]|\boldsymbol{e}),\ \ y_{a_i}^U(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i]|\boldsymbol{e})]: \\ \underline{F}_Y(y_{a_i}^L(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i]|\boldsymbol{e})) = 2.5\% \text{ and} \\ \overline{F}_Y(y_{a_i}^U(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i]|\boldsymbol{e})) = 97.5\%\ t \in \mathrm{T} \end{array} \right\} \tag{16}$$

与考虑所有不确定性时计算置信区域不同, 在计算$\tilde{y}_{a_i}(t)$的置信区域时, $\tilde{y}(t_i|\boldsymbol{e}^k)$的累积分布函数$[y_{a_i}(t_i),\mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y}_{a_i} \leqslant y_{a_i}|\boldsymbol{e}^k)]$表示为

$$\mathrm{Prob}_A(t_i,\ \tilde{y}_{a_i} \leqslant y_{a_i}|\boldsymbol{e}^k) = \int_\Lambda \underline{\delta}_y[f(t_i,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i]|\boldsymbol{e}^k)]d_A(\boldsymbol{a}_{\sim i})dA. \tag{17}$$

其中, $\boldsymbol{a}_{\sim i}$是除去a_i后$\boldsymbol{a}$的向量, $d_A(\boldsymbol{a}_{\sim i})$是给定$a_i$后$\boldsymbol{a}_{\sim i}$的概率密度函数.

$y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$与$y_{a_i}^I(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i]|\boldsymbol{e})$的置信区域相似性度量指标为

$$W(y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}),y_{a_i}^I(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i]|\boldsymbol{e})) = \frac{\int_{t_0}^{t_d} y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cap y_{a_i}^I(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i]|\boldsymbol{e})dt}{\int_{t_0}^{t_d} y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cup y_{a_i}^I(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i]|\boldsymbol{e})dt}. \tag{18}$$

考虑到a_i是服从概率分布$d_A(a_i)$的随机变量, 随机变量a_i的全局灵敏度指标定义为

$$S_i = 1 - \int_{a_i} W(y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}), y_{a_i}^I(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i]|\boldsymbol{e}))d_A(a_i)da_i. \tag{19}$$

全局灵敏度指标S_i的取值范围是 [0, 1], 灵敏度指标S_i越大, 在不确定性分析中随机变量a_i越重要. 当$S_i=0$时, 随机变量a_i对输出响应没有影响; 当$S_i=1$时, 随机变量a_i是仅对输出响应有影响的随机变量.

2.3 区间不确定性参数的全局灵敏度指标

当区间变量e_j为给定值, 且其他不确定性参数不变时, 动态响应$\tilde{y}_{e_j}(t)$也是概率盒过程. 此时, 非线性动力学系统动态响应的 95% 置信区域可表示为

$$y_{e_j}^I(t,\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j},e_j]) = \left\{ \begin{array}{l} [y_{e_j}^L(t,\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j},e_j]),\ \ y_{e_j}^U(t,\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j},\boldsymbol{e}_j])]: \\ \underline{F}_Y(y_{e_j}^L(t,\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j},\boldsymbol{e}_j])) = 2.5\% \text{ and} \\ \overline{F}_Y(y_{e_j}^U(t,\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j},\boldsymbol{e}_j])) = 97.5\%\ t \in \mathrm{T} \end{array} \right\} \tag{20}$$

在这种情况下, 公式 (6) 改写为

$$\mathrm{Prob}_A(t_i, \tilde{y}_{e_j} \leqslant y_{e_j}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, e_j]) = \int_{\Lambda} \delta_y[f(t_i, \boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, \boldsymbol{e}_j])] d_A(\boldsymbol{a}) dA. \tag{21}$$

其中, $\boldsymbol{e}_{\sim j}$是除去e_j后$\boldsymbol{e}$的向量.

$y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$与$y^I_{e_j}(t, \boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, e_j])$的置信区域相似性度量指标为

$$W(y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}), y^I_{e_j}(t, \boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, \boldsymbol{e}_j])) = \frac{\int_{t_0}^{t_d} y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cap y^I_{e_j}(t, \boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, \boldsymbol{e}_j]) dt}{\int_{t_0}^{t_d} y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}) \cup y^I_{e_j}(t, \boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, \boldsymbol{e}_j]) dt}. \tag{22}$$

考虑到$e_j \in e^I_j = [e^L_j, e^U_j]$, 区间变量$e_j$的全局灵敏度指标定义为

$$S_j = 1 - \frac{1}{e^U_j - e^L_j} \int_{e^L_j}^{e^U_j} W(y^I(t, \boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}), y^I_{e_j}(t, \boldsymbol{a}|[\boldsymbol{e}_{\sim j}, e_j])) de_j. \tag{23}$$

其中, e^U_j和e^L_j分别是区间变量e_j的最大值和最小值.

全局灵敏度指标S_j的取值范围是 [0, 1], 灵敏度指标S_j越大, 在不确定性分析中区间变量e_j越重要. 当$S_j = 0$时, 区间变量e_j对输出响应没有影响; 当$S_j = 1$时, 区间变量e_j是仅对输出响应有影响的区间变量.

2.4　全局灵敏度分析方法

为了计算非线性动力学系统的全局灵敏度指标, 本文基于置信区域相似性度量指标和时域双层循环蒙特卡罗法抽样技术[29], 提出了一种存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统的全局灵敏度分析方法. 该方法包含三个模块: (1) 计算考虑所有不确定性的非线性动力学系统动态响应的置信区域; (2) 计算固定某个随机变量而其他不确定性变量不变的非线性动力学系统动态响应的置信区域; (3) 计算随机变量的全局灵敏度指标. 图 4 为存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统的全局灵敏度指标求解方法的主要步骤, 具体为

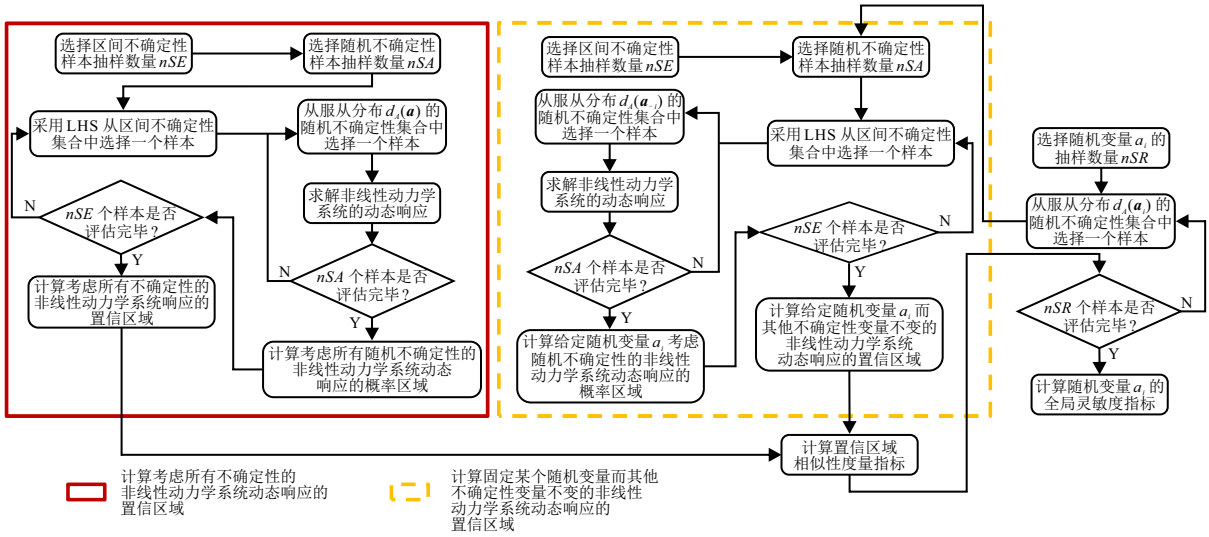

图 4　存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统的全局灵敏度指标求解流程

(1) 计算考虑所有不确定性的非线性动力学系统动态响应的置信区域

步骤 1: 选择区间不确定性样本抽样数量 *nSE*.

步骤 2: 选择随机不确定性样本抽样数量 *nSA*.

步骤 3: 采用混合抽样 (两水平全因子抽样[30]+拉丁超立方抽样 (Latin Hypercube Sampling, 简称 LHS)[31]) 从区间不确定性集合中选择一个样本.

步骤 4: 采用 MCS 从服从分布$d_A(\boldsymbol{a})$的随机不确定性集合中选择一个样本.

步骤 5: 采用 ODE 求解器求解非线性动力学系统的动态响应.

步骤 6: 判断 *nSA* 个随机不确定性样本是否评估完. 如果否, 回到步骤 4, 如果是, 继续步骤 7.

步骤 7: 计算给定区间变量情况下, 考虑随机不确定性非线性动力学系统动态响应的概率区域.

步骤 8: 判断 *nSE* 个区间不确定性样本是否评估完. 如果否, 回到步骤 3, 如果是, 继续步骤 9.

步骤 9: 计算考虑随机和区间不确定性的非线性动力学系统动态响应的置信区域.

(2) 计算固定某个随机变量而其他不确定性变量不变的非线性动力学系统动态响应的置信区域

与计算考虑所有不确定性的非线性动力学系统动态响应的置信区域的步骤相似, 计算固定某个随机变量而其他不确定性变量不变的非线性动力学系统动态响应的置信区域与其不同的地方在步骤 4. 该模块中给定随机变量a_i, 采用 MCS 从服从分布

$d_A(\boldsymbol{a}_{\sim i})$的随机不确定性集合中选择样本. 这将导致模块 (2) 的步骤 7 和步骤 9 计算得到的置信区域与模块 (1) 的计算结果不同.

(3) 计算随机变量的全局灵敏度指标

步骤 1: 计算考虑所有不确定性的非线性动力学系统动态响应的置信区域$y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$.

步骤 2: 选择随机变量a_i样本抽样数量 *nSR*.

步骤 3: 采用 MCS 从服从分布$d_A(a_i)$的随机不确定性集合中选择一个样本.

步骤 4: 计算固定随机变量$a_i=a_i^k$而其他不确定性变量不变的非线性动力学系统动态响应的置信区域$y^I_{a_i}(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i^k]|\boldsymbol{e})$.

步骤 5: 计算$y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e})$与$y^I_{a_i}(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i^k]|\boldsymbol{e})$的置信区域相似性度量指标$W(y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}),y^I_{a_i}(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},\boldsymbol{a}_i^k]|\boldsymbol{e}))$.

步骤 6: 判断 *nSR* 个随机变量a_i样本是否评估完. 如果否, 回到步骤 3, 如果是, 继续步骤 7.

步骤 7: 计算随机变量a_i的全局灵敏度指标, 如下所示:

$$S_i=1-\frac{1}{nSR}\sum_{k=1}^{nSR}W(y^I(t,\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}),y^I_{a_i}(t,[\boldsymbol{a}_{\sim i},a_i^k]|\boldsymbol{e})).$$

3 数值算例

为了验证提出的存在随机和认知不确定性的非线性动力学系统全局灵敏度分析方法, 以两自由度非线性质量-弹簧-阻尼系统受迫振动为例, 如图 5 所示. 取两物块离平衡位置的位移x_1和x_2为系统的坐标, 则该两自由度非线性系统的运动方程为

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1+c_2 & -c_2\\ -c_2 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{1t}+k_{2t} & -k_{2t}\\ -k_{2t} & k_{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{1f}x_1^3+k_{2f}(x_1-x_2)^3\\ -k_{2f}(x_1-x_2)^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 10\sin t\end{bmatrix}\tag{24}$$

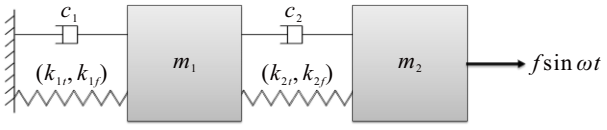

图 5 两自由度非线性质量-弹簧-阻尼系统

其中, m_1和m_2为质量, c_1和c_2为阻尼, k_{1t}和k_{2t}为线性刚度, k_{1f}和k_{2f}为非线性刚度, 作用于物块m_2上的外部激励力为$10\sin t$. 本算例中, 线性刚度和非线性刚度设为随机不确定性参数, 服从均匀分布; 阻尼和质量设为认知不确定性参数, 采用区间量化, 参数的不确定性取值如表 1 所示.

表 1 随机和区间变量的不确定性取值

参数	不确定性分类	具体分布说明
k_{1t} (N/m)	随机不确定性	均匀分布, [800, 1 200]
k_{2t} (N/m)	随机不确定性	均匀分布, [800, 1 200]
k_{1f} (N/m^3)	随机不确定性	均匀分布, [40, 60]
k_{2f} (N/m^3)	随机不确定性	均匀分布, [40, 60]
m_1(kg)	区间不确定性	区间, [5,7]
m_2(kg)	区间不确定性	区间, [5,7]
c_1(N.s/m)	区间不确定性	区间, [3,5]
c_2 (N.s/m)	区间不确定性	区间, [3,5]

3.1 方法验证

为了验证本文提出的基于置信区域相似性度量指标的灵敏度分析方法, 将其与基于区间过程的灵敏度分析方法[19] 进行对比. 在基于区间过程的灵敏度分析方法中, 均匀分布随机参数采用区间量化, 范围不变. 置信区域方法中, 随机和区间不确定性的抽样样本数量分别是 2000 和 400; 区间过程方法中, 区间不确定性抽样样本数量为 2000. 两种方法的灵敏度分析结果如图 6 所示, 可以发现: 虽然这两种灵敏度分析方法计算得到的灵敏度指标结果存在明显差异, 但是两种方法都表明m_1、m_2、k_{1t}和k_{2t}是影响位移x_1和x_2的关键参数. 两种方法中, k_{1t}都是影响位移x_1和x_2最显著的参数. m_1和m_2在两种方法中都是区间变量, 采用基于置信区域相似性度量指标的灵敏度分析方法得到的位移x_1和x_2的灵敏度都大于基于区间过程的灵敏度分析方法的计算结果. 其原因在于, 本文提出的基于置信区域相似性度量指标的灵敏度分析方法倾向于将随机和区间不确定性参

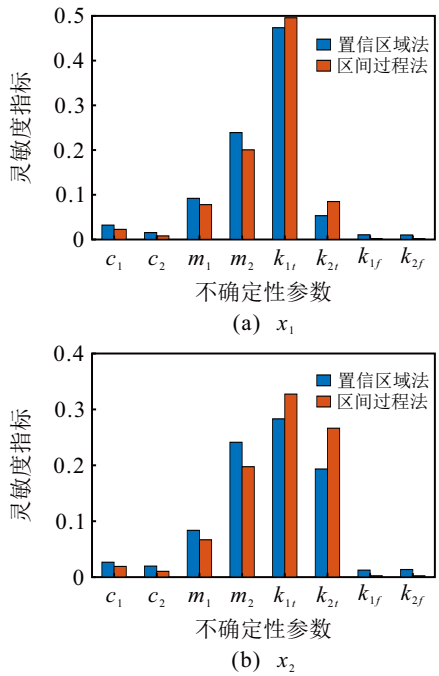

图 6 两种方法的灵敏度结果

数分类进行灵敏度分析, 在采用该方法时, 区间参数只有 4 个, 因此, 灵敏度分析结果相对较大. k_{1t}和k_{2t}在两种方法中分别量化为随机变量和区间变量, 采用基于置信区域相似性度量指标的灵敏度分析方法得到的位移x_1和x_2的灵敏度都小于基于区间过程的灵敏度分析方法的计算结果.

3.2　样本量对灵敏度指标的影响

为了分析基于置信区域相似性度量指标的灵敏度分析方法的稳定性, 图 7 和图 8 显示了随机不确定性样本数量和区间不确定性样本数量对灵敏度指标的影响. 由图 7 可知, 随着随机不确定性样本数量的增加, 灵敏度结果收敛, 当随机不确定性样本数量为 1 000 时, 再增加随机不确定性样本对灵敏度分析结果影响很小. 由图 8 可知, 随着认知不确定性样本数量的增加, 灵敏度结果收敛, 当认知不确定性样本数量为 300 时, 再增加认知不确定性样本对灵敏度分析结果影响很小. 因此, 该灵敏度分析方法随着样本数量的增加收敛, 当选择随机和认知不确定性样本数量分别为 1 000 和 300 时, 采用本文提出的灵敏度分析方法能够得到较精确的灵敏度分析结果.

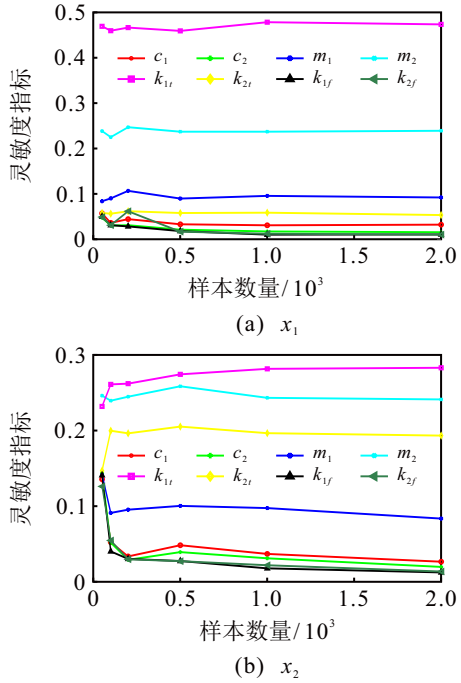

图 7　不同随机不确定性样本数量灵敏度结果

3.3　随机分布对灵敏度指标的影响

为了分析随机不确定性参数分布对灵敏度指标结果的影响, 随机不确定性参数进一步假设服从正态分布, $k_{1t} \sim N(1000, 100^2)$, $k_{2t} \sim N(1000, 100^2)$, $k_{1f} \sim N(50, 5^2)$, $k_{2f} \sim N(50, 5^2)$, 将其灵敏度结果与均匀分析结果对比, 如图 9 所示. 可以发现: 随机不确定性参数分布不仅会影响随机不确定性参数的

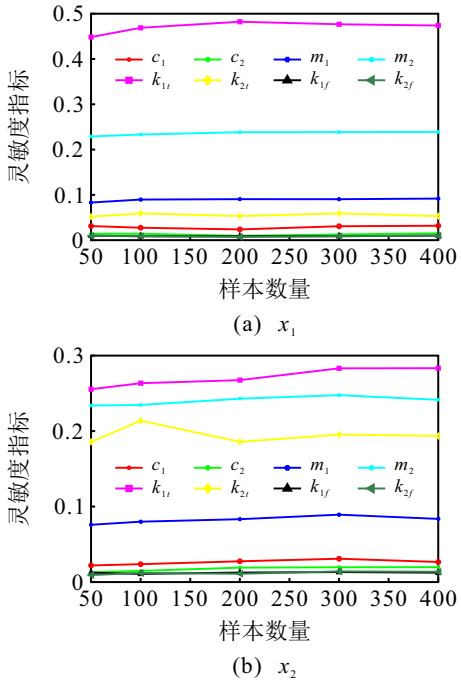

图 8　不同认知不确定性样本数量灵敏度结果

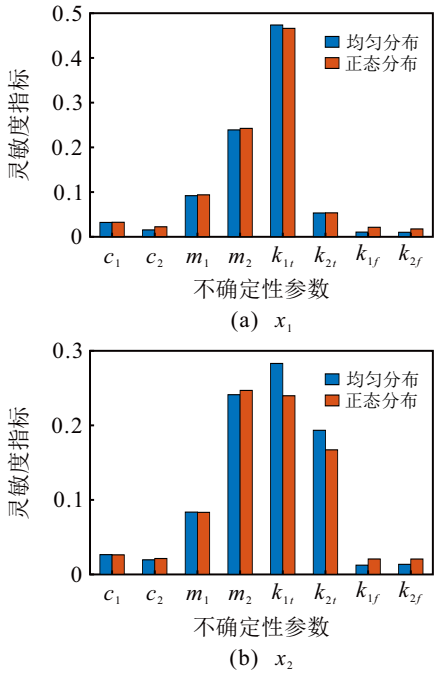

图 9　均匀分布和高斯正态分布的灵敏度结果

灵敏度, 而且会影响区间不确定性参数的灵敏度. 均匀分布情况下, k_{1t}对位移x_1和x_2的灵敏度大于正态分布的结果. 均匀分布情况下, m_2, c_2, k_{1f}和k_{2f}对位移x_1和x_2的灵敏度结果小于正态分布的结果. 两种分布情况下c_1对位移x_1和x_2的灵敏度几乎相同. 均匀分布情况下, k_{2t}对位移x_2的灵敏度大于正态分布的结果, 但是对于位移x_1两种分布的灵敏度结果几乎相同.

3.4　不确定性分类对灵敏度指标的影响

为了分析不确定性参数分类对灵敏度指标结果

的影响, 本文分析了两种不确定性分类情况: (1) 情况 1, 不确定性参数取值如表 1 所示; (2) 情况 2, 表 1 中k_{1f}和k_{2f}假设为区间不确定性参数. 两种不确定性分类情况的灵敏度分析结果如图 10 所示. 可以发现: 当参数k_{1f}和k_{2f}由随机不确定性变为区间不确定性时, 随机不确定性参数k_{1t}和k_{2t}对位移x_1和x_2的灵敏度增加, 区间不确定性参数m_1、m_2、c_1和c_2对位移x_1和x_2的灵敏度减小, 且改变参数k_{1f}和k_{2f}的不确定性分类, k_{1f}和k_{2f}对x_1和x_2的灵敏度结果不相同.

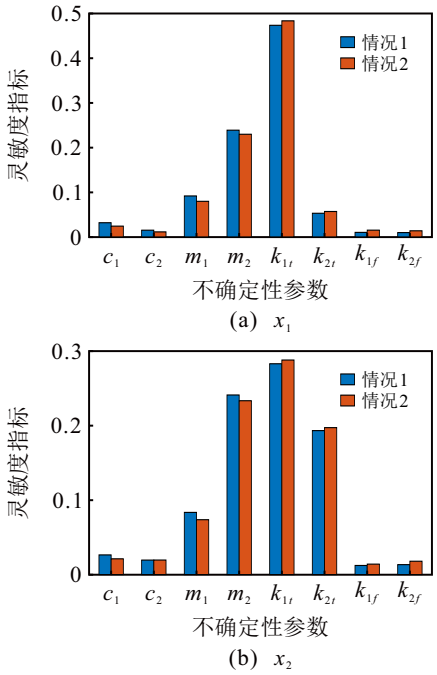

图 10 两种不确定性分类情况的灵敏度结果

4 结 论

本文提出了基于置信区域相似性度量指标的非线性动力学系统全局灵敏度指标的概念, 其中置信区域的计算同时考虑了非线性动力学系统的随机和认知不确定性, 并且发展了面向同时存在随机与认知不确定性的非线性动力学系统全局灵敏度分析方法. 通过数值算例可以得到以下结论:

(1) 基于置信区域相似性度量指标的灵敏度分析方法倾向于将随机和区间不确定性参数分类进行灵敏度分析, 这导致该方法得到的区间不确定性参数的灵敏度结果大于基于区间过程的灵敏度分析结果.

(2) 随机和认知不确定性样本数量都会影响灵敏度指标结果; 当随机和认知不确定性样本数量增加时, 灵敏度分析结果收敛.

(3) 随机不确定性参数分布不仅会影响随机不确定性参数的灵敏度指标结果, 而且会影响区间不确定性参数的灵敏度指标结果; 不同参数受随机不确定性参数分布的影响不同.

本文仅研究了一维时域输出响应的灵敏度, 后续将本文方法拓展至多输出耦合场景. 考虑随机和认知不确定性的非线性动力学系统置信区域分析是双层循环抽样, 对于复杂非线性系统计算效率很低, 因此, 后续研究中也将深入探讨引入混沌多项式展开、Kriging 代理模型的混合不确定性高性计算方法.

参考文献 (References)

[1] Shi J F, Qi P F, Han C, et al. Multi-state meshing-collision dynamics modeling and analysis of high-contact-ratio spur gear system considering tooth breakage[J]. International Journal of Mechanical System Dynamics, 2025, 5(1): 160-175.

[2] Cheng C, Ma R. On the analysis of an actual model of a quasi-zero stiffness vibration isolator[J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 112(21): 18917-18929.

[3] Yuan J, Gastaldi C, Goy E D, et al. Friction damping for turbomachinery: A comprehensive review of modelling, design strategies, and testing capabilities[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2024, 147: 101018.

[4] Zhu T X, Zang C P, Wei X K, et al. Nonlinear model updating of the rotor-bearing system by multi-harmonic balance method and analytical sensitivity derivation[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2024, 161: 104688.

[5] Cheng K, Papaioannou I, Lyu M Z, et al. State space Kriging model for emulating nonlinear stochastic dynamical systems with parameter uncertainty[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2026, 243: 113691.

[6] 吴沐宸, 陈江涛, 夏侯唐凡, 等. 非参数化概率盒下随机与认知不确定性的分离式灵敏度分析[J]. 航空学报, 2023, 44(1): 193-208.
(Wu M C, Chen J T, Xiahou T F, et al. Separating sensitivity analysis of aleatory and epistemic uncertainties in non-parametric probability-box[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(1): 193-208.)

[7] 曹瑞, 吕慧涛. 概率推理学习控制方法的不确定性来源分析及量化[J]. 控制与决策, 2026, 41(1): 494-504.
(Cao R, Lv H T. Analysis and quantification of uncertainty sources in probabilistic inference learning control[J]. Control and Decision, 2026, 41(1): 494-504.)

[8] Wang C Y, Li Z H, Ji X L, et al. Dynamic uncertainty analysis of rod-fastening rotor systems with rubbing effects using a Chebyshev interval method[J]. European Journal of Mechanics — A/Solids, 2025, 113: 105725.

[9] Cai Y, Zhao W, Wang X P, et al. A novel multiple linearization method for reliability analysis based on evidence theory[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2024, 250: 110278.

[10] 王杰, 周志杰, 胡昌华, 等. 不确定性信息表示及推理[J]. 控制与决策, 2023, 38(10): 2749-2763.

(Wang J, Zhou Z J, Hu C H, et al. Expression and inference of uncertain information[J]. Control and Decision, 2023, 38(10): 2749-2763.)

[11] Mao K Z, Deng Z M, Gao H. A unified propagation approach of stochastic-fuzzy uncertainties in nonlinear structural dynamic responses[J]. Applied Mathematical Modelling, 2026, 159: 117003.

[12] Cheng K, Lu Z Z, Ling C Y, et al. Surrogate-assisted global sensitivity analysis: An overview[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 61(3): 1187-1213.

[13] Chang Q, Zhou C C, Valdebenito M A, et al. A novel sensitivity index for analyzing the response of numerical models with interval inputs[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 400: 115509.

[14] Zhang F, Wang X H, Hou X T, et al. Variance-based global sensitivity analysis of a hybrid thermoelectric generator fuzzy system[J]. Applied Energy, 2022, 307: 118208.

[15] Fang Y D, Lu J, Han W J. An evidence theory based decision method for the variable sensitivity of multi-output systems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2025, 126(17): e70125.

[16] 张保强, 李潇乾, 罗华耿, 等. 基于面积重叠法的概率盒全局灵敏度计算分析[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 467-473.
(Zhang B Q, Li X Q, Luo H G, et al. Global sensitivity analysis of probability box based on area overlap method[J]. Control and Decision, 2024, 39(2): 467-473.)

[17] Guo J B, Du S H, Wang Y, et al. Time-dependent global sensitivity analysis for long-term degeneracy model using polynomial chaos[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2014, 6: 719825.

[18] Song Z Z, Zhang H Y, Zhai Q Q, et al. A dimension reduction-based Kriging modeling method for high-dimensional time-variant uncertainty propagation and global sensitivity analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, 219: 111607.

[19] Jung W, Taflanidis A A. Efficient global sensitivity analysis for high-dimensional outputs combining data-driven probability models and dimensionality reduction[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2023, 231: 108805.

[20] Cao J K, Du F R, Ding S T. Global sensitivity analysis for dynamic systems with stochastic input processes[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 118: 106-117.

[21] Sun D Y, Liang X F, Ning H M, et al. Global sensitivity analysis for degraded braided composite with interval process[J]. Composites Science and Technology, 2024, 250: 110542.

[22] Kontoe S, Zdravkovic L, Potts D M. An assessment of time integration schemes for dynamic geotechnical problems[J]. Computers and Geotechnics, 2008, 35(2): 253-264.

[23] Helton J C, Johnson J D, Oberkampf W L, et al. Representation of analysis results involving aleatory and epistemic uncertainty[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2008.

[24] 张保强. 热结构不确定性动力学仿真及模型确认方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012.
(Zhang B Q. Uncertainty simulation of thermal structural dynamics and model validation method research[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012.)

[25] Sun D Y, Chen G P. Kinematic accuracy analysis of planar mechanisms with clearance involving random and epistemic uncertainty[J]. European Journal of Mechanics — A/Solids, 2016, 58: 256-261.

[26] Vassaux M, Wan S Z, Edeling W, et al. Ensembles are required to handle aleatoric and parametric uncertainty in molecular dynamics simulation[J]. Journal of Chemical Theory and Computation, 2021, 17(8): 5187-5197.

[27] Zhao Y L, Yang J H, Faes M G R, et al. The sub-interval similarity: A general uncertainty quantification metric for both stochastic and interval model updating[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 178: 109319.

[28] Liang X F, Sun D Y, Ning H M, et al. Validation experiment design of degradation models for composite materials with interval uncertainties[J]. Composite Structures, 2023, 319: 117165.

[29] Sun D Y, Zhang B Q, Liang X F, et al. Dynamic analysis of a simplified flexible manipulator with interval joint clearances and random material properties[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 98(2): 1049-1063.

[30] Buragohain M, Mahanta C. A novel approach for ANFIS modelling based on full factorial design[J]. Applied Soft Computing, 2008, 8(1): 609-625.

[31] 姜建国, 叶华, 马亚华. 一种采用抽样策略的 PSO 算法[J]. 控制与决策, 2015, 30(10): 1779-1784.
(Jiang J G, Ye H, Ma Y H. Particle swarm optimization algorithm via sampling strategy[J]. Control and Decision, 2015, 30(10): 1779-1784.)

作者简介

孙东阳 (1985−), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为模型确认、系统可靠性分析与评估, E-mail: sundongyang@cqu.edu.cn.